

## Stochastik Hotelbetten-Aufgabe

1. Bettbestellungen anlässlich von Kongressen werden mit der Wahrscheinlichkeit von 15% storniert. Ein Hotel stellt 55 Betten zur Verfügung und nimmt 60 Reservierungen an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit riskiert die Hotelleitung in Verlegenheit zu geraten?
2. Die Hotelleitung nimmt 50 Bettreservierungen an. Die Wahrscheinlichkeit für eine Absage beträgt 15%. Wie viele Betten müssen bereitgehalten werden, wenn das Risiko, dass die Bettenanzahl nicht ausreicht, unter 5% bleiben soll?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 80 Bettreservierungen und einer vermuteten Stornierungsquote von 10% die tatsächliche Belegungszahl zwischen 68 und 76 liegt (Grenzen eingeschlossen)?  
Wie lautet das Ergebnis bei Verwendung der Normalverteilung (beachte, dass die Laplace-Bedingung  $\sigma > 3$  nicht erfüllt ist)?

## Auto-Aufgabe

Um den Anteil  $p$  der Fahrer festzustellen, die mit überhöhter Geschwindigkeit an einer Baustelle vorbeifahren, werden von zufällig ausgewählten Fahrzeugen die Geschwindigkeit gemessen.

1. Bestimme in Abhängigkeit von  $p$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Stichprobe von 40 Autos
  - a) genau 10 Autos,
  - b) genau die ersten 10 Autos,
  - c) die ersten 20 nicht, dann aber doch noch 10 Autos zu schnell fahren?
2. Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit  $p$  mindestens sein, damit in einer Stichprobe von 30 Autos mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% wenigstens eines zu finden ist, das zu schnell fährt?
3. Der Anteil der zu schnell fahrenden Autos beträgt  $p = 0,20$ . Anhand einer Stichprobe der Länge  $n = 100$  soll nachgewiesen werden (5%-Signifikanzniveau), dass Umbaumaßnahmen zu einer Senkung der Geschwindigkeitsübertretungen geführt haben. Wie lautet die Entscheidungsregel?

Wie groß ist der Fehler 2. Art, falls der Anteil der zu schnell fahrenden Autos auf  $p = 0,12$  gesenkt werden konnte? Was besagt dieser Fehler?

## Hotelbetten-Aufgabe Lösungshinweise

1. Bettbestellungen anlässlich von Kongressen werden mit der Wahrscheinlichkeit von 15% storniert. Ein Hotel stellt 55 Betten zur Verfügung und nimmt 60 Reservierungen an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit riskiert die Hotelleitung in Verlegenheit zu geraten?

$$P_{0,85}^{60}(X \geq 56) = 4,2\%$$

2. Die Hotelleitung nimmt 50 Bettreservierungen an. Die Wahrscheinlichkeit für eine Absage beträgt 15%. Wie viele Betten müssen bereitgehalten werden, wenn das Risiko, dass die Bettenanzahl nicht ausreicht, unter 5% bleiben soll?

$$P_{0,85}^{50}(X \geq 47) = 4,6\% \quad \text{mindestens 46 Betten}$$

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 80 Bettreservierungen und einer vermuteten Stornierungsquote von 10% die tatsächliche Belegungszahl zwischen 68 und 76 liegt (Grenzen eingeschlossen)?

Wie lautet das Ergebnis bei Verwendung der Normalverteilung (beachte, dass die Laplace-Bedingung  $\sigma > 3$  nicht erfüllt ist)?

$$P_{0,9}^{80}(68 \leq X \leq 76) = 91,1\% \\ \text{Normalverteilung: } 90,6\%$$

## Auto-Aufgabe Lösungshinweise

Um den Anteil  $p$  der Fahrer festzustellen, die mit überhöhter Geschwindigkeit an einer Baustelle vorbeifahren, werden von zufällig ausgewählten Fahrzeugen die Geschwindigkeit gemessen.

1. Bestimme in Abhängigkeit von  $p$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Stichprobe von 40 Autos
- genau 10 Autos,
  - genau die ersten 10 Autos,
  - die ersten 20 nicht, dann aber doch noch 10 Autos zu schnell fahren?

$$P_p^{40}(X = 10) = \binom{40}{10} p^{10} \cdot (1-p)^{30} \\ p^{10} \cdot (1-p)^{30}$$

$$(1-p)^{20} \cdot \binom{20}{10} p^{10} \cdot (1-p)^{10} = \binom{20}{10} p^{10} \cdot (1-p)^{30}$$

2. Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit  $p$  mindestens sein, damit in einer Stichprobe von 30 Autos mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% wenigstens eines zu finden ist, das zu schnell fährt?

$$1 - (1-p)^{30} \geq 0,95 \implies p \geq 9,5\%$$

3. Der Anteil der zu schnell fahrenden Autos beträgt  $p = 0,20$ . Anhand einer Stichprobe der Länge  $n = 100$  soll nachgewiesen werden (5%-Signifikanzniveau), dass Umbaumaßnahmen zu einer Senkung der Geschwindigkeitsübertretungen geführt haben. Wie lautet die Entscheidungsregel?

Wie groß ist der Fehler 2. Art, falls der Anteil der zu schnell fahrenden Autos auf  $p = 0,12$  gesenkt werden konnte? Was besagt dieser Fehler?

$$P_{0,2}^{100}(X \leq k) \leq 0,05 \implies \bar{A} = \{0, \dots, 13\} \\ \text{(Ablehnungsbereich für die Nullhypothese } H_0: p \geq 20\%)$$

$$\beta = P_{0,12}^{100}(X \geq 14) = 31,1\%$$

## Flugbuchungen-Aufgabe

Auf einer bestimmten Strecke verwendet eine Fluggesellschaft Flugzeuge mit 100 Plätzen. Die Belegungsstatistik weist aus, dass die Flüge auf dieser Strecke vorab stets ausgebucht sind. Allerdings werden dann im Mittel 10% der gebuchten Plätze kurzfristig storniert.

Für die Fluggesellschaft ist die Anzahl der Passagiere von Interesse, die bei Schließung der Passagierliste den Flug tatsächlich antreten wollen.

- a) Unter welchen Annahmen sind die möglichen Anzahlen dieser Passagiere binomialverteilt?  
Nennen Sie Fälle, in denen diese Annahmen nicht zutreffen.

Im Folgenden wird angenommen, dass die möglichen Anzahlen dieser Passagiere binomialverteilt sind. Durch eine Person, die tatsächlich fliegt, nimmt die Fluggesellschaft 200€ ein, bei einer Stornierung nur 100€.

