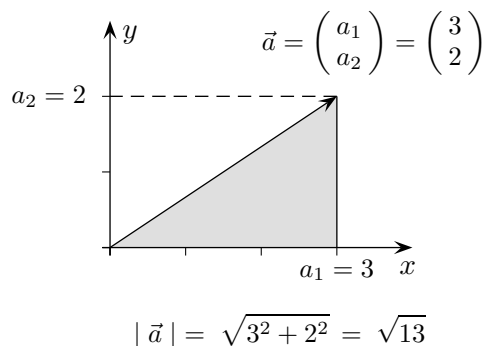


Betrag eines Vektors

Die Länge $|\vec{a}|$ oder der Betrag eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ (2-dimensional) beträgt: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

und für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ (3-dimensional) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

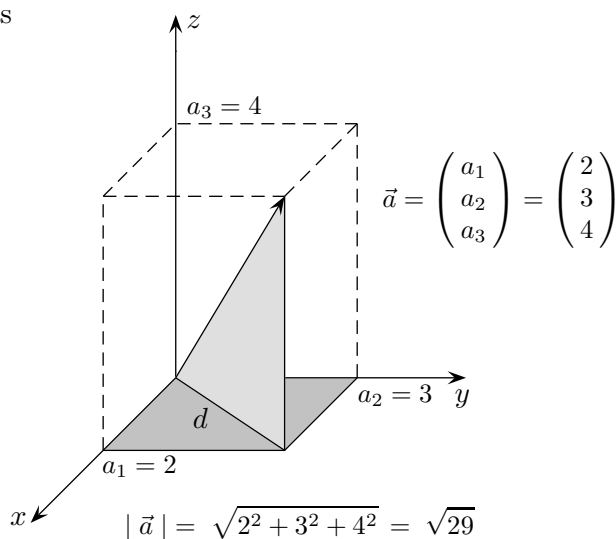


Dem liegt die Berechnung der Diagonale eines Rechtecks bzw. der Raumdiagonale eines Quaders zugrunde.

Um die Länge der Raumdiagonale des Quaders zu berechnen, ist als Zwischenschritt die Diagonalenlänge $d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ der Grundfläche zu ermitteln.

Bei einer erneuten Anwendung des Satzes des Pythagoras fällt die Wurzel von d beim Quadrieren fort:

$$|\vec{a}| = \sqrt{d^2 + a_3^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



1. Wie weit ist der Punkt $B(3 \mid -1 \mid 2)$ von $A(2 \mid 3 \mid -4)$ entfernt?
2. Welcher Punkt P , der auf der Geraden durch $A(2 \mid 1 \mid -3)$ in Richtung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt, hat von A die Entfernung $d = 5$?
3. Untersuche, ob die Punkte $A(3 \mid 12 \mid 2)$, $B(1 \mid 8 \mid 6)$ und $C(5 \mid 4 \mid 4)$ zu einem Quadrat ergänzt werden können.

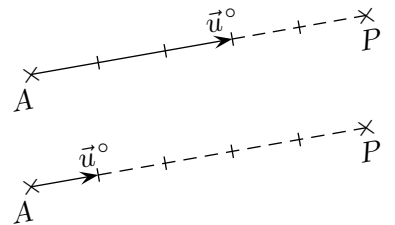
Betrag eines Vektors Lösungen

1. $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad d = |\vec{AB}| = \sqrt{53}$

2. Der Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat die Länge $|\vec{u}| = 3$. Für $\vec{u}^\circ = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist dann $|\vec{u}^\circ| = 1$.

$$\vec{OP} = \vec{OA} + 5 \cdot \vec{u}^\circ = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P\left(\frac{16}{3} \mid -\frac{7}{3} \mid -\frac{4}{3}\right)$$

Vektoren wie \vec{u}° mit der Länge 1 heißen Einheitsvektoren. Mit ihnen können Punkte mit vorgegebener Entfernung und Richtung ermittelt werden.



3. $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad |\vec{AB}| = 6, \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad |\vec{BC}| = 6$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D(7 \mid 8 \mid 0)$$

Die 4 Seiten des Vierecks sind gleich lang. Ein Quadrat liegt vor, falls gilt: $\vec{AB} \perp \vec{BC}$.

Falls noch kein Skalarprodukt zur Verfügung steht, kann der Nachweis dadurch erbracht werden, dass $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$ gezeigt wird:

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad |\vec{AC}| = \sqrt{72}$$

$$\vec{BD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad |\vec{BD}| = \sqrt{72}$$

