Lagebeziehung zweier Geraden GTR

Es bestehen folgende Möglichkeiten. Die Geraden

1. schneiden sich oder sind
2. windschief,
3. identisch,
4. parallel und nicht identisch.

Gegeben sind die beiden Geraden $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ und $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$.

Die Schnittbedingung führt zum Koeffizientenschema des Gleichungssystems (Stützvektoren wurden zusammengefasst):

r	s	
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Der GTR liefert die Stufenform des Gleichungssystems, aus der zu erkennen ist, welcher Fall vorliegt.

Ordnen Sie den Stufenformen die Lagebeziehungen zu:

a)

r	s	
1	0	0
0	1	0
0	0	1

b)

r	s	
1	5	4
0	0	1
0	0	0

c)

r	s	
1	0	3
0	1	2
0	0	0

d)

r	s	
1	5	4
0	0	0
0	0	0

Lagebeziehung zweier Geraden   GTR

Ordnen Sie den Stufenformen die Lagebeziehungen zu:

c)

r	s	
1	0	3
0	1	2
0	0	0

Die Geraden schneiden sich.
Das LGS ist eindeutig lösbar, hier: $r = 3$, $s = 2$.
Die 3. Zeile $r \cdot 0 + s \cdot 0 = 0$ ist für beliebige r und s erfüllt.

a)

r	s	
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Die Geraden sind windschief.
$r = 0$
$s = 0$ Bis hier sieht es nach einer eindeutigen Lösung aus.
3. Zeile: Widerspruch $s \cdot 0 = 1$

d)

r	s	
1	5	4
0	0	0
0	0	0

Die Geraden sind identisch.
Für r und s gibt es unendlich viele Lösungen $r + s \cdot 5 = 4$.
2. und 3. Zeile sind allgemeingültig.

b)

r	s	
1	5	4
0	0	1
0	0	0

Die Geraden sind parallel und nicht identisch.
1. Zeile: unendl. viele Lösungen
2. Zeile: Widerspruch, also kein Schnittpunkt
3. Zeile: allgemeingültig

Lagebeziehung zweier Ebenen GTR

Es bestehen folgende Möglichkeiten. Die Ebenen

1. schneiden sich in einer Geraden oder sind
2. identisch,
3. parallel und nicht identisch.

Gegeben sind die beiden Ebenen $E_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ und $E_2\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$.

Die Schnittbedingung führt zum Koeffizientenschema des Gleichungssystems (Stützvektoren wurden zusammengefasst):

r	s	u	v	
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Der GTR liefert die Stufenform des Gleichungssystems, aus der zu erkennen ist, welcher Fall vorliegt.

Ordnen Sie den Stufenformen die Lagebeziehungen zu:

a)

r	s	u	v	
1	0	4	3	0
0	1	2	5	0
0	0	0	0	1

b)

r	s	u	v	
1	0	4	3	0
0	1	2	5	0
0	0	1	3	2

c)

r	s	u	v	
1	0	4	3	0
0	1	2	5	0
0	0	0	0	0

d)

r	s	u	v	
1	0	0	3	4
0	1	0	−1	2
0	0	0	1	0

Lagebeziehung zweier Ebenen GTR

Ordnen Sie den Stufenformen die Lagebeziehungen zu:

b)

r	s	u	v	
1	0	4	3	0
0	1	2	5	0
0	0	1	3	2

Es liegt eine Schnittgerade vor.
Die 3. Zeile $u + v \cdot 3 = 2$ kann nach einer Variablen aufgelöst werden. Durch Einsetzen gelangt man zur Geradengleichung.

d)

r	s	u	v	
1	0	0	3	4
0	1	0	-1	2
0	0	0	1	0

Es liegt eine Schnittgerade vor.
Die 3. Zeile liefert $v = 0$.
Durch Einsetzen gelangt man zur Geradengleichung.

c)

r	s	u	v	
1	0	4	3	0
0	1	2	5	0
0	0	0	0	0

Die Ebenen sind identisch.
Bei 2 Gleichungen mit 4 Variablen können 2 Variable beliebig vorgegeben werden.

a)

r	s	u	v	
1	0	4	3	0
0	1	2	5	0
0	0	0	0	1

Die Ebenen sind parallel aber nicht identisch.
Bei 2 Gleichungen mit 4 Variablen können 2 Variable beliebig vorgegeben werden. Die 3. Zeile beinhaltet einen Widerspruch.

Zur Ermittlung der Schnittgeraden:
Falls keine einfache Beziehung wie $v = 0$ (siehe d) existiert, so sucht man sich eine Gleichung, in der nur r und s oder aber nur u und v vorkommen (siehe b). Da der eine Parameter vom anderen abhängt, kommt man durch Einsetzen in die entsprechende Ebenengleichung zu einer Geradengleichung.
Wenn auch dies nicht möglich ist, sind 2 Gleichungen zu verwenden, die einen Parameter gemeinsam haben. Durch Eliminieren gelangt man zu einer Beziehung von r und s bzw. u und v.

Lagebeziehungen Aufgaben

a) $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 4{,}5 \\ -9 \end{pmatrix}$

d) $E_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad E_2\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $E_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad E_2\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

f) $E_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_2\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

g) $E_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E_2\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

h) $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

i) $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lagebeziehungen Aufgaben

a) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ Geraden sind windschief.

b) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $S(1\,|\,3\,|\,1)$

c) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -6 \\ 4{,}5 \\ -9 \end{pmatrix}$ Geraden sind identisch.

d) $E_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad E_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Schnittgerade $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

e) $E_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad E_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ echt parallel

f) $E_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $E_1 = E_2$

g) $E_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schnittgerade $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

h) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ $S(3\,|\,4\,|\,4)$

i) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ keine gemeinsamen Punkte

Lagebeziehungen Gerade/Ebene

a) $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 31 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lagebeziehungen Gerade/Ebene

a) $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$t = -1, \quad S(2 \,|\, 4 \,|\, 6)$

b) $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gerade verläuft echt parallel zur Ebene.

c) $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 31 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gerade verläuft in der Ebene.

Schnitt dreier Ebenen

Drei Ebenen sind jeweils durch 3 Punkte festgelegt:

E_1: $A(0\,|\,8\,|\,6),\ B(4\,|\,-2\,|\,3),\ C(1\,|\,-5\,|\,0)$

E_2: $D(0\,|\,-2\,|\,5),\ E(4\,|\,8\,|\,3),\ F(1\,|\,2\,|\,0)$

E_3: $G(-2\,|\,3\,|\,3),\ H(-5\,|\,-3\,|\,0),\ I(-4\,|\,7\,|\,4)$

Untersuchen Sie, ob es einen gemeinsamen Schnittpunkt gibt.
Falls dies der Fall ist, ermitteln Sie ihn.

$$\begin{array}{lrcrcrcr} E_1: & 7x & - & 3y & - & z & = & 1 \\ E_2: & 2x & + & 3y & - & 8z & = & -19 \\ E_3: & x & + & y & - & 2z & = & -4 \end{array}$$

Schnittgeraden:

$E_1 \cap E_2$

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$E_1 \cap E_3$

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$E_2 \cap E_3$

$$i:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$S(1\,|\,1\,|\,3)$