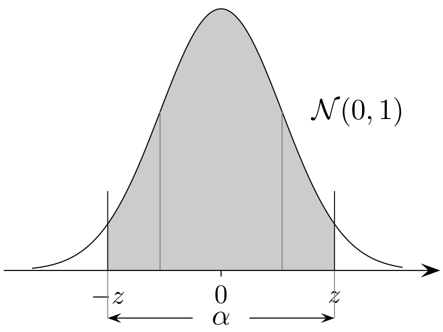
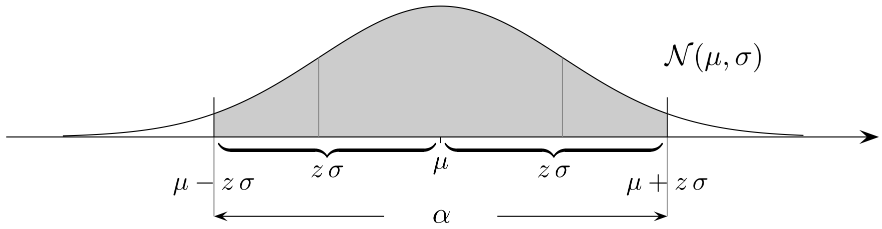
Normalverteilung und Standardisierung





Die Normalverteilungen $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ ergeben sich aus der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ (Gaussche Glockenkurve) durch strecken und stauchen um σ und verschieben um μ.
Das Intervall $[-z, z]$ geht dabei in die $z\sigma$-Umgebung $[\mu - z\sigma,\ \mu + z\sigma]$ von μ über.
Einem z-Wert von $\mathcal{N}(0,1)$ entspricht $k = \mu + z\sigma$ von $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$.
Umgekehrt wird dann einem k-Wert von $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ der Wert $z = \dfrac{k-\mu}{\sigma}$ zugeordnet.

Dies führt zu

$$P(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \qquad \text{korrekter} \quad \approx$$

$$\underbrace{P(X \le k)}_{\beta} = \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$$

Falls β gegeben ist, folgt

$$\frac{k-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\beta)$$

Dieses kann je nach Fragestellung nach k, μ oder σ umgestellt werden.

GTR
$\Phi^{-1}(\beta) = \text{invNorm}(\beta)$

a) Sei $P(X \leq 15) = 20\,\%$, $\mu = 25$
gesucht σ

Lösung

$$\Phi\Big(\frac{15-\mu}{\sigma}\Big) = 0{,}2$$

$$\frac{15-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}\big(0{,}2\big)$$

$$\sigma = \frac{15-\mu}{\Phi^{-1}\big(0{,}2\big)} = 11{,}9$$

b) Sei $P(X \leq 20) = 10\,\%$, $\sigma = 5$
gesucht μ

Lösung

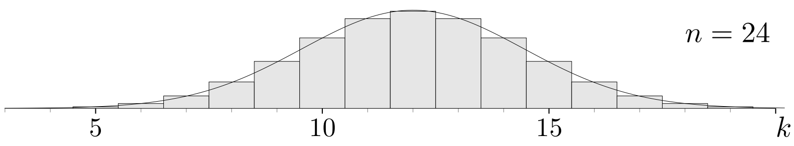
$$\Phi\Big(\frac{20-\mu}{\sigma}\Big) = 0{,}1$$

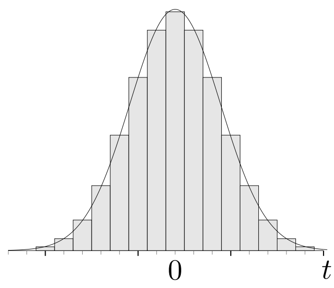
$$\frac{20-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}\big(0{,}1\big)$$

$$\mu = 20 - \sigma \cdot \Phi^{-1}\big(0{,}1\big) = 26{,}4$$

Standardisierte Normalverteilung

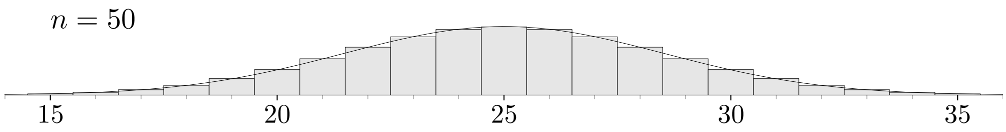
Um das Verhalten von Binomialverteilungen für $n \to \infty$ zu untersuchen (hier für $p = \frac{1}{2}$ dargestellt), werden die k-Werte in ihrer relativen Lage zum Erwartungswert μ betrachtet.

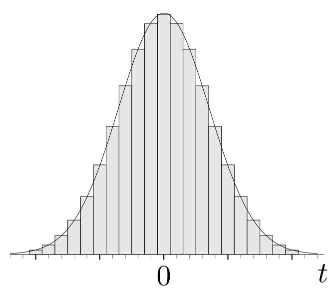




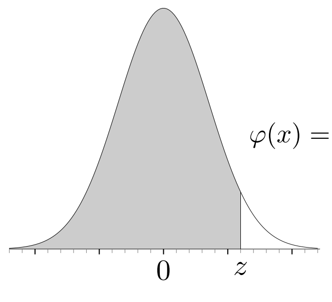
$$\begin{aligned} k &= \mu + t \cdot \sigma \\ \iff \quad k - \mu &= t \cdot \sigma \\ \iff \quad t &= \frac{k-\mu}{\sigma} \end{aligned}$$

Der t-Wert gibt an, um welches Vielfache von σ k vom Erwartungswert μ abweicht.
Für $n \to \infty$ braucht man nur kleine t-Werte zu berücksichtigen.
Um über der t-Achse ein Histogramm aufzutragen, werden die Rechtecksbreiten durch σ dividiert.
Damit die Flächeninhalte gleich bleiben, müssen die Höhen mit σ multipliziert werden.





