Absorbierende Markow-Ketten

Ein Käfer krabbelt auf der Figur. Er beginnt im Zustand 1 .
In den Endpunkten 4 und 5 wartet jeweils ein Vogel, der den Käfer verschlucken wird (Die Zustände 4 und 5 heißen absorbierend). In den Punkten (Zuständen) 1, 2 und 3 wählt der Käfer die Richtung zum nächsten mit den Wahrscheinlichkeiten der Übergangsmatrix $\mathcal{M}$.

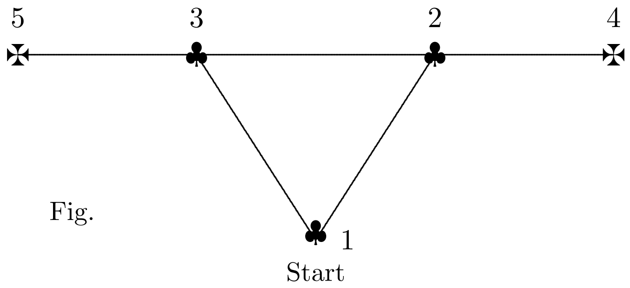
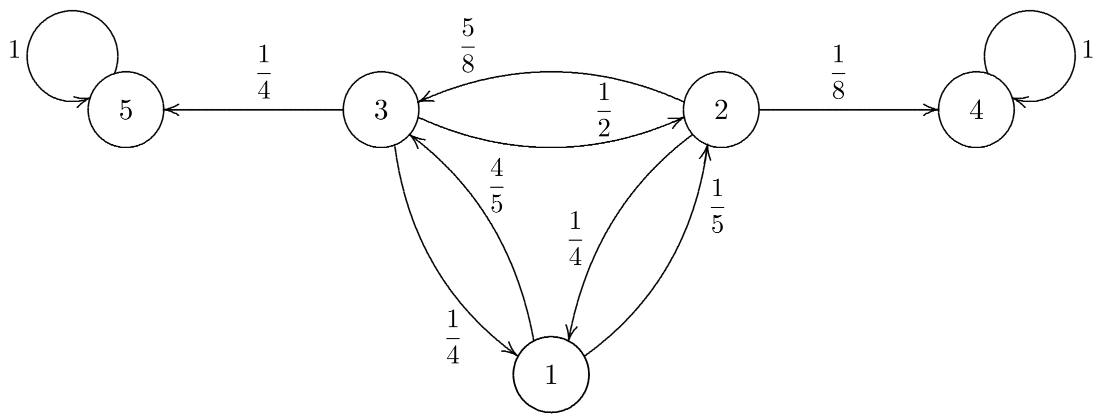


Fig.

		von				
		1	2	3	4	5
	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0
	2	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
nach	3	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{8}$	0	0	0
	4	0	$\frac{1}{8}$	0	1	0
	5	0	0	$\frac{1}{4}$	0	1



a) Berechne $\mathcal{M}^n$ für einige n und interpretiere das Ergebnis.

b) Wie lange dauert es im Mittel bis zur Absorption?

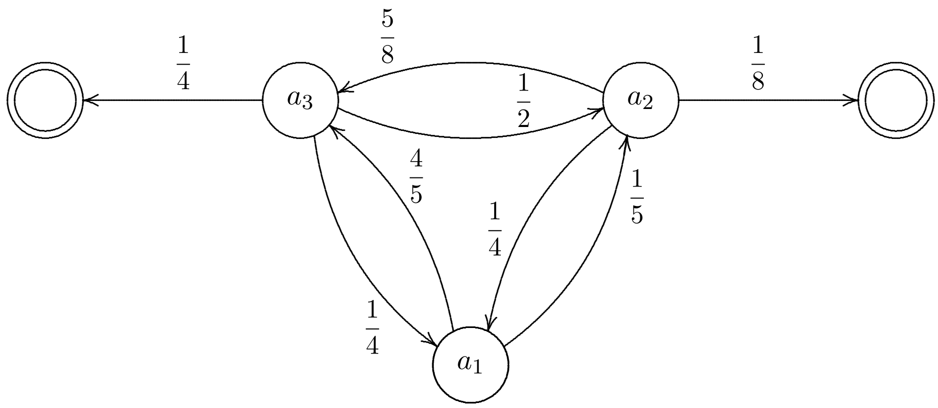
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erfolgt die Absorption in 4, mit welcher in 5?

Die absorbierenden Zustände bilden den Rand der Markow-Kette, die übrigen werden als innere Zustände bezeichnet.

a) Berechne $\mathcal{M}^n$ für mehrere n und interpretiere das Ergebnis.