- b) Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass beim nächsten Flug
- genau 84 Plätze,
  - höchstens 84 Plätze,
  - mindestens 90 Plätze
- tatsächlich genutzt werden?  
Welche Einnahmen kann die Fluggesellschaft pro Flug erwarten?

Um die Flugzeuge besser auszulasten, bietet die Fluggesellschaft stets 8% mehr Plätze als verfügbar zum Verkauf an. Da auch diese Plätze alle im Voraus gebucht werden, geht die Fluggesellschaft damit das Risiko einer Überbuchung ein.

- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zu Überbuchungen kommt?
- d) Für jeden Fluggast, der wegen Überbuchung abgewiesen werden muss, entstehen der Fluggesellschaft negative Einnahmen (Unkosten) in Höhe von 1000€. Wie groß sind die Einnahmen der Fluggesellschaft, wenn bei Schließung der Passagierliste genau 105 Personen den Flug antreten möchten?

## Flugbuchungen-Aufgabe Lösungshinweise

Auf einer bestimmten Strecke verwendet eine Fluggesellschaft Flugzeuge mit 100 Plätzen. Die Belegungsstatistik weist aus, dass die Flüge auf dieser Strecke vorab stets ausgebucht sind. Allerdings werden dann im Mittel 10% der gebuchten Plätze kurzfristig storniert.

Für die Fluggesellschaft ist die Anzahl der Passagiere von Interesse, die bei Schließung der Passagierliste den Flug tatsächlich antreten wollen.

- a) Unter welchen Annahmen sind die möglichen Anzahlen dieser Passagiere binomialverteilt?

Nennen Sie Fälle, in denen diese Annahmen nicht zutreffen.

unterschiedliches Verhalten von Kundengruppen, . . .

Im Folgenden wird angenommen, dass die möglichen Anzahlen dieser Passagiere binomialverteilt sind. Durch eine Person, die tatsächlich fliegt, nimmt die Fluggesellschaft 200€ ein, bei einer Stornierung nur 100€.

- b) Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass beim nächsten Flug

- genau 84 Plätze, 1,9%

- höchstens 84 Plätze, 4,0%

- mindestens 90 Plätze 58,3%

tatsächlich genutzt werden?

Welche Einnahmen kann die Fluggesellschaft pro Flug erwarten? 19000€

Um die Flugzeuge besser auszulasten, bietet die Fluggesellschaft stets 8% mehr Plätze als verfügbar zum Verkauf an. Da auch diese Plätze alle im Voraus gebucht werden, geht die Fluggesellschaft damit das Risiko einer Überbuchung ein.

- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zu Überbuchungen kommt?  $P_{0,9}^{108}(X \geq 101) = 14,3\%$

- d) Für jeden Fluggast, der wegen Überbuchung abgewiesen werden muss, entstehen der Fluggesellschaft negative Einnahmen (Unkosten) in Höhe von 1000€. Wie groß sind die Einnahmen der Fluggesellschaft, wenn bei Schließung der Passagierliste genau 105 Personen den Flug antreten möchten?

in €:  $100 \cdot 200 + 3 \cdot 100 - 5 \cdot 1000 = 15300$

## Telefondauer-Aufgabe

Die Längen von Telefongesprächen lassen sich als Funktionswerte einer Zufallsvariablen  $X$  auffassen.  $X$  soll so festgelegt sein, dass 5 Minuten als eine Zeiteinheit dient. Die Dichtefunktion wird durch die Funktion  $d(x) = 4x \cdot e^{-2x}$ ,  $x \geq 0$ , approximiert.

- Zeigen Sie, dass  $d(x)$  den Bedingungen einer Dichtefunktion genügt. Bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion  $D(x)$ .
- Wie viel Prozent aller Gespräche sind länger bzw. kürzer als  $\mu$  (Erwartungswert) Zeiteinheiten? Berechnen Sie, wie viel Prozent aller Gespräche in den Intervallen  $[\mu - \sigma; \mu]$  und  $[\mu; \mu + \sigma]$  liegen, wobei  $\sigma$  die Standardabweichung ist.
- Berechnen Sie die Stelle  $x_M$ , an der  $d(x)$  ein Maximum besitzt. Vergleichen Sie  $x_M$  und  $\mu$  und begründen Sie den Unterschied.

Hinweis:

$$\int x^2 \cdot e^{-2x} dx = -\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) \cdot e^{-2x} + C$$

## Körpergrößen-Aufgabe

Aufgrund von umfangreichen Stichproben weiß man, dass bei 18- bis 20-jährigen Frauen 9,8 % höchstens 159,6 cm und 9,8 % mindestens 176,4 cm sind. Die Körpergröße kann als normalverteilt angesehen werden.

Wie viel Prozent sind

- mindestens 180 cm,
- höchstens 160 cm,
- mindestens 163 cm, höchstens 173 cm groß?

Ergebnisse:

$\mu = 168$ , beachte die Symmetrie der Normalverteilung

$$P(X \leq 159,6) = \Phi\left(\frac{159,6 - \mu}{\sigma}\right) = 9,8 \% \implies \dots$$

$$\sigma = 6,5$$

- $P(X \geq 180) = 3,2 \%$
- $P(X \leq 160) = 10,9 \%$
- $P(163 \leq X \leq 173) = 55,8 \%$

Im Gegensatz zur Binomialverteilung ist es bei der Normalverteilung nicht erforderlich, zwischen  $<$  und  $\leq$  zu unterscheiden.

Werden die Körpergrößen auf cm gerundet angegeben, so ist z. B. mit 170 cm das Intervall  $[169,5; 170,5[$  gemeint, wobei die linke Klammer eingeschlossen und die rechte Klammer ausgeschlossen bedeutet.

