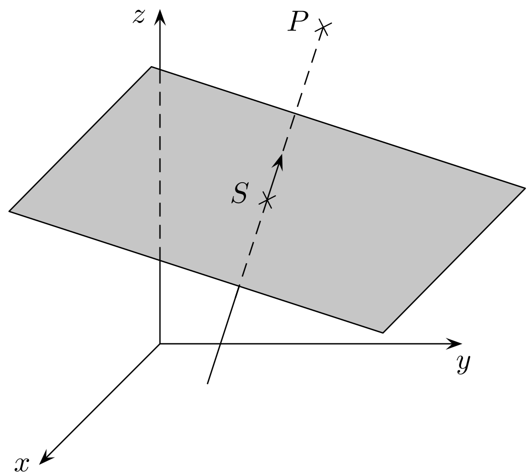
# Abstand Punkt/Ebene

1. Gegeben ist die Ebene $E$: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 50 = 0$

   Um den Abstand des Punktes $P(20\,|\,0\,|\,0)$ zu $E$ zu berechnen, gehen wir von der Hesseschen Normalenform der Ebenengleichung aus und bringen die Ebene zum Schnitt mit der Geraden $g$.

   $E$: $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 10 = 0 \qquad g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$




   $$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \right] - 10 \;=\; 0$$

   $$\begin{aligned} 12 + \lambda - 10 &= 0 \\ \lambda &= -2 \end{aligned}$$

   Das bedeutet:
   Das $(-2)$-fache des Einheitsvektors führt zum Schnittpunkt $S$, daher muss der Abstand 2 sein.
   Eine einfache Formel für den Abstand ist zu erkennen, wenn wir den obigen Ausdruck nur teilweise ausrechnen:

   $$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda - 10 = 0$$

   $$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 10 = -\lambda$$

   Vergleiche die linke Seite mit der linken Seite der Hesseschen Normalenform von $E$!

   allgemein:

   $$E: \quad \vec{n}^\circ\, \vec{x} - a \;=\; 0$$
   $$g: \quad \vec{x} \;= \overrightarrow{OP} + \lambda\, \vec{n}^\circ$$

   Schnitt:

   $$\begin{aligned} \vec{n}^\circ\, (\overrightarrow{OP} + \lambda\, \vec{n}^\circ) - a &= 0 \\ \vec{n}^\circ\, \overrightarrow{OP} + \lambda - a &= 0 \\ \vec{n}^\circ\, \overrightarrow{OP} - a &= -\lambda \\ |\; \vec{n}^\circ\, \overrightarrow{OP} - a \;| &= \lambda \end{aligned}$$

   *Merke:*
   *Um den Abstand eines Punktes $P$ von einer Ebene $E$ zu bestimmen, setzt man für $\vec{x}$ in die linke Seite der Hesseschen Normalenform den Vektor $\overrightarrow{OP}$ ein und nimmt den Betrag.*

2. Berechne den Abstand des Punktes von der Ebene:

   a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 27 = 0 \qquad P(2\,|\,-4\,|\,1)$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 9 = 0 \qquad P(5\,|\,1\,|\,12)$

# Abstand Punkt/Ebene

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 27 = 0 \qquad P(2 \,|\, -4 \,|\, 1)$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 9 = 0 \qquad P(5 \,|\, 1 \,|\, 12)$

*Ergebnisse: a) 1, b) 6*

# Abstand Punkt/Ebene alternative Begründung

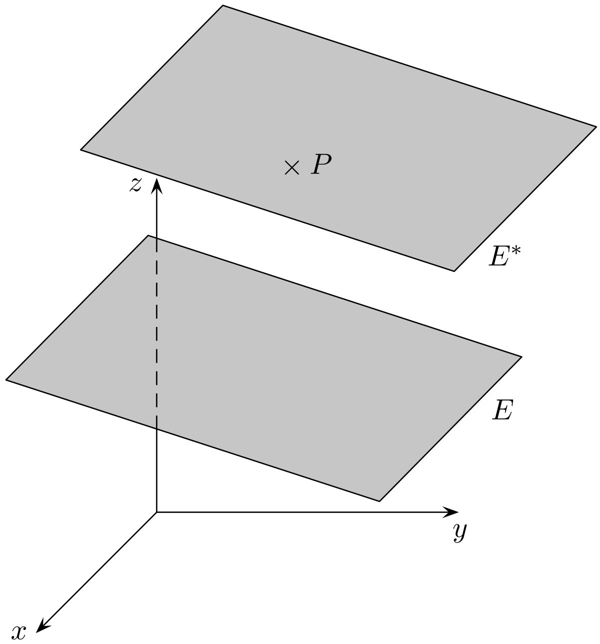
Eine zweite Begründung besteht darin, zu der Ebene

$E: \;\; \vec{n}^{\circ}\,\vec{x} - a \;=\; 0$

eine parallele Ebene $E^*$ durch $P$ und die Differenz der Abstände zum Ursprung zu betrachten.

$$\begin{array}{lrcl} E^*: & \vec{n}^{\circ}\,(\vec{x} - \overrightarrow{OP}) & = & 0 \\ E^*: & \vec{n}^{\circ}\,\vec{x} - \vec{n}^{\circ}\,\overrightarrow{OP} & = & 0 \\ & d(P,E) & = & |\,\vec{n}^{\circ}\,\overrightarrow{OP} - a\,| \end{array}$$

$\vec{n}^{\circ}\,\overrightarrow{OP} - a$ ist positiv, wenn $P$ und der Ursprung auf verschiedenen Seiten der Ebene $E$ liegen, negativ, wenn sie auf derselben Seite liegen.



# Abstand Punkt/Ebene alternative Begründung

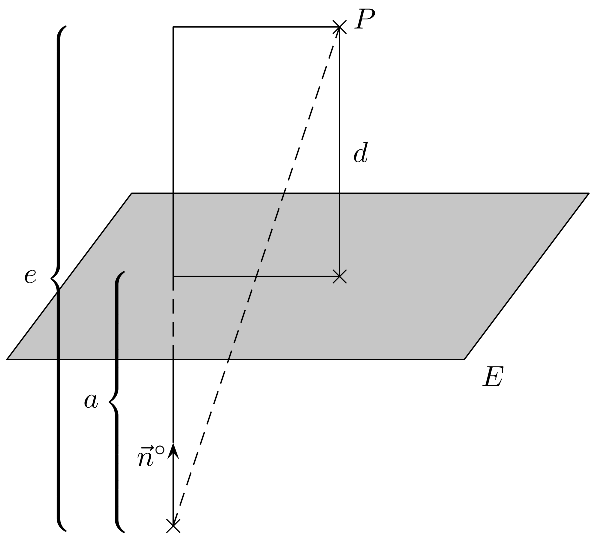
In der dritten Begründung wird eine Eigenschaft des Skalarprodukts ausgenutzt.

$E: \quad \vec{n}^\circ\, \vec{x} - a \,=\, 0$

$d = e - a$

$\vec{n}^\circ \cdot \overrightarrow{OP} = \ldots = e$

$\Longrightarrow \quad d(P, E) = \vec{n}^\circ\, \overrightarrow{OP} \,-\, a$




und allgemein

$d(P, E) = \mid \vec{n}^\circ\, \overrightarrow{OP} \,-\, a \mid$