

Konfidenzintervall

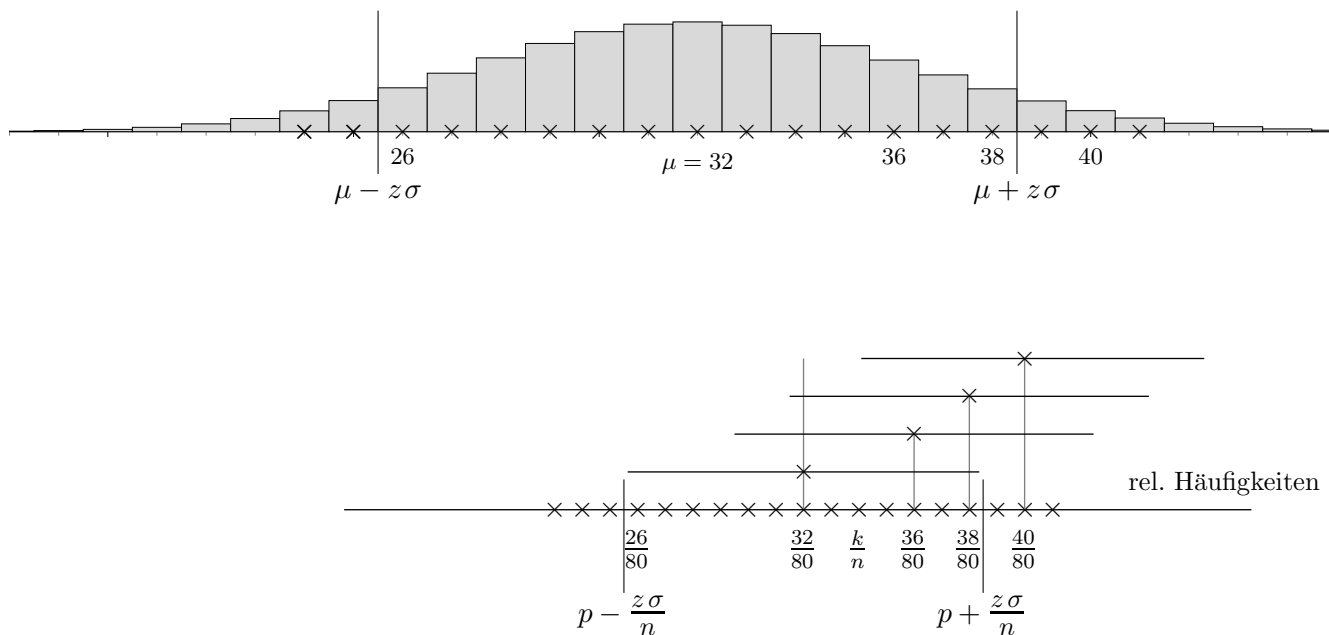
Zu diesem Thema werden mehrere Einstiege skizziert.

Der von mir zuletzt Gewählte (November 2011) beginnt auf Seite 5.

Mit einem GeoGebra-Blatt kann die zugrunde liegende Idee veranschaulicht werden.

Konfidenzintervall Weg zur Definition

Wir gehen von einer Binomialverteilung ($n = 80, p = 0,4$) und der $z\sigma$ -Umgebung des Erwartungswerts zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $\alpha = 85\%$ aus. Was kann ein Außenstehender, dem p unbekannt ist, aufgrund eines Stichprobenergebnisses $X = k$, z.B. $k = 36$, über p aussagen?



Zunächst ist die relative Häufigkeit $\frac{k}{n}$ eine (grobe) Näherung für p . p liegt vermutlich in einem kleinen Intervall mit der Mitte $\frac{k}{n}$. Dieses Intervall müsste jedoch so groß gewählt werden, damit es bei wiederholter Stichprobenerhebung p überdeckt, und zwar mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit α .

Auf den ersten Blick kann der unteren Grafik die Länge des Intervalls entnommen werden. Hierbei besteht leider folgendes Problem: p ist unbekannt und damit auch die Grenzen des Intervalls

$$\left[\frac{k}{n} - \frac{z\sigma}{n} \mid \frac{k}{n} + \frac{z\sigma}{n} \right].$$

Man kann sich behelfen, indem in σ für p die Näherung $\frac{k}{n}$ eingesetzt wird.

Das theoretisch korrekte Vorgehen ist aufwändiger.

Zum Stichprobenergebnis $X = 36$ (36 liegt in der $z\sigma$ -Umgebung zu p) sucht man, da p unbekannt ist, alle Wahrscheinlichkeiten, so dass 36 in der zugehörigen $z\sigma$ -Umgebung liegt.

In diesem sogenannten Konfidenzintervall ist p jedenfalls enthalten. Für $X = 40$ würde dies nicht gelten. Genau dann also, wenn X in die $z\sigma$ -Umgebung zu p fällt, und dies geschieht mit der Wahrscheinlichkeit α , überdeckt das zugehörige Konfidenzintervall zu $X = k$ die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit p .

Zur Erinnerung:

$$z = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$$

Konfidenzintervall, genähert Erarbeitung

Eine Maschine produziert Werkstücke. Diese sind mit der Wahrscheinlichkeit p verfährt.

□ ■ □ □ ■ □ □ ■ ■ □ □ □ □ □ ■ ■ ■ □ □ ■ ...

Der Produktion wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 80$ entnommen.

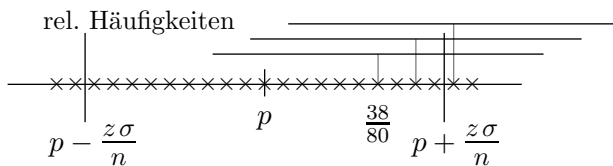
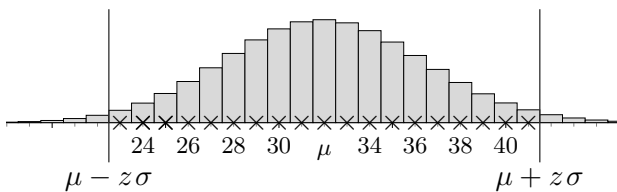
X sei die Anzahl verfährtter Werkstücke in der Stichprobe. Sei z.B. $X = 38$.

(X kann mit $\text{randBin}(n, p)$ simuliert werden.) Was sagt das Stichprobenergebnis über p aus?

Die Sicherheitswahrscheinlichkeit sei $\alpha = 95\%$.

verborgen
 $p = 0,4$

sichtbar
 $n = 80, k = 38$



$$p \in \left[\frac{k}{n} - \frac{z\sigma}{n} \mid \frac{k}{n} + \frac{z\sigma}{n} \right]$$

Die Intervalllänge ändert sich kaum, wenn für p die relative Häufigkeit $\frac{k}{n}$ eingesetzt wird.

Das genäherte oder Wald-Konfidenzintervall erhalten wir, indem zu $\frac{k}{n}$ (statt p) die Grenzen des Schwankungsintervalls bestimmt und diese durch n dividiert werden.

Das Stichprobenergebnis $X = k$ liegt mit der Sicherheitswahrscheinlichkeit α in der $z\sigma$ -Umgebung von μ . Dasselbe gilt für die relativen Häufigkeiten und dem zugehörigen Intervall I_{rel} . Das Konfidenzintervall überdeckt genau dann p , wenn $\frac{k}{n}$ in I_{rel} fällt (beachte die Längen), also mit der Wahrscheinlichkeit α .

Mit 1-PropZInt (GTR, STAT-Tests-Menü) kann dieses Konfidenzintervall direkt ermittelt werden.

Zur Erinnerung:

$$z = \Phi^{-1}\left(\frac{1 + \alpha}{2}\right)$$

Konfidenzintervall, genauer Erarbeitung

Eine Maschine produziert Werkstücke. Diese sind mit der Wahrscheinlichkeit p verfertigt.