## Mini-Van-Aufgabe      EPA, geändert

Der Automobilkonzern PSW stellt einen neuen Mini-Van her, der sich u. a. durch geringen Verbrauch auszeichnen soll. Bei 100 Testfahrzeugen mit einem 20-Liter-Tank wurde die Anzahl  $N$  für den Aktionsradius  $X$  (in  $km$ ) gemessen und in der folgenden Tabelle festgehalten:

$X$	(420; 440]	(440; 460]	(460; 480]	(480; 500]	(500; 520]	(520; 540]	(540; 560]	(560; 580]	(580; 600]
$N$	2	10	14	25	21	16	8	3	1

- a) Erläutern Sie, dass die Zufallsgröße  $X$  näherungsweise als normalverteilt angenommen werden kann und bestimmen Sie Näherungswerte für den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße  $X$ .
- b) Ermitteln Sie damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Testfahrzeug einen Aktionsradius von höchstens 460  $km$  hat und vergleichen Sie das Ergebnis mit den empirischen Werten.
- c) Welchen Abstand dürfen zwei Tankstellen  $T_1$  und  $T_2$  höchstens voneinander haben, wenn man mit der Wahrscheinlichkeit von 0,95 mit einer Tankfüllung von  $T_1$  nach  $T_2$  kommen will?
- d) Der Mini-Van soll als neues Spar-Auto mit entsprechend kleinem 20-Liter-Tank in der Presse vorgestellt werden. Die Werbeabteilung schlägt vor, den Durchschnittsverbrauch mit 3,9 Litern pro 100  $km$  anzugeben. Die Techniker dagegen schlagen vor, den Verbrauch besser mit 4,2 Litern pro 100  $km$  anzugeben. Welche Gründe könnten zu diesen unterschiedlichen Empfehlungen geführt haben? Beurteilen Sie beide Vorschläge quantitativ.

## Mini-Van-Aufgabe      EPA, geändert

Der Automobilkonzern PSW stellt einen neuen Mini-Van her, der sich u. a. durch geringen Verbrauch auszeichnen soll. Bei 100 Testfahrzeugen mit einem 20-Liter-Tank wurde die Anzahl  $N$  für den Aktionsradius  $X$  (in  $km$ ) gemessen und in der folgenden Tabelle festgehalten:

$X$		(420; 440]		(440; 460]		(460; 480]		(480; 500]		(500; 520]		(520; 540]		(540; 560]		(560; 580]		(580; 600]
$N$		2		10		14		25		21		16		8		3		1

- a) Erläutern Sie, dass die Zufallsgröße  $X$  näherungsweise als normalverteilt angenommen werden kann und bestimmen Sie Näherungswerte für den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße  $X$ .
- b) Ermitteln Sie damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Testfahrzeug einen Aktionsradius von höchstens 460  $km$  hat und vergleichen Sie das Ergebnis mit den empirischen Werten.
- c) Welchen Abstand dürfen zwei Tankstellen  $T_1$  und  $T_2$  höchstens voneinander haben, wenn man mit der Wahrscheinlichkeit von 0,95 mit einer Tankfüllung von  $T_1$  nach  $T_2$  kommen will?
- d) Der Mini-Van soll als neues Spar-Auto mit entsprechend kleinem 20-Liter-Tank in der Presse vorgestellt werden. Die Werbeabteilung schlägt vor, den Durchschnittsverbrauch mit 3,9 Litern pro 100  $km$  anzugeben. Die Techniker dagegen schlagen vor, den Verbrauch besser mit 4,2 Litern pro 100  $km$  anzugeben. Welche Gründe könnten zu diesen unterschiedlichen Empfehlungen geführt haben? Beurteilen Sie beide Vorschläge quantitativ.

Ergebnisse:

- a)  $E(X) = 500,8$   
 $\sigma_X = 33,0$
- b) 10,8%
- c) 446,5  $km$
- d) Mit 3,9 Litern (höchstens) pro 100  $km$  beträgt der durchschnittliche Aktionsradius (mindestens) 512,8  $km$  ( $E(X) = 500,8$ ).  
 $P(X \geq 512,8) = 35,8\%$   
 35,8% der Testfahrzeuge können dies also erfüllen.  
 Mit 4,2 Litern pro 100  $km$  beträgt der durchschnittliche Aktionsradius 476,2  $km$ .  
 $P(X \geq 476,2) = 77,2\%$   
 Nun sind es 77,2% der Testfahrzeuge, die dies erfüllen können.

Oder:

Der durchschnittliche Verbrauch  $Y$  beträgt 4,0 Liter pro 100  $km$ ,  $\sigma_Y = 0,26$ .  
 $P(Y \leq 3,9) = 35,0\%$   
 $P(Y \leq 4,2) = 77,9\%$

# Daten analysieren

In einer Stichprobe wurden die Körpergrößen von 100 Personen ermittelt.  
Bestimmen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung.

<i>Klassenmitte (cm)</i>	162	164,5	167	169,5	172	174,5	177	179,5	182	184,5	187
<i>absolute Häufigkeit</i>	1	2	5	8	16	17	14	19	8	4	6

Gehen Sie von einer Normalverteilung aus und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit,  
dass eine zufällig ausgewählte Person nicht größer als 171 cm ist.

Ergebnisse

$$\mu = 176,1$$

$$\sigma = 5,5$$

$$P(X \leq 171) = 17,7\%$$

## Betriebszeitung

In einem Betrieb mit 1200 Angestellten wird eine Betriebszeitung herausgegeben. Im Durchschnitt wird diese von 75% der Belegschaft gekauft.

- a) Es stehen von jeder Auflage 920 Exemplare zum Verkauf bereit.  
Mit welcher Wahrscheinlichkeit
- 1) kann die Nachfrage gedeckt werden,
  - 2) reicht diese Anzahl bei allen 3 Ausgaben eines Jahrgangs aus?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der verkauften Exemplare um höchstens 15 vom Erwartungswert abweicht?
- c) Bei der Herstellung der Zeitung treten bei 7% der Zeitungen Fehler auf, sodass sie nicht verkauft werden können. Wie viele Zeitungen müssen mindestens hergestellt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% wenigstens 920 Exemplare zum Verkauf stehen?

a) 1)  $P_{0,75}^{1200}(X \leq 920) = 91,5\%$

2)  $0,915^3 = 76,6\%$

b)  $P_{0,75}^{1200}(885 \leq X \leq 915) = 69,9\%$

c)  $P_{0,93}^n(Y \geq 920) > 95\%$

$$\mu = 0,93 \cdot n, \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}, \quad \Phi\left(\frac{919 - \mu}{\sigma}\right) < 0,05 \quad \implies \quad n \geq 1003$$

GTR: Solver  $0 = 1 - \text{normalcdf}(0, 919,5, 0,93X, \sqrt{X \cdot 0,93 \cdot 0,07}) - 0,95$

