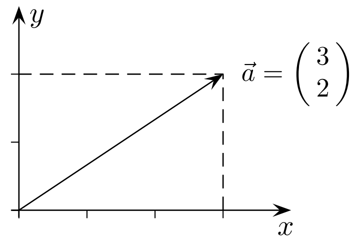
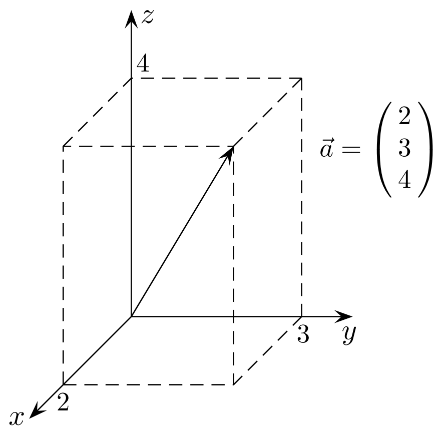
Vektorrechnung Einführung



In der Physik treten häufig Größen wie Kraft und Geschwindigkeit auf, die sich nicht nur durch eine Zahl erfassen lassen. Sie besitzen neben einem bestimmten Betrag noch eine Richtung und werden daher durch Pfeile dargestellt. Fürs erste beschränken wir uns auf diejenigen Pfeile, deren Anfangspunkt im Koordinatenursprung liegen. Diese Pfeile können in eindeutiger Weise durch die Koordinaten ihres Endpunkts $A(x \mid y)$ erfasst werden. Zur Unterscheidung von den Punkten werden die Koordinaten der Vektoren untereinander geschrieben. Vektoren können addiert werden.



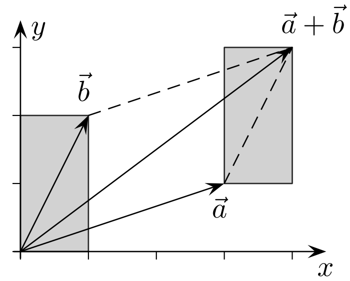
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{im Raum:} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Summe entspricht der Resultierenden des Parallelogramms, das von den zu addierenden Vektoren aufgespannt wird.

Vektoren können mit einer Zahl multipliziert werden:

$$3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

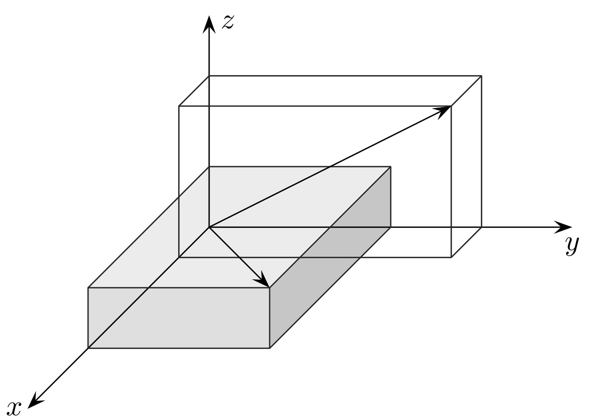
Da Zahlen in der Vektorrechnung zur Unterscheidung Skalare genannt werden, heißt diese Multiplikation Skalarmultiplikation (später lernen wir ein Vektorprodukt kennen). Für Skalare werden die griechischen Buchstaben λ lambda und μ my verwendet.

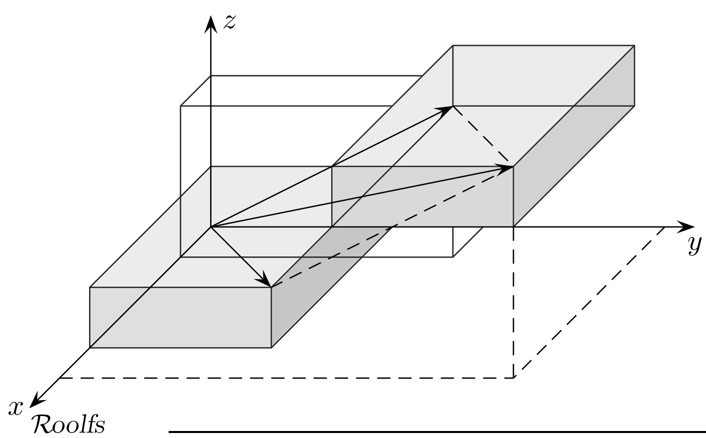


Aufg. Zeichne die Vektoren:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Die Grundlagen der Vektorrechnung schufen W. Hamilton (1805-65) und H. Graßmann (1809-77). Sie stellt zusammen mit der Differential- und Integralrechnung das Fundament der höheren Mathematik dar. Anwendungen finden wir in den Natur- und Wirtschaftswissenschaften.





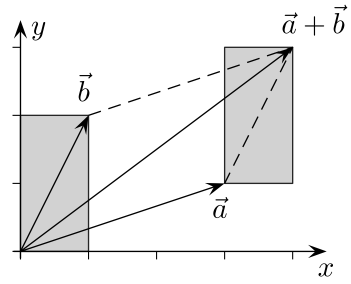
Was ist ein Vektor?

Wir unterscheiden Vektoren der Ebene und des Raumes.
Vektoren sind entweder Elemente (2-Tupel) des $\mathbb{R}^2$, z. B. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,
oder 3-Tupel des $\mathbb{R}^3$, z. B. $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

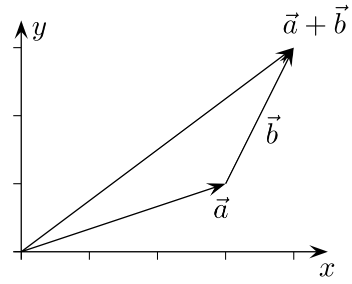
Vektoren werden durch Pfeile geometrisch dargestellt, die <u>im Ursprung</u> des Koordinatensystems beginnen und zu einem Punkt führen.
Punkte, z. B. $A(2\,|\,3)$ oder $B(2\,|\,-1\,|\,4)$ sind von den Vektoren in der Schreib- und Sprechweise zu unterscheiden.

Werfen wir noch einmal einen Blick auf die Addition von Vektoren, z. B.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$



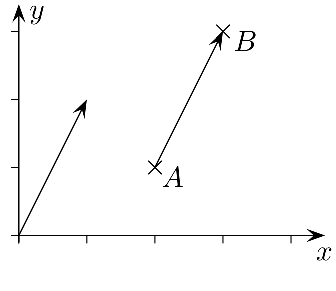
Die Summe ergibt sich, indem die x- und y-Koordinate von $\vec{a}$ um 1, bzw. um 2 vergrößert wird, geometrisch wird der Pfeil von $\vec{b}$ parallel verschoben an den Pfeil von $\vec{a}$ angehängt.



Der besseren Anschauung halber zeichnen wir den verschobenen Pfeil von $\vec{b}$.
In allen unklaren Situationen erinnern wir uns daran, dass die zu Vektoren gehörenden Pfeile im Ursprung beginnen. Die aneinandergehängten Pfeile verdeutlichen jedoch, dass bei der Addition von einem Vektor ausgegangen werden kann und der andere Vektor die Koordinatenänderungen angibt.

Werden zwei Punkte durch einen Pfeil verbunden, so bezeichnet $\overrightarrow{AB}$ den Vektor, der zu dem in den Ursprung verschobenen Pfeil gehört. In diesem Beispiel ist

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Die in Schulbüchern - und auch nur dort - verwendeten Begriffe
Pfeilklasse, Repräsentant, Ortsvektor, freier Vektor sind entbehrlich und erschweren den Einstieg.

Roolfs