□ ■ □ □ ■ □ □ ■ ■ □ □ □ □ □ ■ ■ ■ □ □ ■ ...

Der Produktion wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 80$ entnommen.

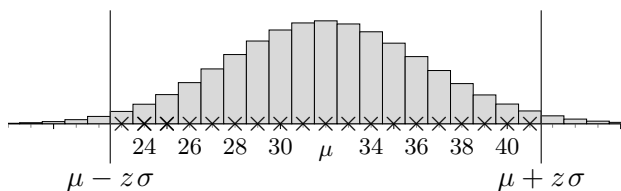
X sei die Anzahl verfertigter Werkstücke in der Stichprobe. Sei z.B. $k = 38$.

(X kann mit $\text{randBin}(n, p)$ simuliert werden.) Was sagt das Stichprobenergebnis über p aus?

Die Sicherheitswahrscheinlichkeit sei $\alpha = 95\%$.

verborgen
 $p = 0,4$

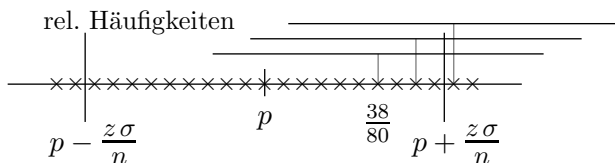
sichtbar
 $n = 80, k = 38$



Wir suchen ein (möglichst kleines) Intervall um $\frac{38}{80}$, das p beinhaltet. Welche Wahrscheinlichkeiten gehören nun in dieses Intervall? $k = 38$ liegt in der zu p gehörenden $z\sigma$ -Umgebung von μ . Wir nehmen daher alle Wahrscheinlichkeiten in unser Intervall auf, für die das gilt. Diese Wahrscheinlichkeiten wären mit k verträglich, sie würden k wahrscheinlich machen, d.h. für sie gilt:

$$\mu - z\sigma \leq k \leq \mu + z\sigma$$

Wird in σ die Näherung $\frac{k}{n}$ eingesetzt, so führt das zum Wald-Konfidenzintervall.



Wie erhalten wir nun alle Wahrscheinlichkeiten, die diese Bedingung erfüllen?

Begründe:

Das Konfidenzintervall lautet: $[p_{\min}, p_{\max}]$

p_{\min} ist Lösung der Gleichung $k = \mu + z\sigma$,

p_{\max} löst $k = \mu - z\sigma$.

Tipp: Variiere in Gedanken p .

$k = 38$

Konfidenzintervall $[0,3692 \mid 0,5830]$

Wald-Konfidenzintervall $[0,3656 \mid 0,5844]$

$k = 40$

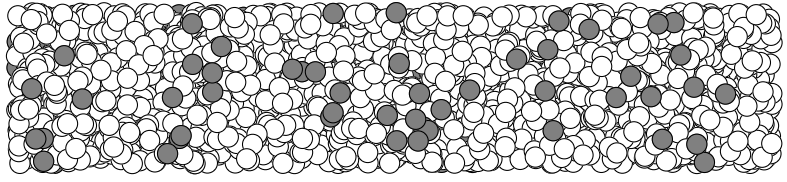
Konfidenzintervall $[0,3930 \mid 0,6070]$

Wald-Konfidenzintervall $[0,3904 \mid 0,6096]$

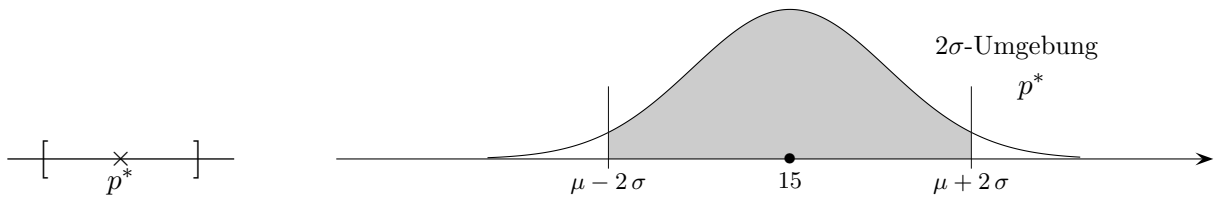
Zur Erinnerung:

$$z = \Phi^{-1}\left(\frac{1 + \alpha}{2}\right)$$

Konfidenzintervall

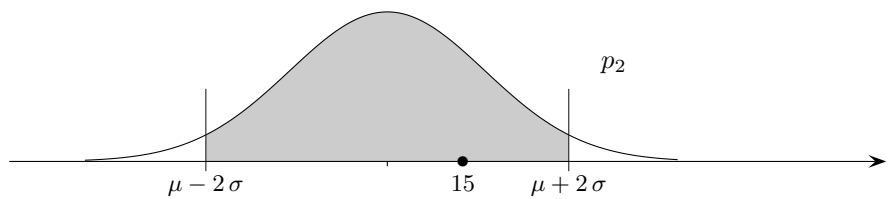
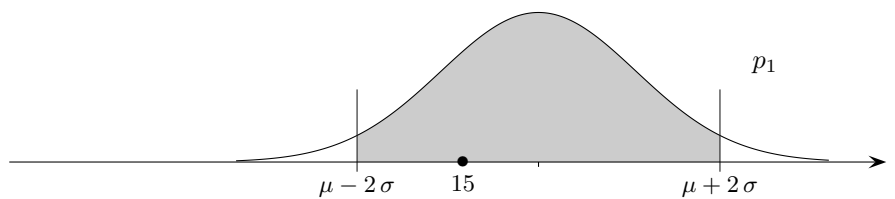


Der Anteil der wurmstichigen Äpfel (defekten Werkstücke, infizierten Personen, usw.) in einer umfangreichen Lieferung soll ermittelt werden. Hierzu wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 100$ entnommen. In ihr seien $X = 15$ wurmstichige Äpfel.
Welche (statistisch relevante) Aussage ist nun möglich?

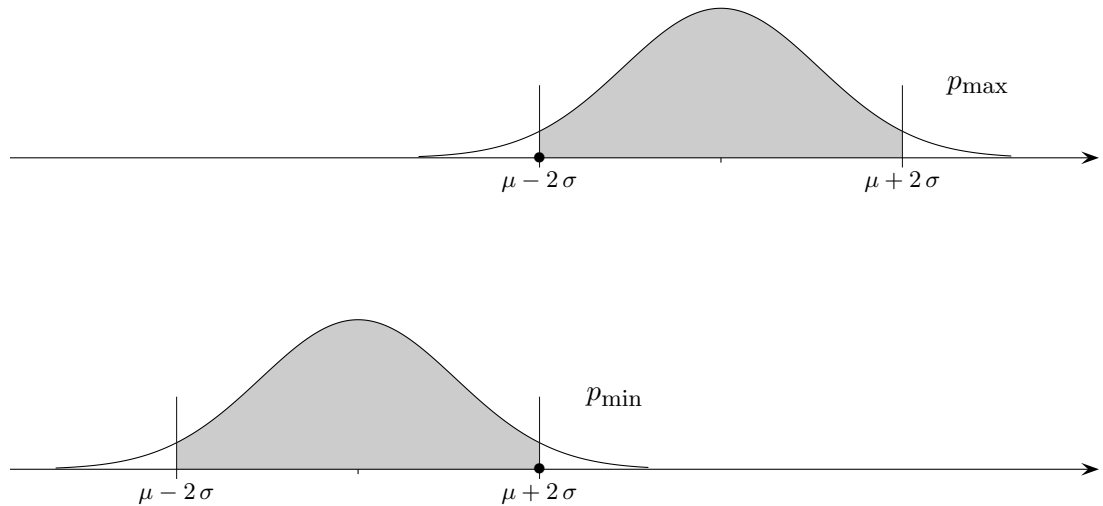


Eine Punktschätzung ergibt: $p^* = \frac{15}{100} = 15\%$

Es erscheint plausibel, dass der wahre Anteil (mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit) in einer Umgebung von p^* liegt. Welche Anteile sollte das Intervall enthalten?