# BSE

- a) Seit dem 1.10.2000 darf in Würsten kein Risikomaterial (unter anderem Gehirn, Rückenmark) mehr verarbeitet werden. Tests haben ergeben, dass jedoch in 4% aller Würste Risikomaterial enthalten ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 50 zufällig ausgesuchten Würsten
- i) mindestens drei und höchstens sechs Würste mit Risikomaterial enthalten sind?
  - ii) die ersten 20 Würste ohne Risikomaterial sind und in den restlichen Würsten sich mehr als 3 mit Risikomaterial befinden?
- b) Bei einem Schnelltest werden 95% der BSE-Kühe (also an BSE erkrankte Kühe) als solche erkannt. Der Test arbeitet jedoch fehlerhaft und stuft irrtümlich 2% der Nicht-BSE-Kühe als BSE-Kühe ein.
- (1) In Deutschland geht man davon aus, dass  $p = 0,02\%$  (!) aller Kühe an BSE erkrankt sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Kuh wirklich an BSE erkrankt ist, wenn sie vom Test als BSE-Kuh eingestuft wird?  
Stellen Sie diese Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von  $p$  grafisch dar und interpretieren Sie den Graphen im Sachzusammenhang.
  - (2) Ein Mediziner behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kuh wirklich an BSE erkrankt ist, wenn der Test sie als BSE-Kuh eingestuft hat, 50% beträgt. Ermitteln Sie den Anteil an BSE-Kühen in Deutschland, der diesem Ergebnis zugrunde liegen müsste.  
(Probieren ist hier nicht erlaubt.)
  - (3) Der Anteil der BSE-Kühe in England soll durch eine Stichprobe vom Umfang 15000 ermittelt werden. In der Stichprobe sind 30 BSE-Kühe. Welche Aussagen hinsichtlich der Wahrscheinlichkeit unter (1) (*Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Kuh wirklich an BSE erkrankt ist, wenn sie vom Test als BSE-Kuh eingestuft wird?*) sind nun mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% möglich?

## BSE Ergebnisse

a) Seit dem 1.10.2000 darf in Würsten kein Risikomaterial (unter anderem Gehirn, Rückenmark) mehr verarbeitet werden. Tests haben ergeben, dass jedoch in 4% aller Würste Risikomaterial enthalten ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 50 zufällig ausgesuchten Würsten

i) mindestens drei und höchstens sechs Würste mit Risikomaterial enthalten sind?

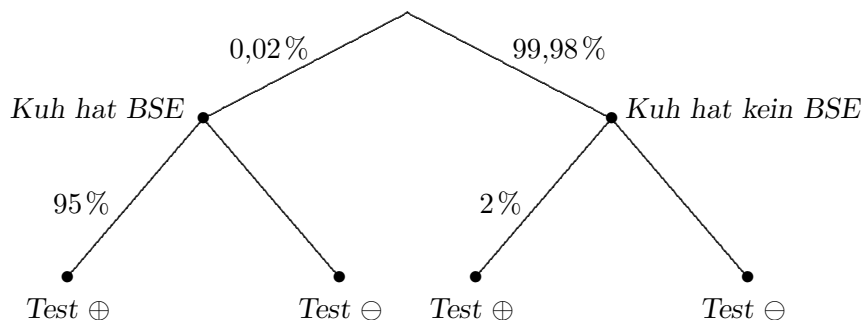
$$P(3 \leq X \leq 6) = \text{bincdf}(50, 0.04, 6) - \text{bincdf}(50, 0.04, 2) = 32,0\%$$

ii) die ersten 20 Würste ohne Risikomaterial sind und in den restlichen Würsten sich mehr als 3 mit Risikomaterial befinden?

$$P = 0,96^{20} \cdot (1 - \text{bincdf}(30, 0.04, 3)) = 1,4\%$$

b) Bei einem Schnelltest werden 95% der BSE-Kühe (also an BSE erkrankte Kühe) als solche erkannt. Der Test arbeitet jedoch fehlerhaft und stuft irrtümlich 2% der Nicht-BSE-Kühe als BSE-Kühe ein.

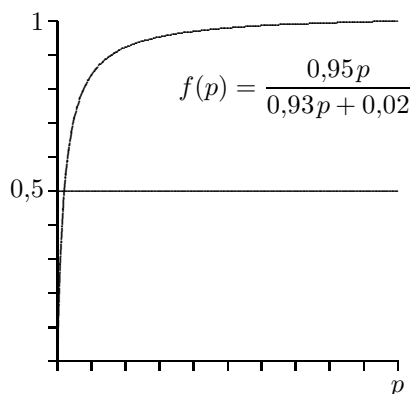
(1) In Deutschland geht man davon aus, dass  $p = 0,02\%$  (!) aller Kühe an BSE erkrankt sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Kuh wirklich an BSE erkrankt ist, wenn sie vom Test als BSE-Kuh eingestuft wird?



$$P(\text{Kuh hat BSE} \mid \text{Test } \oplus) = \frac{95\% \cdot 0,02\%}{95\% \cdot 0,02\% + 2\% \cdot 99,98\%} = 0,941\%$$

Stellen Sie diese Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von  $p$  grafisch dar und interpretieren Sie den Graphen im Sachzusammenhang.

$$f(p) = \frac{0,95p}{0,95p + (1-p) \cdot 0,02}$$



(2) Ein Mediziner behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kuh wirklich an BSE erkrankt ist, wenn der Test sie als BSE-Kuh eingestuft hat, 50% beträgt. Ermitteln Sie den Anteil an BSE-Kühen in Deutschland, der diesem Ergebnis zugrunde liegen müsste. (Probieren ist hier nicht erlaubt.)

$$f(p) = 0,5 \implies p = 2,1\%$$

- (3) Der Anteil der BSE-Kühe in England soll durch eine Stichprobe vom Umfang 15000 ermittelt werden. In der Stichprobe sind 30 BSE-Kühe. Welche Aussagen hinsichtlich der Wahrscheinlichkeit unter (1) (*Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Kuh wirklich an BSE erkrankt ist, wenn sie vom Test als BSE-Kuh eingestuft wird?*) sind nun mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % möglich?

Konfidenzintervall  $[0,0013; 0,0027]$ ,  $[0,058; 0,114]$

In der Rinderpopulation eines Landes tragen 4% der Rinder den Erreger der Seuche B in sich, diese werden im Folgenden als B-Rinder bezeichnet. Alle anderen Rinder werden im Folgenden als gesund bezeichnet. Äußerlich sind B-Rinder nicht von gesunden Rindern zu unterscheiden. Man kann von einem gleichmäßigen Durchseuchungsgrad innerhalb des Landes ausgehen. In Instituten kann durch Untersuchung der Zellflüssigkeit der B-Erreger zweifelsfrei nachgewiesen werden.

1. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 100 Rindern mindestens zwei und weniger als sechs B-Rinder?  
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 1000 Rindern mehr als 30 und weniger als 50 B-Rinder?  
c) Wie viele Rinder müssen in einem Institut mindestens untersucht werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% wenigstens ein B-Rind entdeckt wird?
2. Ein Institut untersucht 3000 Rinder. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mindestens 100 dieser Rinder B-Rinder? Rechnen Sie mit der Normalverteilung als Näherung.
3. Die Rinderseuche wurde auch in ein Nachbarland eingeschleppt. Noch ist unbekannt, wie groß der Anteil  $p'$  der B-Rinder in dieser Rinderpopulation ist. Für eine groß angelegte Reihenuntersuchung mehrerer tausend Rinder zur Bestimmung von  $p'$  muss man sich zwischen zwei Methoden entscheiden. Es werden jeweils Gruppen von 20 Rindern untersucht; dabei wird zunächst jedem Rind Zellflüssigkeit entnommen.  
Methode I: Es wird Zellflüssigkeit aller 20 Rinder vermischt und das Gemisch untersucht. Wird kein Hinweis auf B festgestellt, so sind keine weiteren Untersuchungen notwendig. Stellt man im Gemisch den Erreger der B-Seuche fest, werden die 20 Zellflüssigkeiten noch einzeln untersucht.  
Methode II: Die 20 Proben von Zellflüssigkeit werden von vornherein einzeln untersucht. Für welche Werte von  $p'$  sind bei Methode I weniger Zellflüssigkeitsuntersuchungen zu erwarten als bei Methode II?
4. Ein von einem Tierarzt durchzuführender, einfacher Schnelltest erkennt 95% der B-Rinder als solche. Irrtümlicherweise stuft dieser Schnelltest von den gesunden Rindern 15% als B-Rinder ein. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Durchseuchungsgrad von 4% ein durch den Schnelltest für gesund erklärtes Rind auch wirklich gesund ist.

Um den Bahnverkehr zu beschleunigen, werden von einem Bahnunternehmen neue Züge eingesetzt. Auf einer Strecke verkehren in einer Richtung täglich 9 Züge des alten Typs A und 3 Züge des neuen Typs B, jeder Zug fährt genau einmal am Tag. Die Züge sind nur hinsichtlich des Typs unterscheidbar. Züge vom Typ A haben die Pannenwahrscheinlichkeit 0,5%, d. h., mit dieser Wahrscheinlichkeit tritt bei einer Fahrt eine Panne auf. Es wird angenommen, dass es bei einer Fahrt höchstens zu einer Panne kommt.

1. Ein Zug vom Typ A benötigt für eine pannenfreie Fahrt 40 Minuten, einer vom Typ B nur 35 Minuten. Eine Panne verlängert ausschließlich die betroffene Fahrt, und zwar um 10 Minuten. Das Bahnunternehmen stellt fest, dass die mittlere Fahrzeit auf der Strecke 39 Minuten beträgt. Berechnen Sie die Pannenwahrscheinlichkeit, die Züge vom Typ B demnach haben.

In der Einführungsphase haben Züge vom Typ B eine Pannenwahrscheinlichkeit von 8,5%.

3. Die 9 Züge vom Typ A und die 3 Züge vom Typ B verkehren täglich in zufälliger Reihenfolge.
  - a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss ein Fahrgast bei seiner Fahrt mit dem Auftreten einer Panne rechnen?
  - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt bei fünf Fahrten mehr als eine Panne auf?
  - c) Auf einer Fahrt tritt keine Panne auf.  
Mit welcher Wahrscheinlichkeit war das eine Fahrt mit Typ B?

Die Ergebnisse der ungekürzten Aufgaben Rinderseuche und Bahnverkehr sind unter Bahnverkehr ... zu finden.

## Fernsehsender

Ein Fernsehsender strahlt mehrmals am Tag Nachrichtensendungen aus. Der Anteil derjenigen Personen in der Bevölkerung, die diese Sendungen kennen, sei  $p$ .

- a) Es sei  $p = 0,2$ . Ein Reporter des Senders befragt Personen auf der Straße, ob ihnen die Sendungen bekannt sind oder nicht (es sind nur diese beiden Antworten möglich). Erklären Sie, warum man diese Befragung als binomialverteiltes Zufallsexperiment auffassen kann.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 50 befragten Personen

$A$  : mindestens 37 die Sendungen nicht kennen,

$B$  : höchstens 5 Personen die Sendungen bekannt sind,

$C$  : die ersten 10 der Befragten die Sendungen nicht kennen.

- b) Die Frühausgabe der Nachrichtensendung hat einen Bekanntheitsgrad von  $p = 6\%$ . Berechnen Sie die Zahl der Personen, die der Reporter mindestens nach der Bekanntheit dieser Sendung befragen müsste, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens eine positive Antwort erhält.
- c) Der Sender produziert außerdem eine Spätnachrichtensendung. Bei einer groß angelegten Umfrage waren 42% der Befragten bis zu 30 Jahre alt. Die Auswertung ergab, dass die Spätsendung durchschnittlich jeder fünften befragten Person bekannt ist, aber nur zwei von 15 Personen der bis zu 30-Jährigen die Spätnachrichtensendung kennen. Berechnen Sie den Anteil der über 30-Jährigen, die die Spätnachrichtensendung kennen.
- d) Es wird vermutet, dass sich der Bekanntheitsgrad der Nachrichtensendungen des Senders verändert hat. So wird eine Umfrage unter 1000 Testpersonen durchgeführt. 270 Personen gaben an, die Sendungen zu kennen. Bestimmen Sie das 95%-Konfidenzintervall für den unbekanntem Anteil an Personen in der Bevölkerung, die die Sendung kennen.
- e) Wie groß muss der Umfang einer Befragung mindestens sein, damit das Ergebnis bis auf zwei Prozentpunkte genau ist? Dabei können Sie davon ausgehen, dass  $p \approx 27\%$  ist und die Sicherheitswahrscheinlichkeit 90% beträgt.

## Fernsehsender

Ein Fernsehsender strahlt mehrmals am Tag Nachrichtensendungen aus. Der Anteil derjenigen Personen in der Bevölkerung, die diese Sendungen kennen, sei  $p$ .