Nun ist absehbar, was sich für $n \to \infty$ ergibt.
Die standardisierten Verteilungen werden durch die Gausssche Glockenkurve $\varphi(x)$ approximiert.
Deren Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ gibt den Flächeninhalt unter der Kurve von $-\infty$ bis z an.

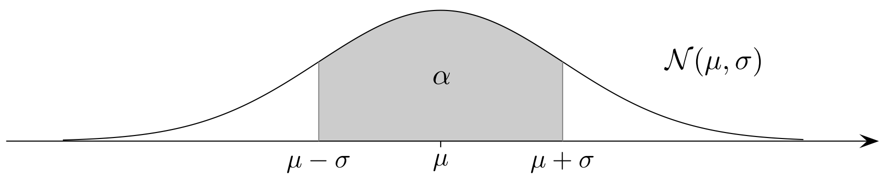


Wir erhalten:

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

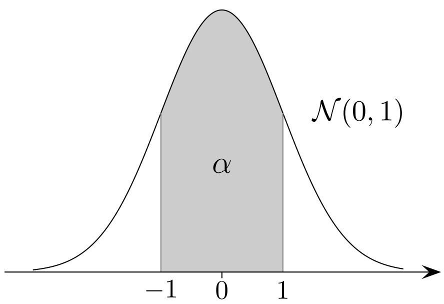
(ohne Stetigkeitskorrektur)

σ-Umgebung



Wie groß ist α?

Antwort:
$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ geht aus $\mathcal{N}(0, 1)$ durch Verschieben, Strecken und Stauchen hervor.
0 geht in μ über, -1 in $\mu - \sigma$, 1 in $\mu + \sigma$.



$\alpha = \text{normalcdf}(-1, 1) = 68{,}3\,\%$

Weiter erhalten wir:

$P(2\sigma\text{-Umgebung}) = \text{normalcdf}(-2, 2) = 95{,}4\,\%$

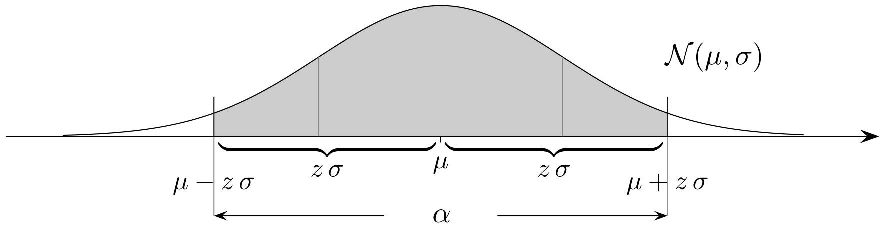
$P(3\sigma\text{-Umgebung}) = \text{normalcdf}(-3, 3) = 99{,}7\,\%$

Sei für eine Binomialverteilung $n = 5000$, $p = 0{,}5$ gegeben.
Welche Trefferzahlen sind mit 95,4 %iger Wahrscheinlichkeit zu erwarten?
(Der Bereich heißt auch Schwankungsintervall.)

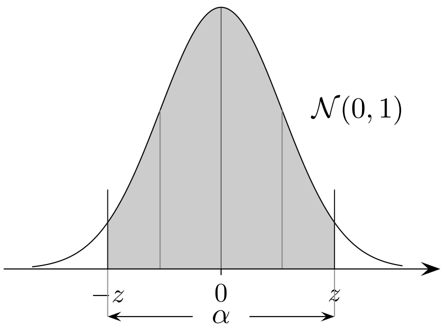
Sei für eine Binomialverteilung $n = 5000$, $p = 0{,}5$ gegeben.
Welche Trefferzahlen sind mit 95,4 %iger Wahrscheinlichkeit zu erwarten?
(Der Bereich heißt auch Schwankungsintervall.)

$[2430; 2570]$

$z\sigma$-Umgebung



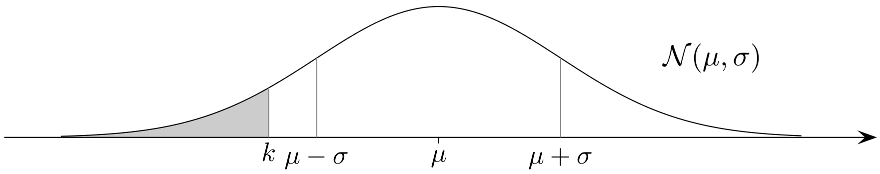
$\alpha = 90\,\%$ (z. B.) gegeben,
z gesucht



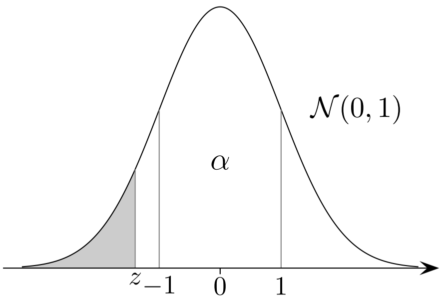
Begründe:

$z = \underbrace{\text{invNorm}}_{\Phi^{-1}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \text{invNorm}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$

μ, σ ermitteln



$P(X \leq 235) = 9\,\%,\ \ \mu = 250$
gesucht σ



Welcher Zusammenhang besteht zwischen k und z?

Antwort:

$$\frac{k-\mu}{\sigma} = z \qquad \text{(Setze für } k\ \ \mu-\sigma\text{, bzw. } \mu+\sigma \text{ ein.)}$$

$$\underbrace{\text{normalcdf}}_{\Phi}\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) = P(X \leq k) \qquad \mid \Phi^{-1}$$

...

$\sigma = 11{,}2$