Konfidenzintervall



$[p_{\min}, p_{\max}]$ heißt Konfidenz- oder Vertrauensintervall.

Es besteht aus allen Wahrscheinlichkeiten, deren 2σ -Umgebung X enthält, oder ungenauer formuliert:

Das Konfidenzintervall enthält alle Wahrscheinlichkeiten, die dem Zufallsversuch zugrunde liegen könnten.

p_{\max} ist eine Lösung der Gleichung $X = \mu - 2\sigma$,

p_{\min} löst $X = \mu + 2\sigma$.

Wir werden noch begründen, dass das Konfidenzintervall mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit das unbekannte p überdeckt, d. h. dass bei wiederholter Stichprobenentnahme von den zugehörigen Konfidenzintervallen 95% p enthalten.

Ermittle das Konfidenzintervall.

a) $n = 100$, $X = 15$

b) $n = 1000$, $X = 150$

Konfidenzintervall, genähert

Ermittle das Konfidenzintervall, Ergebnis: Nullstellen von $f_{1/2}(p) = X - np \pm 2\sqrt{np(1-p)}$

a) $n = 100, X = 15$ [0,092; 0,235]

b) $n = 1000, X = 150$ [0,129; 0,174]

p_{\max} löst $X = \mu - 2\sigma$

p_{\min} löst $X = \mu + 2\sigma$

Für die Grenzen des Intervalls gilt also

$$p = \frac{X}{n} \pm 2\frac{\sigma}{n}$$

Das Intervall ändert sich kaum (die Rechnung vereinfacht sich erheblich), wenn für p auf der rechten Seite die relative Häufigkeit $\frac{X}{n}$ eingesetzt wird (Wald-Konfidenzintervall).

GTR 1-PropZInt im STAT-Tests-Menü

$n = 100, X = 15$

Konfidenzintervall [0,079; 0,221]

$n = 1000, X = 150$

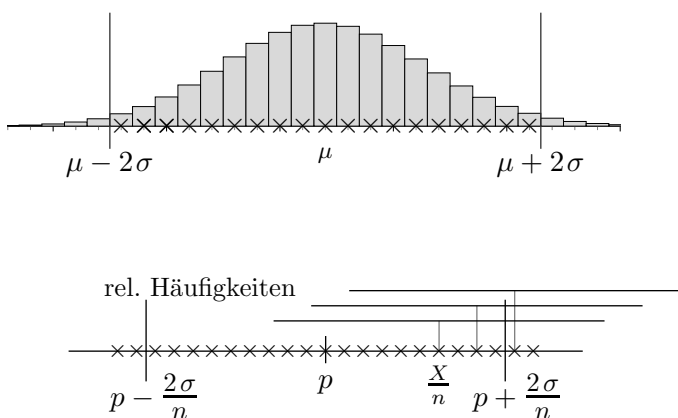
Konfidenzintervall [0,127; 0,173]

Beachte, dass sich die Längen um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{10}}$ unterscheiden.

Der folgenden Verteilung soll der wahre aber unbekannte Anteil p zugrunde liegen.

Das Stichprobenergebnis X liegt mit der Sicherheitswahrscheinlichkeit $\alpha = 95,4\%$ in der 2σ -Umgebung.

Für die relativen Häufigkeiten gilt Entsprechendes.



Welche Aussage hinsichtlich der Überdeckung von p ist möglich, wenn angenommen werden kann, dass die Konfidenzintervalle ungefähr gleichlang sind?

Konfidenzintervall, Definition

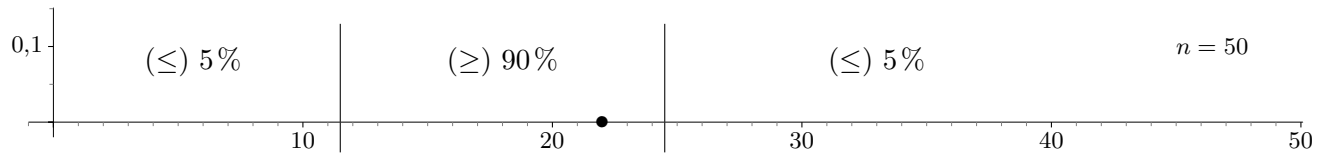
$X \in 2\sigma$ -Umgebung von $p \iff p \in$ Konfidenzintervall

d. h. das Konfidenzintervall überdeckt mit (ungefähr) 95%-iger Wahrscheinlichkeit p .

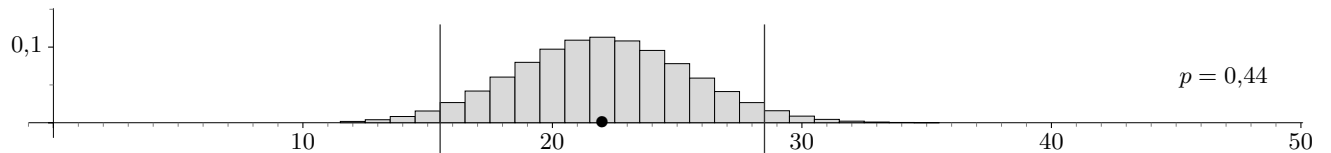
Das Konfidenzintervall (gegeben n, X) zur Sicherheitswahrscheinlichkeit α besteht aus allen p , für die das Stichprobenergebnis X in der $z\sigma$ -Umgebung liegt.

$$\begin{aligned} \mu - z\sigma &\leq X \leq \mu + z\sigma && \text{beachte: } \mu = np, \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \\ \iff p - z\frac{\sigma}{n} &\leq \frac{X}{n} \leq p + z\frac{\sigma}{n} \\ \iff -z\frac{\sigma}{n} &\leq \frac{X}{n} - p \leq z\frac{\sigma}{n} \\ \iff \left| \frac{X}{n} - p \right| &\leq z\frac{\sigma}{n} \\ &&& z = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

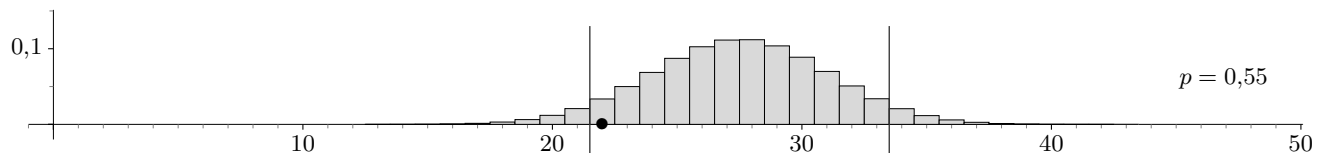
Konfidenzintervall GTR



Von 50 zufällig ausgesuchten Patienten gesunden während einer Therapie 22. Wir wollen untersuchen, welche Erfolgswahrscheinlichkeiten p dieser Binomialverteilung zugrunde liegen könnten. Die Sicherheitswahrscheinlichkeit sei 90%, d.h. wir suchen Erfolgswahrscheinlichkeiten p , so dass 22 in einem Intervall $[a, b]$ liegt, dessen Wahrscheinlichkeit 90% beträgt und die Intervalle der seltenen Ereignisse rechts und links des Intervalls $[a, b]$ jeweils die Wahrscheinlichkeit 5% haben.



