Absorbierende Markow-Ketten Alternative

Ein Käfer krabbelt auf der Figur.
In den Endpunkten 1 und 2 wartet jeweils ein Vogel, der den Käfer verschlucken wird, die Zustände 1 und 2 heißen absorbierend. In den Punkten (Zuständen) 3, 4 und 5 wählt der Käfer die Richtung zum nächsten mit den Wahrscheinlichkeiten der Übergangsmatrix $\mathcal{M}$.

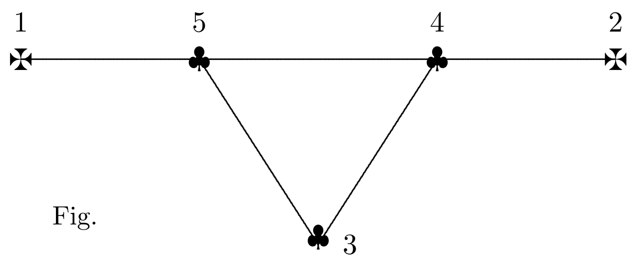
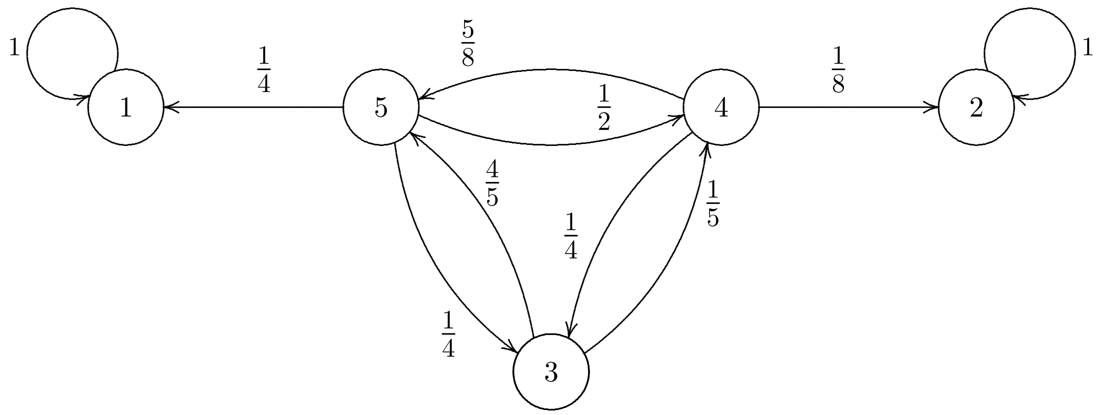


Fig.

		von				
		1	2	3	4	5
nach	1	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$
	2	0	1	0	$\frac{1}{8}$	0
	3	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	4	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{2}$
	5	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{8}$	0



Die absorbierenden Zustände bilden den Rand der Markow-Kette,
die übrigen werden als innere Zustände bezeichnet.

Man beachte, dass die Zustände so nummeriert sind, dass die nicht absorbierenden Zustände 3, 4, 5 den absorbierenden Zuständen 1 und 2 folgen. Die Übergangsmatrix $\mathcal{M}$ hat dann die Form:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{A} \\ \mathcal{O} & \mathcal{Q} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{E}$ ist die Einheitsmatrix, $\mathcal{O}$ die Nullmatrix,
$\mathcal{A}$ beinhaltet die Übergangswahrscheinlichkeiten von den inneren zu den absorbierenden Zuständen,
$\mathcal{Q}$ die Übergangswahrscheinlichkeiten von den inneren zu den inneren Zuständen.

Absorbierende Markow-Ketten

Es gilt: $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{A} \\ \mathcal{O} & \mathcal{Q} \end{pmatrix}$, $\mathcal{M}^2 = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{A}(\mathcal{E}+\mathcal{Q}) \\ \mathcal{O} & \mathcal{Q}^2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{M}^n = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{A}(\mathcal{E}+\mathcal{Q}+\mathcal{Q}^2) \\ \mathcal{O} & \mathcal{Q}^3 \end{pmatrix}$

Sei t_{ji} die mittlere Anzahl der Besuche in j vor der Absorption beim Start in i.

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} t_{33} & t_{34} & t_{35} \\ t_{43} & t_{44} & t_{45} \\ t_{53} & t_{54} & t_{55} \end{pmatrix}$$

Es ist:

$$\mathcal{T} = \mathcal{E} + \mathcal{Q} + \mathcal{Q}^2 + \mathcal{Q}^3 + \dots \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}^n = \mathcal{O}$$

Das Erste folgt aus einer Erwartungswert-Überlegung, das Zweite erscheint plausibel (siehe nächste Seite).
Für diese sogenannte Fundamentalmatrix $\mathcal{T}$ der absorbierenden Markow-Kette kann analog zur Herleitung der Summenformel für geometrische Reihen die Berechnungsformel

$$\mathcal{T} = (\mathcal{E} - \mathcal{Q})^{-1}$$

ermittelt werden.