- a) Es sei  $p = 0,2$ . Ein Reporter des Senders befragt Personen auf der Straße, ob ihnen die Sendungen bekannt sind oder nicht (es sind nur diese beiden Antworten möglich). Erklären Sie, warum man diese Befragung als binomialverteiltes Zufallsexperiment auffassen kann.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 50 befragten Personen

$A$ : mindestens 37 die Sendungen nicht kennen,	88,9%
$B$ : höchstens 5 Personen die Sendungen bekannt sind,	4,8%
$C$ : die ersten 10 der Befragten die Sendungen nicht kennen.	10,7%

- b) Die Frühausgabe der Nachrichtensendung hat einen Bekanntheitsgrad von  $p = 6\%$ . Berechnen Sie die Zahl der Personen, die der Reporter mindestens nach der Bekanntheit dieser Sendung befragen müsste, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens eine positive Antwort erhält. ab  $n = 49$
- c) Der Sender produziert außerdem eine Spätnachrichtensendung. Bei einer groß angelegten Umfrage waren 42% der Befragten bis zu 30 Jahre alt. Die Auswertung ergab, dass die Spätsendung durchschnittlich jeder fünften befragten Person bekannt ist, aber nur zwei von 15 Personen der bis zu 30-Jährigen die Spätnachrichtensendung kennen. Berechnen Sie den Anteil der über 30-Jährigen, die die Spätnachrichtensendung kennen.

$$\text{Baumdiagramm} \quad 0,42 \cdot \frac{2}{15} + (1 - 0,42) \cdot p^* = \frac{1}{5}, \quad p^* = 24,8\%$$

- d) Es wird vermutet, dass sich der Bekanntheitsgrad der Nachrichtensendungen des Senders verändert hat. So wird eine Umfrage unter 1000 Testpersonen durchgeführt. 270 Personen gaben an, die Sendungen zu kennen. Bestimmen Sie das 95%-Konfidenzintervall für den unbekanntem Anteil an Personen in der Bevölkerung, die die Sendung kennen.

$$\text{Konfidenzintervall genähert/exakter} \quad [0,24; 0,30]$$

- e) Wie groß muss der Umfang einer Befragung mindestens sein, damit das Ergebnis bis auf zwei Prozentpunkte genau ist? Dabei können Sie davon ausgehen, dass  $p \approx 27\%$  ist und die Sicherheitswahrscheinlichkeit 90% beträgt.

$$\text{Konfidenzintervalllänge beträgt } 0,04, \quad n = 1326 \quad (z = 1,64)$$

# Überraschungseier

Eine Schokoladenfirma wirbt damit, dass sich in jedem 5. Überraschungsei eine Figur befindet.

- a) Für einen Kindergeburtstag werden 15 Überraschungseier gekauft, wobei man davon ausgehen kann, dass die Verteilung der Figuren zufällig ist. Erklären Sie, welche Bedeutung in diesem Zusammenhang der folgende Term hat:

$$\binom{15}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{12}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

$A$ : In keinem Ei ist eine Figur.

$B$ : Es befinden sich in höchstens 2 Eiern Figuren.

$C$ : In höchstens 11 Eiern sind keine Figuren.

- b) Ein Käufer möchte unbedingt eine Figur bekommen. Berechnen Sie, wie viele Überraschungseier er mindestens kaufen müsste, um mit 95%iger Sicherheit mindestens ein Überraschungsei mit einer Figur zu erhalten.

- c) Bei der Produktion der Überraschungseier treten nur die folgenden beiden Fehler auf:

$F_1$ : beschädigte Schokoladenhülle

$F_2$ : fehlerhafte Verpackung

$F_1$  und  $F_2$  treten unabhängig voneinander auf. Ein Ei ist einwandfrei, wenn es keinen der beiden Fehler aufweist, was erfahrungsgemäß bei 85% der Eier der Fall ist. Erfahrungsgemäß sind 8% der Schokoladenhüllen beschädigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt der Fehler  $F_2$  auf?

- d) Um die Wirkung einer Werbe-Kampagne auf das Kaufverhalten zu untersuchen, beauftragt die Schokoladenfirma ein Marktforschungsinstitut. Von besonderem Interesse ist, ob die Tatsache, dass eine Person die Werbung gesehen hat, tatsächlich einen Einfluss auf die momentane Vorliebe der Person für Überraschungseier hat.

Umfragen ergeben: 40% aller Befragten haben im letzten Monat ein Überraschungsei gekauft. 33% der Befragten gaben an, die Werbung gesehen zu haben. 36% der Befragten haben weder die Werbung gesehen noch im letzten Monat ein Überraschungsei gegessen.

Legen Sie dar, ob die Tatsache, dass die Werbung gesehen wurde, einen positiven Einfluss auf das Kaufverhalten für Überraschungseier hatte.

# Überraschungseier

Eine Schokoladenfirma wirbt damit, dass sich in jedem 5. Überraschungsei eine Figur befindet.

- a) Für einen Kindergeburtstag werden 15 Überraschungseier gekauft, wobei man davon ausgehen kann, dass die Verteilung der Figuren zufällig ist. Erklären Sie, welche Bedeutung in diesem Zusammenhang der folgende Term hat:

$$\binom{15}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{12}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

$A$ : In keinem Ei ist eine Figur. 3,5%

$B$ : Es befinden sich in höchstens 2 Eiern Figuren. 39,8%

$C$ : In höchstens 11 Eiern sind keine Figuren. 35,2%

- b) Ein Käufer möchte unbedingt eine Figur bekommen. Berechnen Sie, wie viele Überraschungseier er mindestens kaufen müsste, um mit 95%iger Sicherheit mindestens ein Überraschungsei mit einer Figur zu erhalten.  $n = 14$

- c) Bei der Produktion der Überraschungseier treten nur die folgenden beiden Fehler auf:

$F_1$ : beschädigte Schokoladenhülle

$F_2$ : fehlerhafte Verpackung

$F_1$  und  $F_2$  treten unabhängig voneinander auf. Ein Ei ist einwandfrei, wenn es keinen der beiden Fehler aufweist, was erfahrungsgemäß bei 85% der Eier der Fall ist. Erfahrungsgemäß sind 8% der Schokoladenhüllen beschädigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt der Fehler  $F_2$  auf? 7,6%

- d) Um die Wirkung einer Werbe-Kampagne auf das Kaufverhalten zu untersuchen, beauftragt die Schokoladenfirma ein Marktforschungsinstitut. Von besonderem Interesse ist, ob die Tatsache, dass eine Person die Werbung gesehen hat, tatsächlich einen Einfluss auf die momentane Vorliebe der Person für Überraschungseier hat.

Umfragen ergeben: 40% aller Befragten haben im letzten Monat ein Überraschungsei gekauft. 33% der Befragten gaben an, die Werbung gesehen zu haben. 36% der Befragten haben weder die Werbung gesehen noch im letzten Monat ein Überraschungsei gegessen.