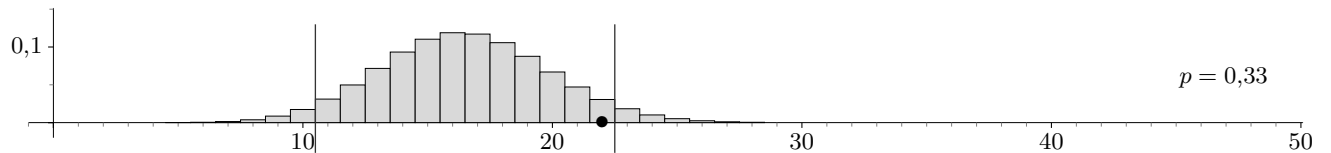
Möglich wäre $p = \frac{22}{50} = 0,44$. $X = 22$ wäre dann am wahrscheinlichsten.



Die Bestimmung des maximalen Werts für p ist aus der Grafik zu ersehen.

Für noch größeres p rutscht 22 in den linken 5%-Bereich.

p_{\max} ist also eine Lösung der Gleichung $\text{binomcdf}(50, X, 21) = 0,05$ (näherungsweise mit GTR).



Die Bestimmung des minimalen Werts für p erfolgt entsprechend.

Für noch kleineres p gelangt 22 in den rechten 5%-Bereich.

p_{\min} ist also Lösung der Gleichung $\text{binomcdf}(50, X, 22) = 0,95$.

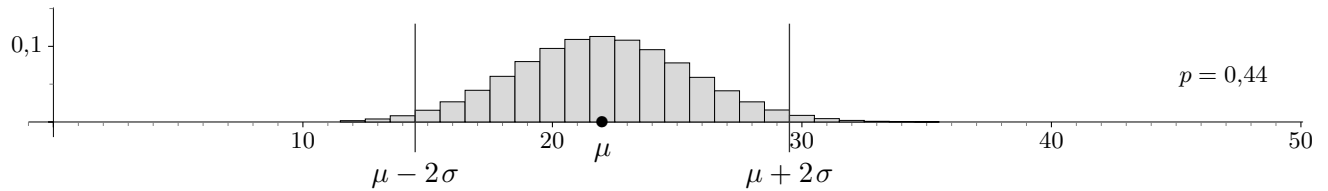
$[p_{\min}, p_{\max}]$ heißt Konfidenzintervall.

Roofls

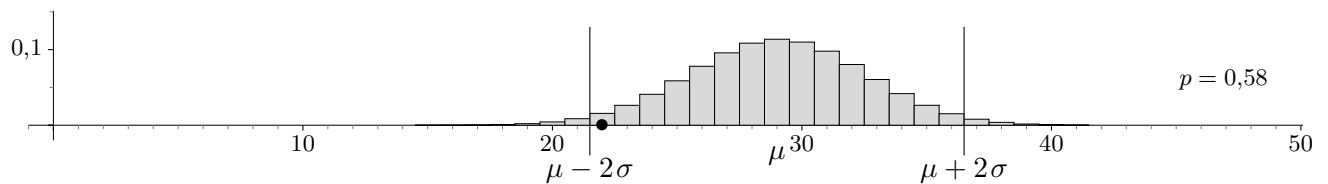
Konfidenz, veralt. für Vertrauen

Konfidenzintervall mit 2σ -Umgebungen

Von 50 zufällig ausgesuchten Patienten gesunden während einer Therapie 22. Wir wollen untersuchen, welche Erfolgswahrscheinlichkeiten p dieser Binomialverteilung zugrunde liegen könnten. Die Sicherheitswahrscheinlichkeit sei 95,4%, d.h. wir suchen Erfolgswahrscheinlichkeiten p , so dass 22 in deren 2σ -Umgebung liegt.

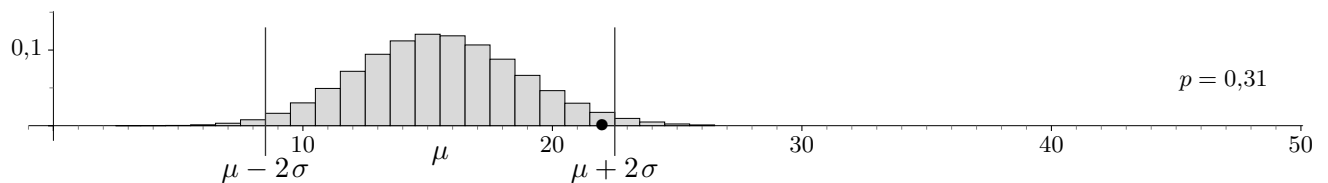


Möglich wäre $p = \frac{22}{50} = 0,44$. $X = 22$ wäre dann am wahrscheinlichsten.



Die Bestimmung des maximalen Werts für p ist aus der Grafik zu ersehen. Für noch größeres p rutscht 22 links außerhalb der 2σ -Umgebung.

p_{\max} ist also eine Lösung der Gleichung $X = \mu - 2\sigma$



Die Bestimmung des minimalen Werts für p erfolgt entsprechend. Für noch kleineres p gelangt 22 rechts außerhalb der 2σ -Umgebung.

p_{\min} ist also eine Lösung der Gleichung $X = \mu + 2\sigma$

$[p_{\min}, p_{\max}]$ heißt Konfidenz- oder Vertrauensintervall.

Beispiel

$n = 200$, $X = 170$

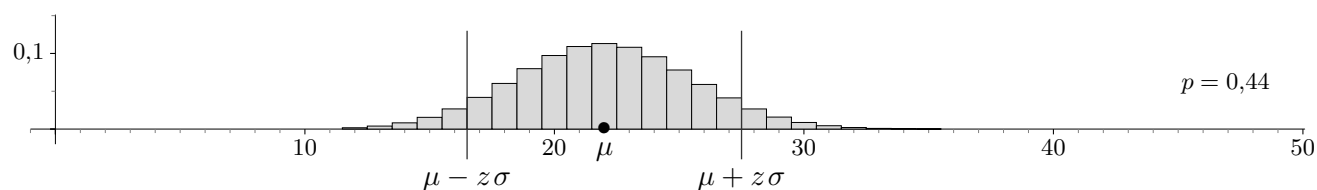
Konfidenzintervall $[0,79; 0,89]$

Konfidenzintervall

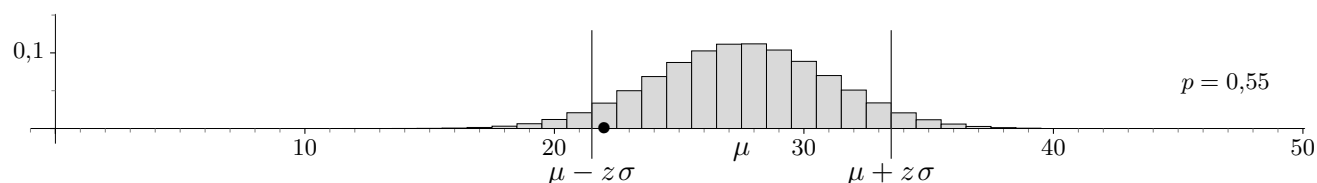
Von 50 zufällig ausgesuchten Patienten gesunden während einer Therapie 22. Wir wollen untersuchen, welche Erfolgswahrscheinlichkeiten p dieser Binomialverteilung zugrunde liegen könnten.