Für das Beispiel gilt:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{49} \cdot \begin{pmatrix} 110 & 65 & 60 \\ 96 & 128 & 88 \\ 148 & 132 & 152 \end{pmatrix}$$

Die Spaltensumme der Verweilzeiten t_{ji} ergibt die Dauer (mittlere Anzahl der Schritte) bis zur Absorption beim Start in i, z. B.: $m_3 = t_{33} + t_{43} + t_{53} = 7{,}2$.

Aus dem Obigen folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{M}^n = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{A}\cdot\mathcal{T} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}$$

Für das Beispiel gilt:

$$\mathcal{A}\cdot\mathcal{T} = \begin{pmatrix} a_{13}^* & a_{14}^* & a_{15}^* \\ a_{23}^* & a_{24}^* & a_{25}^* \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \cdot \begin{pmatrix} 37 & 33 & 38 \\ 12 & 16 & 11 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}\cdot\mathcal{T}$ beinhaltet die Wahrscheinlichkeiten a_{ji}^* in j absorbiert zu werden beim Start in i.

Die Wahrscheinlichkeit in Zustand 1 beim Start in 3 absorbiert zu werden beträgt $a_{13}^* = 75{,}5\%$,
die Wahrscheinlichkeit in Zustand 2 beim Start in 3 absorbiert zu werden ist natürlich $1 - a_{13}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}^n = \mathcal{O} \qquad \text{oder:}$$

Jeder Käfer wird mit der Wahrscheinlichkeit 1 absorbiert.

$\mathcal{M}^n$ hat die Form:

$$\mathcal{M}^n \;=\; \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{B} \\ \mathcal{O} & \mathcal{Q}^n \end{pmatrix}$$

Sei von jedem inneren Zustand i der Rand mit der minimalen Schrittzahl m_i erreichbar (und dann auch für jede größere Schrittzahl).

Für das Maximum m der m_i gilt dann:
In jeder Spalte der Teilmatrix

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B} \\ \mathcal{Q}^m \end{pmatrix}$$

gibt es ein Element von $\mathcal{B}$, das ungleich Null ist. Die Spaltensummen von $\mathcal{Q}^m$ sind daher kleiner als 1.
Dies bedingt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{Q}^{mn}$ gegen die Nullmatrix konvergiert. Im Einzelnen:

Sei s das Maximum der Spaltensummen s_i der Matrix $\mathcal{Q}^m$.
Die maximale Spaltensumme von $\mathcal{Q}^{2m}$ ist dann kleiner als s^2:

$$\begin{array}{r|l}
 & \begin{pmatrix} \cdot & q_1 & \cdot \\ \cdot & q_2 & \cdot \\ \cdot & q_3 & \cdot \end{pmatrix} = \mathcal{Q}^m \\
\hline
\mathcal{Q}^m = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \mathcal{Q}^{2m} \\
 & \qquad\quad \blacksquare
\end{array}$$

Spaltensumme:

$$\begin{aligned}
\blacksquare \quad &= \quad q_1 \cdot s_1 + q_2 \cdot s_2 + q_3 \cdot s_3 \qquad \text{(umgeordnet)} \\
&\leq \quad q_1 \cdot s + q_2 \cdot s + q_3 \cdot s \\
&= \quad (q_1 + q_2 + q_3) \cdot s \\
&\leq \quad s^2
\end{aligned}$$

Zeige: Die maximale Spaltensumme von $\mathcal{Q}^{3m}$ ist kleiner als s^3.

In einer absorbierenden Markow-Kette wird ein Teilchen mit Wahrscheinlichkeit 1 (früher oder später) absorbiert.

Beweis

Sei von jedem inneren Zustand i der Rand in (möglichen) s_i Schritten (und dann auch mit jeder größeren Schrittzahl) erreichbar.
Ein Teilchen, dass in irgendeinem Zustand startet, kann in $s = \max\limits_i s_i$ Schritten absorbiert werden.
Daher ist die Wahrscheinlichkeit p, in s Schritten absorbiert zu werden, positiv. Für die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses, in s Schritten wieder einen inneren Zustand zu erreichen, gilt dann $1 - p < 1$. Für ns Schritte ist die Wahrscheinlichkeit, nicht absorbiert zu werden $(1 - p)^n$.
Für $n \to \infty$ strebt dies gegen null.