Legen Sie dar, ob die Tatsache, dass die Werbung gesehen wurde, einen positiven Einfluss auf das Kaufverhalten für Überraschungseier hatte.

$$P(\text{Ei gekauft} | \text{Werbung gesehen}) = 35,2\%$$

$$P(\text{Ei gekauft} | \text{Werbung nicht gesehen}) = 46,3\%$$

## Grippe-Impfung

Das Robert-Koch-Institut hat in einer Stichprobe 1261 Menschen über 12 Jahre telefonisch befragt. Demnach waren in den alten Bundesländern 15% und in den neuen (einschließlich Berlin) 32% der Bevölkerung gegen Grippe geimpft. In den alten Bundesländern leben 79,3% der 73327000 Bundesbürger über 12 Jahre.

1. Berechnen Sie den Anteil der geimpften Personen in der Gesamtbevölkerung.  
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig angetroffene geimpfte Person in den neuen Bundesländern wohnt.
2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 15 zufällig ausgesuchten Personen aus den neuen Bundesländern
  - a) keine Person geimpft ist,
  - b) mindestens 10 Personen nicht geimpft sind,
  - c) mehr als 3 und höchstens 7 Personen geimpft sind.
3. Die Leibniz-Schule befindet sich in Hannover und hat zur Zeit 900 SchülerInnen über 12 Jahre. Bestimmen Sie einen Schätzwert für die Anzahl der geimpften Schüler dieses Gymnasiums. Ermitteln Sie ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall, in dem die Anzahl der geimpften SchülerInnen mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 90% liegt.
4. Personen über 12 Jahre aus den alten Bundesländern werden für ein Interview zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie, wie viele Personen man mindestens auswählen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens eine geimpfte Person zu erfassen.
5. Die oben angegebene Information über den Anteil der geimpften Personen in den alten Bundesländern beruht auf einer Befragung von 1000 Personen über 12 Jahre. Von ihnen waren 150 geimpft.
  - a) Untersuchen Sie, ob das Umfrageergebnis auch mit einem Anteil von  $p = 0,17$  verträglich ist, ohne ein Konfidenzintervall zu ermitteln.
  - b) Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall (Vertrauensintervall) zur Sicherheitswahrscheinlichkeit  $\alpha = 0,95$  für den Anteil geimpfter Personen über 12 Jahre in den alten Bundesländern.

## Grippe-Impfung

Das Robert-Koch-Institut hat in einer Stichprobe 1261 Menschen über 12 Jahre telefonisch befragt. Demnach waren in den alten Bundesländern 15% und in den neuen (einschließlich Berlin) 32% der Bevölkerung gegen Grippe geimpft. In den alten Bundesländern leben 79,3% der 73327000 Bundesbürger über 12 Jahre.

1. Berechnen Sie den Anteil der geimpften Personen in der Gesamtbevölkerung. 18,5%  
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig angetroffene geimpfte Person 35,8%  
in den neuen Bundesländern wohnt.
2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 15 zufällig ausgesuchten Personen  
aus den neuen Bundesländern
  - a) keine Person geimpft ist, 0,3%
  - b) mindestens 10 Personen nicht geimpft sind, 66,1%
  - c) mehr als 3 und höchstens 7 Personen geimpft sind. 68,7%
3. Die Leibniz-Schule befindet sich in Hannover und hat zur Zeit 900 SchülerInnen über 12 Jahre.  
Bestimmen Sie einen Schätzwert für die Anzahl der geimpften Schüler dieses Gymnasiums. 135  
Ermitteln Sie ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall, in dem die Anzahl der geimpften  
SchülerInnen mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 90% liegt. [118, 152]
4. Personen über 12 Jahre aus den alten Bundesländern werden für ein Interview zufällig ausgewählt.  
Bestimmen Sie, wie viele Personen man mindestens auswählen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit  
von mindestens 95% mindestens eine geimpfte Person zu erfassen.  $n = 18$
5. Die oben angegebene Information über den Anteil der geimpften Personen in den alten Bundesländern  
beruht auf einer Befragung von 1000 Personen über 12 Jahre. Von ihnen waren 150 geimpft.
  - a) Untersuchen Sie, ob das Umfrageergebnis auch mit einem Anteil von  $p = 0,17$  verträglich ist,  
ohne ein Konfidenzintervall zu ermitteln. 150 liegt in der  $2\sigma$ -Umgebung.
  - b) Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall (Vertrauensintervall) zur Sicherheitswahrscheinlichkeit  
 $\alpha = 0,95$  für den Anteil geimpfter Personen über 12 Jahre in den alten Bundesländern.  
[0,128 | 0,172]

# Flugbuchungen

Auf einer bestimmten Flugstrecke treten die Kunden, die einen Flug gebucht haben, diesen mit 90%iger Wahrscheinlichkeit an.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von einer zufällig ausgewählten Maschine mit 200 Sitzplätzen
1. genau 180 Plätze,
  2. höchstens 175 Plätze,
  3. mindestens 185 Plätze genutzt werden.

Um die Flugzeuge besser auszulasten, ist die Fluggesellschaft dazu übergegangen, die Flüge überbuchen zu lassen.

- b)
1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 210 verkauften Flugtickets für eine Maschine mit 200 Sitzplätzen nicht alle erscheinenden Fluggäste befördert werden können?
  2. Wie viele Buchungen dürfen angenommen werden, damit das Platzangebot in einer Maschine mit 300 Sitzplätzen mit 99%iger Wahrscheinlichkeit ausreicht?

# Flugbuchungen

Auf einer bestimmten Flugstrecke treten die Kunden, die einen Flug gebucht haben, diesen mit 90%iger Wahrscheinlichkeit an.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von einer zufällig ausgewählten Maschine mit 200 Sitzplätzen

- |  |       |
|--|-------|
| 1. genau 180 Plätze,                     | 9,4%  |
| 2. höchstens 175 Plätze,                 | 14,5% |
| 3. mindestens 185 Plätze genutzt werden. | 14,3% |

Um die Flugzeuge besser auszulasten, ist die Fluggesellschaft dazu übergegangen, die Flüge überbuchen zu lassen.

b) 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 210 verkauften Flugtickets für eine Maschine mit 200 Sitzplätzen nicht alle erscheinenden Fluggäste befördert werden können?

$$P_{0,9}^{210}(X \geq 201) = 0,2\%$$

2. Wie viele Buchungen dürfen angenommen werden, damit das Platzangebot in einer Maschine mit 300 Sitzplätzen mit 99%iger Wahrscheinlichkeit ausreicht?