Die Sicherheitswahrscheinlichkeit sei $\alpha = 90\%$, d. h. wir suchen Erfolgswahrscheinlichkeiten p , so dass 22 in einem Intervall $[a, b]$ liegt, dessen Wahrscheinlichkeit 90% beträgt und die Intervalle der seltenen Ereignisse rechts und links des Intervalls $[a, b]$ jeweils die Wahrscheinlichkeit 5% haben. Für die Bestimmung von z siehe das Arbeitsblatt Sigma-Umgebungen.

$$z = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$$

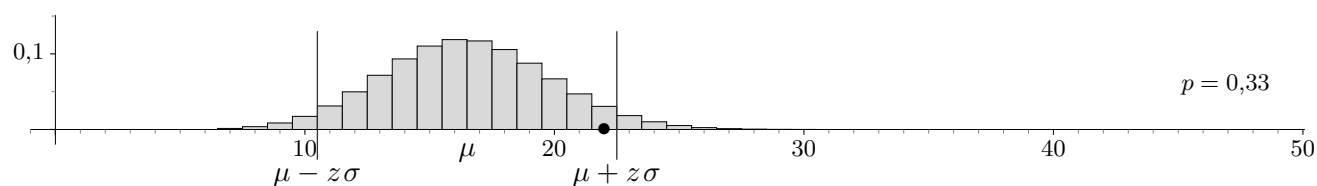


Möglich wäre $p = \frac{22}{50} = 0,44$. $X = 22$ wäre dann am wahrscheinlichsten.



Die Bestimmung des maximalen Werts für p ist aus der Grafik zu ersehen. Für noch größeres p rutscht 22 in den linken 5%-Bereich.

p_{\max} ist also eine Lösung der Gleichung $X = \mu - z\sigma$.



Die Bestimmung des minimalen Werts für p erfolgt entsprechend. Für noch kleineres p gelangt 22 in den rechten 5%-Bereich.

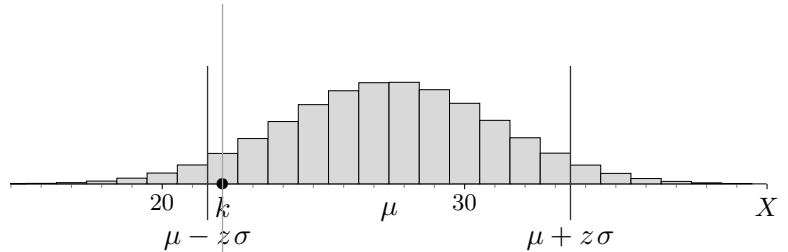
p_{\min} ist also eine Lösung der Gleichung $X = \mu + z\sigma$.

$[p_{\min}, p_{\max}]$ heißt Konfidenzintervall,

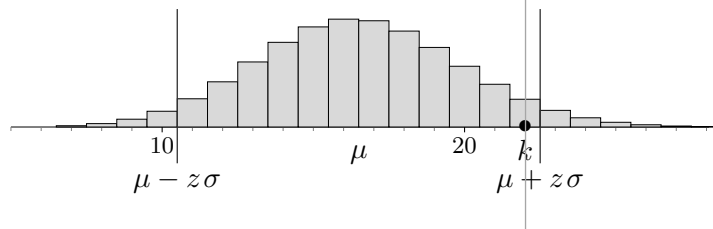
es kann mit 1-PropZInt (GTR, STAT-Tests-Menü) direkt ermittelt werden.

Konfidenzintervall, Definition

Das Konfidenzintervall (Vertrauensintervall) zum Stichprobenergebnis $X = k$ enthält alle Wahrscheinlichkeiten p , deren $z\sigma$ -Umgebung das k enthält (Sicherheitswahrscheinlichkeit α).



p_{\max} ist eine Lösung der Gleichung $k = \mu - z\sigma$.



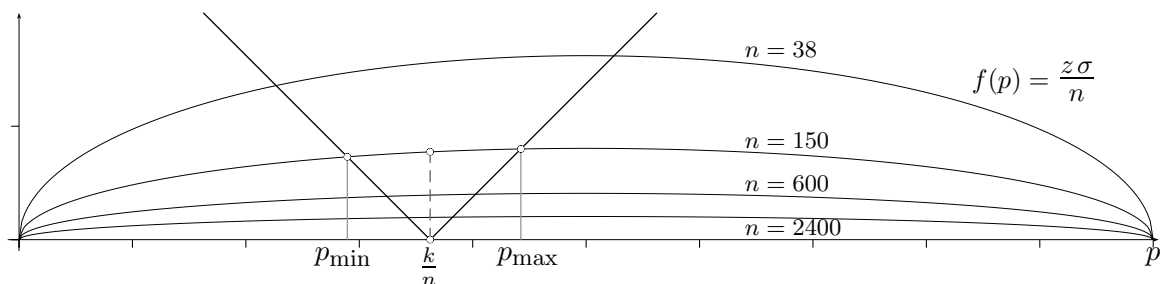
p_{\min} ist eine Lösung der Gleichung $k = \mu + z\sigma$.

Das Konfidenzintervall lautet: $[p_{\min}, p_{\max}]$

Begründe:

Das Konfidenzintervall zum Stichprobenergebnis $X = k$ besteht aus allen p für die gilt (Sicherheitswahrscheinlichkeit α):

$$\left| \frac{k}{n} - p \right| \leq z \frac{\sigma}{n} \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}, \quad z = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$$



Tipp: $a = \pm b$ ($b > 0$) kann zu $|a| = b$ zusammengefasst werden.

Das Wald-Konfidenzintervall mit den Grenzen $\frac{k}{n} \pm \frac{z\sigma}{n}$ ($\frac{k}{n}$ in σ für p eingesetzt) ist hier auch erkennbar.

Aufgaben

1. Von 300 überprüften Autofahrern müssen 75 ein Bußgeld von 50 € wegen fehlender Umweltplakette bezahlen. 2500 Autofahrer könnten überprüft werden.
Welche Einnahmen erhofft sich die Stadtverwaltung aufgrund einer Überschlagsrechnung?
Zu welcher optimistischen (pessimistischen) Schätzung (Sicherheitswahrscheinlichkeit 90%) gelangt eine mathematisch versierte Stadtangestellte mit dem GTR?
2. Die Wahrscheinlichkeit für eine Fehldiagnose bei der Krebsfrüherkennung beträgt 20%. Mit wie vielen Irrtümern ist bei 500 Diagnosen (Sicherheitswahrscheinlichkeit 90%) zu rechnen?
3. Um die Gesamtanzahl der Fische in einem Teich zu schätzen werden 250 Fische gefangen, markiert und wieder ausgesetzt. Zwei Tage später werden 175 Fische gefangen, unter denen sich 49 markierte befinden. Wie groß ist die gesamte Fischpopulation, wenn man eine Aussage auf einem Sicherheitsniveau von 95% treffen will?
4. Elektronische Bauteile werden mit einer Ausschussquote (statistischer Mittelwert) von 2,6% produziert. Untersuchen Sie, ob es für einen der angegebenen Tage eine signifikante Abweichung (Sicherheitsniveau 95,4%) gab.

	Mo	Di	Mi
Anzahl	2000	2200	2600
davon defekt	54	40	84

5. Ein Hersteller beliefert seine Kunden mit Kisten, in denen jeweils 300 Produkte abgepackt sind, deren Ausschussquote (statistischer Mittelwert) 4% beträgt. Welche Garantie kann er geben, um Reklamationen wegen zu vieler unbrauchbarer Produkte praktisch ausschließen zu können (Sicherheitswahrscheinlichkeit 97%)?

