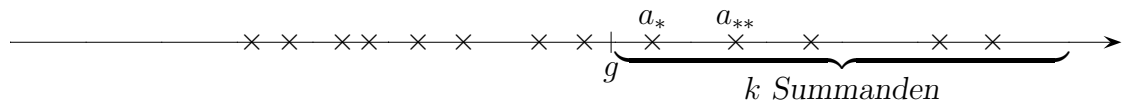


# Tschebyschew'sche Ungleichung $P(|X - E(X)| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$

Sie schätzt grob die Wahrscheinlichkeit ab, mit der das Ergebnis eines Zufallsversuchs um mehr als eine vorgegebene Zahl  $\alpha$  vom Erwartungswert  $\mu = E(X)$  abweicht.

Die Begründung der Ungleichung beruht auf einer simplen Abschätzung der Summe einer Reihe mit positiven Summanden:  $s = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ .



Wenn für eine beliebig vorgegebene Zahl  $g$  insgesamt  $k$  Summanden größer oder gleich  $g$  sind, dann gilt:  $k \cdot g \leq s$ .

Hierbei fallen die Summanden kleiner als  $g$  unter den Tisch, die größeren werden nach unten grob durch  $g$  abgeschätzt.

Sei nun 
$$\underbrace{(X(\omega_1) - \mu)^2 \cdot p_1}_{a_1} + \underbrace{(X(\omega_2) - \mu)^2 \cdot p_2}_{a_2} + \dots + \underbrace{(X(\omega_n) - \mu)^2 \cdot p_n}_{a_n} = V(X)$$

oder kürzer: 
$$a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + \dots + a_n \cdot p_n = V(X)$$

Wir lassen zunächst alle Summanden weg, für die  $a_i$  kleiner als  $g$  ist, dann gilt:

$$\underbrace{a_* \cdot p_* + a_{**} \cdot p_{**} + \dots}_{\text{alle Summanden mit } a_i \geq g} \leq V(X)$$

$$\implies g \cdot p_* + g \cdot p_{**} + \dots \leq V(X)$$

$$\implies g \underbrace{(p_* + p_{**} + \dots)}_{\text{Wahrscheinlichkeit für die } a_i \geq g \text{ ist, d.h.}} \leq V(X)$$

$$\implies P((X(\omega) - \mu)^2 \geq g) \leq \frac{V(X)}{g}$$

Die Schreibweise kann noch vereinfacht werden, falls  $g = \alpha^2$  gesetzt wird:

$$(X(\omega) - \mu)^2 \geq \alpha^2$$

$$\iff |X(\omega) - \mu| \geq \alpha$$

Insgesamt erhalten wir: 
$$P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

# Gesetz der großen Zahlen

Jakob Bernoulli (1654-1705)

Die äquivalente unmittelbar einsichtige Formulierung der Tschebyschew-Ungleichung

$$P(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

für das Gegenereignis lautet:

$$P(|X - \mu| < \alpha) \geq 1 - \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

The diagram illustrates the decomposition of the complement probability  $P(\bar{E})$ . A horizontal line represents the total probability  $P(\bar{E})$ . A vertical tick mark on this line is labeled with a multiplication sign  $\times$ . To the left of this tick mark, a bracket is labeled  $P(E)$ . To the right of the tick mark, the line is divided into two segments. The first segment is labeled  $\frac{V(X)}{\alpha^2}$  and the second segment is labeled  $1 - \frac{V(X)}{\alpha^2}$ . Brackets above the line indicate that the sum of these two segments equals  $P(\bar{E})$ .

Für eine Binomialverteilung ( $\mu = n \cdot p$ ,  $V(X) = n \cdot p \cdot q$ ) mit  $\alpha = n \cdot \varepsilon$  ergibt das:

$$P(|X - n \cdot p| < n \cdot \varepsilon) \geq 1 - \frac{n \cdot p \cdot q}{(n \cdot \varepsilon)^2}$$

oder

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p \cdot q}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Diese Ungleichung belegt mathematisch exakt das intuitiv Angenommene:

Die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit nur um einen beliebig kleinen Wert  $\varepsilon$  von der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit  $p$  abweicht, strebt mit wachsendem Stichprobenumfang  $n$  gegen 1.

Das ist der Inhalt des Gesetzes der großen Zahlen, das Jakob Bernoulli um 1685 gefunden hat. Tschebyschew lebte von 1821 bis 1894.

## Tschebyschew'sche Ungleichung und Binomialverteilung

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Falls eine Binomialverteilung mit  $\mu = E(X) = np$  und  $V(X) = npq$  vorliegt, geht die Ungleichung über in:

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \frac{a}{n}\right) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq b\right) \leq \frac{V(X)}{(n \cdot b)^2}$$

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq b\right) \leq \frac{npq}{(n \cdot b)^2} = \frac{pq}{n \cdot b^2} \leq \frac{1}{4nb^2} \quad \text{beachte: } p(1-p) \leq \frac{1}{4}$$

und damit

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < b\right) \geq 1 - \frac{pq}{n \cdot b^2} \geq 1 - \frac{1}{4nb^2}$$