$n$  gesucht

Rückwärtsrechnung mit der  $z\sigma$ -Umgebung zur Sicherheitswahrscheinlichkeit von (!) 98%  
 $z = 2,326$

$$np + z\sqrt{np(1-p)} = 300$$

$$n = 319$$

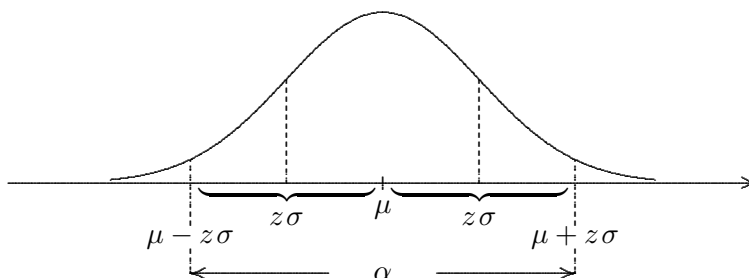
oder (GTR)

Ergebnis aus der Tabelle (TABLE) ablesen

$$\backslash Y_1 = \text{binomcdf}(X, 0.9, 300) = 0.99$$

$$\text{TblStart} = 310$$

$$n = 320$$



# Zielschießen

Otto trifft beim Zielschießen auf eine Torwand mit 60%iger Wahrscheinlichkeit.

- a) Otto schießt 20-mal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er
1. genau 12-mal,
  2. höchstens 10-mal,
  3. mindestens 16-mal trifft.

Welche vereinfachenden Voraussetzungen müssen gemacht werden, um bei diesen Berechnungen von einer Binomialverteilung auszugehen?

- b) Wie groß müsste die Schusszahl mindestens sein, damit bei Wahrscheinlichkeitsberechnungen die Normalverteilung verwendet werden kann?
- c) Otto schießt 40-mal.  
Ermitteln Sie die 95 %-Prognoseintervalle für die Trefferzahlen und für die relativen Häufigkeiten.

Otto trifft 15-mal.

Überprüfen Sie, ob 60 % im 95 %-Konfidenzintervall zu diesem Stichprobenergebnis liegt, ohne das Konfidenzintervall zu ermitteln (nehmen Sie hierbei Bezug auf die Definition eines Konfidenzintervalls).

Welche Reaktion von Otto wäre denkbar?

- d) Wie oft müsste Otto mindestens schießen, damit er mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit mindestens 2-mal trifft?
- e) Otto und Willi schießen abwechselnd auf die Torwand, wobei Otto beginnt. Die Trefferwahrscheinlichkeit von Willi beträgt 50%. Das Spiel ist beendet, wenn jeder zwei Schüsse abgegeben hat. Gewonnen hat derjenige, der am häufigsten getroffen hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Otto? (Kein umfangreiches Baumdiagramm erforderlich.)
- f) Bestimmen Sie für das Spiel aus e), wie viele Schüsse im Schnitt bis zum erstmaligen Auftreten eines Treffers erforderlich sind.
- g) Wie oft müsste Otto mindestens schießen, damit er mit 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens 30 Treffer erzielt?

# Zielschießen

Otto trifft beim Zielschießen auf eine Torwand mit 60%iger Wahrscheinlichkeit.

- a) Otto schießt 20-mal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er
1. genau 12-mal, 18,0 %
  2. höchstens 10-mal, 24,5 %
  3. mindestens 16-mal trifft. 5,1 %

Welche vereinfachenden Voraussetzungen müssen gemacht werden, um bei diesen Berechnungen von einer Binomialverteilung auszugehen? Trefferwahrscheinlichkeit bleibt gleich, weil ...

- b) Wie groß müsste die Schusszahl mindestens sein, damit bei Wahrscheinlichkeitsberechnungen die Normalverteilung verwendet werden kann?  $\sigma > 3$ , ab  $n = 38$

- c) Otto schießt 40-mal.  
Ermitteln Sie die 95 %-Prognoseintervalle für die Trefferzahlen und für die relativen Häufigkeiten. [16, 28]  
[0,4; 0,7]

Otto trifft 15-mal.

Überprüfen Sie, ob 60% im 95 %-Konfidenzintervall zu diesem Stichprobenergebnis liegt, ohne das Konfidenzintervall zu ermitteln (nehmen Sie hierbei Bezug auf die Definition eines Konfidenzintervalls).

$X = 15$  ist nicht mit  $p = 0,6$  verträglich.

Welche Reaktion von Otto wäre denkbar?

Otto nimmt sich vor, mehr zu trainieren.

- d) Wie oft müsste Otto mindestens schießen, damit er mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit mindestens 2-mal trifft?  $1 - 0,4^n - n \cdot 0,6 \cdot 0,4^{n-1} \geq 0,99$ , ab  $n = 8$

- e) Otto und Willi schießen abwechselnd auf die Torwand, wobei Otto beginnt. Die Trefferwahrscheinlichkeit von Willi beträgt 50%. Das Spiel ist beendet, wenn jeder zwei Schüsse abgegeben hat. Gewonnen hat derjenige, der am häufigsten getroffen hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Otto? (Kein umfangreiches Baumdiagramm erforderlich.)

$$P_{\text{Willi}}(Y = 0) \cdot P_{\text{Otto}}(X = 1) + \\ P_{\text{Willi}}(Y = 0) \cdot P_{\text{Otto}}(X = 2) + \\ P_{\text{Willi}}(Y = 1) \cdot P_{\text{Otto}}(X = 2) = 0,39$$

- f) Bestimmen Sie für das Spiel aus e), wie viele Schüsse im Schnitt bis zum erstmaligen Auftreten eines Treffers erforderlich sind.

$x_i$	0	1	2	3	4	$n = 1,52$
$P$	$0,4^2 \cdot 0,5^2$	0,6	$0,4 \cdot 0,5$	$0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,6$	$0,4^2 \cdot 0,5^2$	

- g) Wie oft müsste Otto mindestens schießen, damit er mit 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens 30 Treffer erzielt?

Rückwärtsrechnung mit der  $z\sigma$ -Umgebung zur Sicherheitswahrscheinlichkeit von (!) 90 %  
 $z = 1,64$   
 $np - z\sqrt{np(1-p)} = 30$   
 $n = 61$

oder (GTR)  
 Ergebnis aus der Tabelle (TABLE) ablesen  
 $\setminus Y_1 = \text{binomcdf}(X, 0,6, 29) = 0.05$   
 TblStart = 50  
 $n = 60$   $P_{0,6}^{60}(X \geq 30) = 0,956$