Aufgaben

1. Von 300 überprüften Autofahrern müssen 75 ein Bußgeld von 50 € wegen fehlender Umweltplakette bezahlen. 2500 Autofahrer könnten überprüft werden.
Welche Einnahmen erhofft sich die Stadtverwaltung aufgrund einer Überschlagsrechnung?
Zu welcher optimistischen (pessimistischen) Schätzung (Sicherheitswahrscheinlichkeit 90%) gelangt eine mathematisch versierte Stadtangestellte mit dem GTR?
2. Die Wahrscheinlichkeit für eine Fehldiagnose bei der Krebsfrüherkennung beträgt 20%. Mit wie vielen Irrtümern ist bei 500 Diagnosen (Sicherheitswahrscheinlichkeit 90%) zu rechnen?
3. Um die Gesamtanzahl der Fische in einem Teich zu schätzen werden 250 Fische gefangen, markiert und wieder ausgesetzt. Zwei Tage später werden 175 Fische gefangen, unter denen sich 49 markierte befinden. Wie groß ist die gesamte Fischpopulation, wenn man eine Aussage auf einem Sicherheitsniveau von 95% treffen will?
4. Elektronische Bauteile werden mit einer Ausschussquote (statistischer Mittelwert) von 2,6% produziert. Untersuchen Sie, ob es für einen der angegebenen Tage eine signifikante Abweichung (Sicherheitsniveau 95,4%) gab.

	Mo	Di	Mi
Anzahl	2000	2200	2600
davon defekt	54	40	84

5. Ein Hersteller beliefert seine Kunden mit Kisten, in denen jeweils 300 Produkte abgepackt sind, deren Ausschussquote (statistischer Mittelwert) 4% beträgt. Welche Garantie kann er geben, um Reklamationen wegen zu vieler unbrauchbarer Produkte praktisch ausschließen zu können (Sicherheitswahrscheinlichkeit 97%)?

1. Stadtverwaltung: 31250 €
 $0,211 \leq p \leq 0,293$ (Konfidenzintervall mit der Normalverteilung),
GTR: $0,209 \leq p \leq 0,291$
damit optimistische (pessimistische) Schätzung: 36375 € (26125 €)

2. [86; 114]

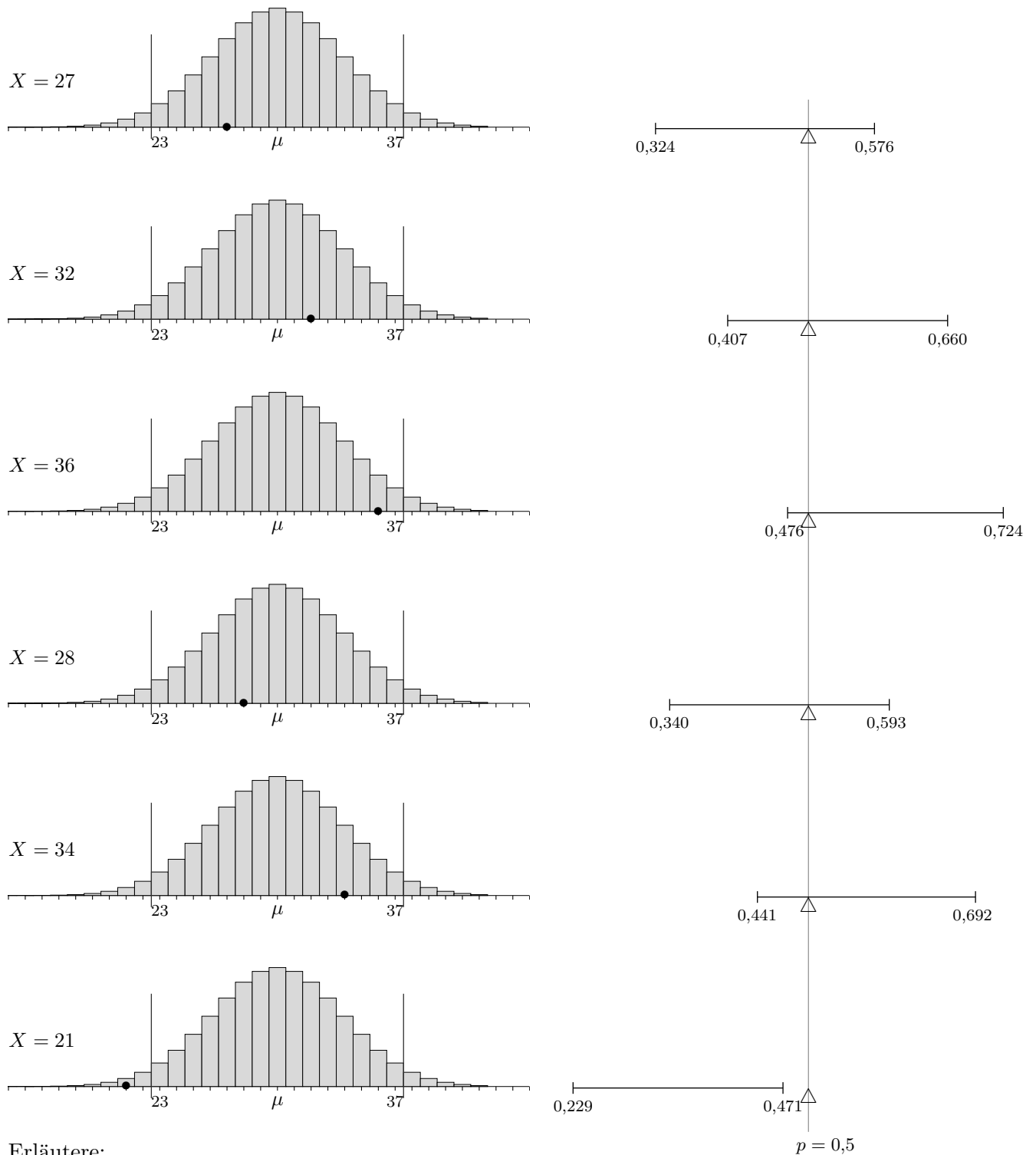
3. Konfidenzintervall (GTR) [0,2135; 0,3465]
Anzahl der Fische im Intervall [722, 1171]

4. Es können die 2σ -Umgebungen oder die Konfidenzintervalle ermittelt werden.
Ein Vergleich mit den Angaben beantwortet die Frage.

5. Garantie: In der Kiste sind höchstens 18 defekte Produkte.

95%-Konfidenzintervall

Wir gehen von einer Binomialverteilung ($n = 60, p = 0,5$ (Δ)) aus mit der 2σ -Umgebung des Erwartungswerts μ und betrachten für verschiedene Stichproben X das Konfidenzintervall. Eine Simulation (GTR) erfolgt mit `1-PropZInt(randBin(n, p), n, α)`, zu finden unter CATALOG P.



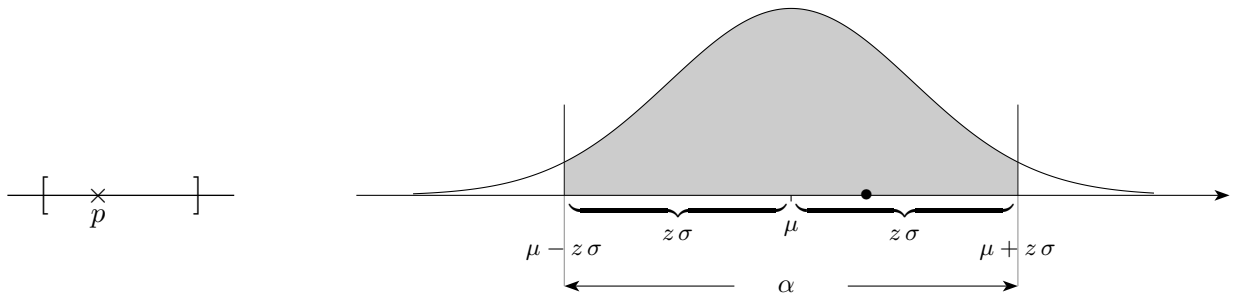
Erläutere:

$X \in 2\sigma$ -Umgebung $\iff p \in$ Konfidenzintervall

d. h. das Konfidenzintervall überdeckt mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit p .