Die Matrix-Potenzen geben den plausiblen Sachverhalt wieder, dass letztendlich eine Absorption erfolgt, d. h. die Wahrscheinlichkeiten für den Aufenthalt in einem inneren Zustand streben gegen null.
Für $n = 30$ ist z. B. $p_{1\,4}(30) = 0,24$ und $p_{1\,5}(30) = 0,74$.

b) Wie lange dauert es im Mittel bis zur Absorption?



Sei a_n die Schrittzahl (Anzahl der Kanten) bis zur Absorption beim Start in n, dann lassen sich die folgenden Beziehungen zwischen a_1, a_2 und a_3 aufstellen:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{5}\,(1+a_2) + \frac{4}{5}\,(1+a_3) \\
a_2 &= \frac{1}{4}\,(1+a_1) + \frac{5}{8}\,(1+a_3) + \frac{1}{8}\cdot 1 \\
a_3 &= \frac{1}{4}\,(1+a_1) + \frac{1}{2}\,(1+a_2) + \frac{1}{4}\cdot 1
\end{aligned}$$

Jede Zeile stellt die Berechnung eines Erwartungswerts dar.

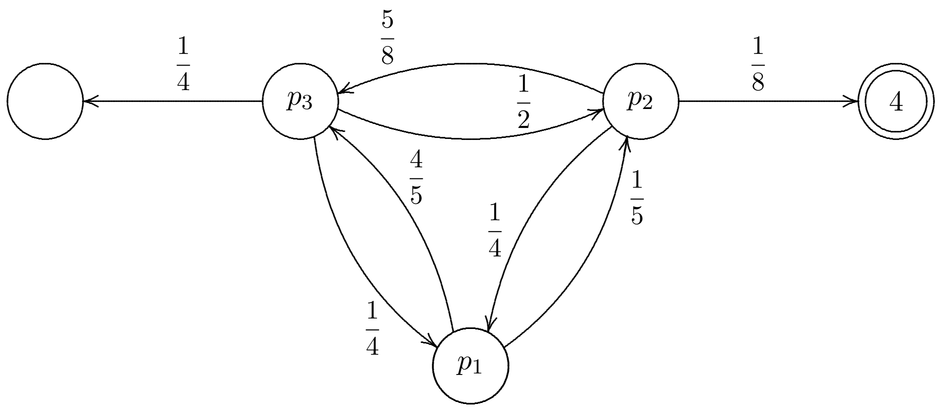
Die Gleichungen lassen sich stets vereinfachen:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 + \frac{1}{5}\,a_2 + \frac{4}{5}\,a_3 \\
a_2 &= 1 + \frac{1}{4}\,a_1 + \frac{5}{8}\,a_3 \\
a_3 &= 1 + \frac{1}{4}\,a_1 + \frac{1}{2}\,a_2
\end{aligned}$$

In dieser sogenannten Mittelwertsregel für die Dauer einer Markow-Kette werden die Erwartungswerte der inneren Nachbarn mit ihrer Wahrscheinlichkeit gewichtet und 1 addiert.

In diesem Fall ergibt sich die mittlere Dauer $a_1 = 7,2$.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erfolgt die Absorption in 4?



Sei p_n die Wahrscheinlichkeit, vom Zustand n zum Zustand 4 zu gelangen.
Dann lassen sich die folgenden Beziehungen zwischen p_1, p_2 und p_3 aufstellen:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{5}\,p_2 + \frac{4}{5}\,p_3 \\
p_2 &= \frac{1}{4}\,p_1 + \frac{5}{8}\,p_3 + \frac{1}{8} \\
p_3 &= \frac{1}{4}\,p_1 + \frac{1}{2}\,p_2
\end{aligned}
$$

Jede Gleichung ergibt sich als Anwendung der Pfadregel, wobei zu beachten ist, dass nur Pfade berücksichtigt werden, die zum Zustand 4 führen.

In dieser Mittelwertsregel für Wahrscheinlichkeiten, von einem inneren Zustand zu einem absorbierenden zu gelangen, werden die Wahrscheinlichkeiten p_n der inneren Nachbarn gewichtet. Ist der absorbierenden Zustand Nachbar, wird auch die zugehörige Übergangswahrscheinlichkeit addiert.

In diesem Fall ergibt sich $p_1 = 24,4\%$.
Die Wahrscheinlichkeit in Zustand 5 absorbiert zu werden ist natürlich $1 - p_1$.