Konfidenzintervall Zusammenfassung

Ein (Stichproben-)Ergebnis X eines Zufallsversuchs liegt vor.
 Die dem Zufallsversuch zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit sei p .
 X liegt dann mit vorgegebener (Sicherheits-)Wahrscheinlichkeit α in der zugehörigen $z\sigma$ -Umgebung.
 Die Wahrscheinlichkeit p ist im Allgemeinen unbekannt.



Wir fragen daher nach allen Wahrscheinlichkeiten, die dem Zufallsversuch zugrunde liegen könnten, d. h. wir fragen nach allen Wahrscheinlichkeiten, deren $z\sigma$ -Umgebung X enthält.

Diese Wahrscheinlichkeiten bilden das Konfidenzintervall.

Die Wahrscheinlichkeit, die dem Zufallsversuch zugrunde liegt, ist mit der (Sicherheits-)Wahrscheinlichkeit α im Konfidenzintervall enthalten.

(Zu beachten ist hierbei, dass p keine Zufallsvariable ist.)

Unmissverständlicher ausgedrückt:

Das Konfidenzintervall überdeckt mit der (Sicherheits-)Wahrscheinlichkeit α die dem Zufallsversuch zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit p .

Ungefäherer Mittelpunkt des Konfidenzintervalls $[p_{\min}, p_{\max}]$ ist $\frac{X}{n}$.

p_{\min} ist Lösung der Gleichung $X = \mu + z\sigma$,

p_{\max} ist Lösung der Gleichung $X = \mu - z\sigma$ mit $z = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$

Das Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit α besteht aus allen p für die gilt:

$$\left| \frac{X}{n} - p \right| \leq z \frac{\sigma}{n} \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Beispiele:

- | | |
|---|------------------|
| 1. $n = 1000, X = 480, \alpha = 95\%$ | $[0,449; 0,511]$ |
| 2. $n = 800, X = 750, \alpha = 90\%$ | $[0,922; 0,950]$ |
| 3. $n = 5000, X = 650, \alpha = 99,9\%$ | $[0,115; 0,146]$ |

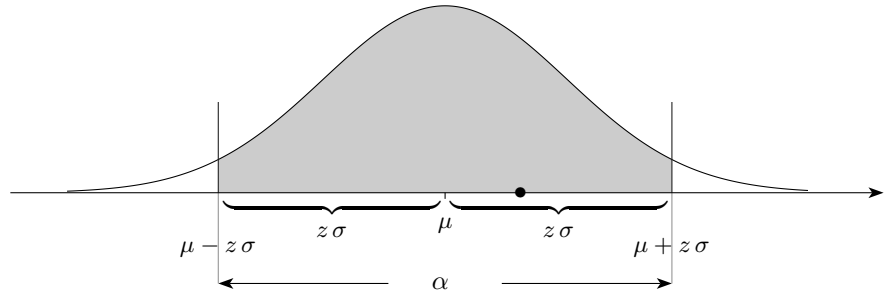
Um abzuschätzen, mit welcher Wahrscheinlichkeit p eine Reißzwecke in die Lage \perp (\times) fällt, werfen wir sie n -mal. Die relative Häufigkeit h_n wird vermutlich nicht die genaue Wahrscheinlichkeit angeben, sie wird in der Nähe von h_n liegen. Mit Konfidenzintervallen wird diese Überlegung präzisiert. Die Methode erinnert an das Jagen mit einer Fliegenklatsche. Zufallsbedingt trifft sie mittig die rel. Häufigkeit in der Hoffnung, das p zu erwischen. Wie kann die Fliegenklatsche vergrößert werden?

Konfidenzintervall, genähert

Ein (Stichproben-)Ergebnis X eines Zufallsversuchs liegt vor.

Die dem Zufallsversuch zugrunde liegenden möglichen Wahrscheinlichkeiten sind gesucht.

X liegt mit vorgegebener (Sicherheits-)Wahrscheinlichkeit α in der zugehörigen $z\sigma$ -Umgebung.



Der Mittelpunkt des Konfidenzintervalls $[p_{\min}, p_{\max}]$ ist (genähert) $\frac{X}{n}$.

p_{\min} ist Lösung der Gleichung $X = \mu + z\sigma$,

p_{\max} ist Lösung der Gleichung $X = \mu - z\sigma$ mit $z = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$

Um eine Näherung für das Konfidenzintervall $[p_{\min}, p_{\max}]$ zu erhalten,

kann $\frac{X}{n}$ für p in σ eingesetzt werden,

d. h. die Grenzen des $z\sigma$ -Intervalls werden lediglich durch n geteilt.

Beispiele:

1. $n = 1000$, $X = 480$, $\alpha = 95\%$ $[0,449; 0,511]$
2. $n = 800$, $X = 750$, $\alpha = 90\%$ $[0,924; 0,952]$
3. $n = 5000$, $X = 650$, $\alpha = 99,9\%$ $[0,114; 0,146]$

Die Schätzung der zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeit p aufgrund eines (Stichproben-)Ergebnisses $X = k$ (hier bei angenommener Binomialverteilung) ist ein fundamentales statistisches Problem. Von einem Vertrauensintervall ist lediglich zu erwarten, dass es möglichst klein ist und mit (mindestens) vorgegebener Sicherheits-Wahrscheinlichkeit α die Trefferwahrscheinlichkeit p überdeckt.

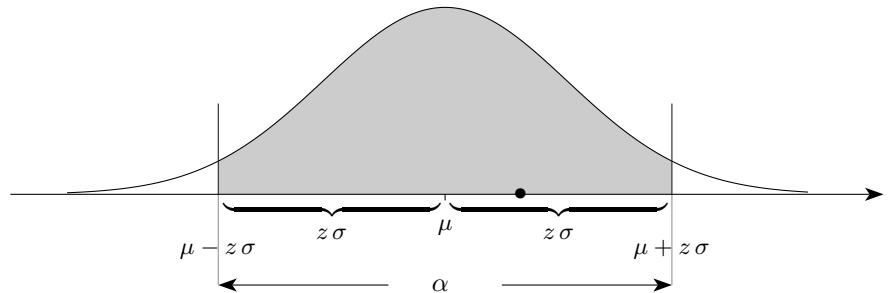
Die einfachste Möglichkeit hierzu ist das genäherte oder Wald-Konfidenzintervall. Dieses wird auch vom GTR ausgegeben (1-PropZInt im STAT-Tests-Menü, für das Z gibt es für mich keine sinnvolle Erklärung). Weitere Vertrauensintervalle sind nach Wilson, Jeffrey u. a. benannt.

Um das Jahr 2000 wurden die Überdeckungswahrscheinlichkeiten und die Konfidenzintervalllängen der einzelnen Intervall-Arten genauer untersucht (siehe Verschiedenes, Überdeckungswahrscheinlichkeit).

Vertrauensintervalle sollten zur sicheren Seite gerundet werden (linke Grenze ab-, rechte aufrunden). Damit wird eine mögliche Verkleinerung der Überdeckungswahrscheinlichkeit ausgeschlossen (siehe Excel-Blatt unter Verschiedenes). Je kleiner n umso weniger Dezimalstellen sollten berücksichtigt werden.

Notwendiger Stichprobenumfang

Welcher Stichprobenumfang n ist erforderlich, um eine unbekannte Wahrscheinlichkeit p mit der durch die Länge des Konfidenzintervalls vorgegebenen Genauigkeit d zu ermitteln? Die Sicherheitswahrscheinlichkeit sei α . Erinnern wir uns zunächst an die Definition des Konfidenzintervalls zum Stichprobenergebnis $X = k$, siehe Seite 8.



$$z = \Phi^{-1}\left(\frac{1 + \alpha}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \mu - z\sigma &\leq k \leq \mu + z\sigma && \text{beachte: } \mu = np \\ \Leftrightarrow p - z\frac{\sigma}{n} &\leq \frac{k}{n} \leq p + z\frac{\sigma}{n} \\ \Leftrightarrow -z\frac{\sigma}{n} &\leq \frac{k}{n} - p \leq z\frac{\sigma}{n} \end{aligned}$$

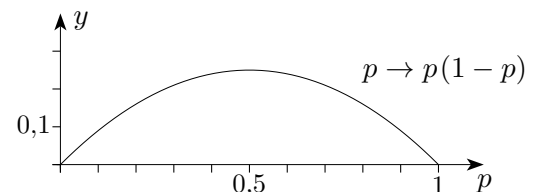
$$\text{oder } \left| \frac{k}{n} - p \right| \leq z\frac{\sigma}{n}$$

Für die Näherung wird das p in σ durch $\frac{k}{n}$ ersetzt. Dies ist jedoch nicht für $k = 0$ und $k = n$ möglich.

$$\text{oder } p_{\max/\min} = \frac{k}{n} \pm \underbrace{z\frac{\sigma}{n}}_{\text{Standardfehler}}$$

Die Länge des Konfidenzintervalls soll also d betragen, d. h.

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{z\sigma}{n} &\leq d && \text{quadrieren} \\ \frac{4z^2 pq}{n} &\leq d^2 \\ 4\left(\frac{z}{d}\right)^2 pq &\leq n \end{aligned}$$



Hierbei ist das minimale n zu bestimmen.

Falls eine Näherung für p bekannt ist, kann sie verwendet (eingesetzt) werden, ansonsten ist vom ungünstigsten Fall $p = \frac{1}{2}$ auszugehen. Mit $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ ergibt dies: $\left(\frac{z}{d}\right)^2 \leq n_{\min}$

Mit der halben Intervalllänge e ($d = 2e$) lautet die Bedingung: $\left(\frac{z}{e}\right)^2 pq \leq n_{\min}$

Falls eine (kleinere) Vorstichprobe ein (grobes) Konfidenzintervall liefert, das 0,5 nicht enthält, wird als Näherung diejenige Grenze genommen, der 0,5 am nächsten liegt. Warum?

Stichprobenumfang

1. Um die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeit p einer binomialverteilten Zufallsvariablen X zu ermitteln (einzugrenzen), soll eine Stichprobe vom Umfang n erhoben werden. Wie groß ist der Stichprobenumfang (Sicherheitswahrscheinlichkeit 90%) mindestens zu wählen, damit das Konfidenzintervall die Länge 0,05 nicht überschreitet, und wenn
 - a) die Wahrscheinlichkeit $p = 0,2$ als annähernd richtig angesehen wird,
 - b) die Durchführung einer kleinen Umfrage für p den Bereich 0,6 bis 0,7 ergeben hat,
 - c) keine Informationen über p vorliegen.
2. Variation der 1. Aufgabe
Wie ändern sich die Stichprobenumfänge, falls die Konfidenzintervalllänge halbiert wird? Stellen Sie eine Vermutung über den allgemeinen Zusammenhang auf und begründen Sie sie.
3. Zur Feststellung des Bekanntheitsgrades eines pharmazeutischen Produkts soll eine Repräsentativbefragung vorgenommen werden.
Wie umfangreich muss die Stichprobe sein, wenn die Abweichung des durch die Befragung ermittelten Schätzwertes \hat{p} vom wahren Bekanntheitsgrad p mit einer Sicherheit von 95% den Wert 0,02 nicht überschreiten soll?
4. Eine Umfrage bei 100 Personen ergab, dass niemand das besagte Produkt kennt. Bestimmen Sie aus dieser Stichprobe ein 98%-Konfidenzintervall für p .

Stichprobenumfang

- Um die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeit p einer binomialverteilten Zufallsvariablen X zu ermitteln (einzugrenzen), soll eine Stichprobe vom Umfang n erhoben werden. Wie groß ist der Stichprobenumfang (Sicherheitswahrscheinlichkeit 90%) mindestens zu wählen, damit das Konfidenzintervall die Länge 0,05 nicht überschreitet, und wenn
 - die Wahrscheinlichkeit $p = 0,2$ als annähernd richtig angesehen wird, $n = 693$
 - die Durchführung einer kleinen Umfrage für p den Bereich 0,6 bis 0,7 ergeben hat, 1039
 - keine Informationen über p vorliegen. 1083
- Variation der 1. Aufgabe
Wie ändern sich die Stichprobenumfänge, falls die Konfidenzintervalllänge halbiert wird? $4n$
Stellen Sie eine Vermutung über den allgemeinen Zusammenhang auf und begründen Sie sie.
$$\left(\frac{z}{d}\right)^2 = \left(\frac{z}{d}\right)^2 \cdot k^2$$

Mit $\left(\frac{z}{d}\right)^2 \leq n_{\min}$ folgt (Multiplikation mit k^2) $\left(\frac{z}{\frac{d}{k}}\right)^2 \leq n_{\min} \cdot k^2$
- Zur Feststellung des Bekanntheitsgrades eines pharmazeutischen Produkts soll eine Repräsentativbefragung vorgenommen werden.
Wie umfangreich muss die Stichprobe sein, wenn die Abweichung des durch die Befragung ermittelten Schätzwertes \hat{p} vom wahren Bekanntheitsgrad p mit einer Sicherheit von 95% den Wert 0,02 nicht überschreiten soll? $d = 0,04, n = 2401$
- Eine Umfrage bei 100 Personen ergab, dass niemand das besagte Produkt kennt.
Bestimmen Sie aus dieser Stichprobe ein 98%-Konfidenzintervall für p . $[0; 0,05]$

1. Eine Partei A will wissen, ob ihr in einer bevorstehenden Wahl die Mehrheit sicher ist. Dazu lässt sie eine Meinungsumfrage unter 800 Wahlberechtigten durchführen. 54% der Befragten geben an, die Partei A zu wählen. Welche Erfolgswahrscheinlichkeiten können mit 95,4%-iger Sicherheit dem Stichprobenergebnis zugrundeliegen?

2. In einer Stichprobe vom Umfang 600 fand man 257 Personen mit der Blutgruppe A. Wie viele mögliche Blutspender für diese Blutgruppe wird man finden, wenn in der betreffenden Bevölkerungsgruppe 450000 Erwachsene leben? (95,4%-iger Sicherheitswahrscheinlichkeit)

3. Einem Elektrohändler werden Glühlampen zweiter Wahl angeboten. Für den Händler wäre der Kauf vorteilhaft, wenn mehr als 80% der Glühlampen in Ordnung wären. Er prüft 60 Glühlampen.
 - a) Bei welcher Mindestanzahl intakter Glühlampen sollte der Händler kaufen?
 - b) In einer Stichprobe sind 50 Glühlampen in Ordnung. Der Händler nimmt das Angebot nicht an. Hätte es sein können, dass der Kauf für ihn günstig gewesen wäre?

4. Um die Anzahl abzuschätzen, mit der Tiere einer bestimmten Art in einem Gebiet vorhanden sind, fängt man Tiere dieser Art ein, markiert sie und setzt sie wieder aus. Nach einiger Zeit fängt man erneut Tiere dieser Art und zählt, wie viele davon markiert sind.
 - a) In einem abgegrenzten Waldstück werden 70 Hasen markiert und nach einigen Tagen werden insgesamt 50 Hasen beobachtet, von denen 17 markiert sind.
 - b) Von 100 markierten Fischen eines Teichs werden 27 beim zweiten Mal gefangen, 108 Fische sind unmarkiert.

1. Eine Partei A will wissen, ob ihr in einer bevorstehenden Wahl die Mehrheit sicher ist. Dazu lässt sie eine Meinungsumfrage unter 800 Wahlberechtigten durchführen. 54% der Befragten geben an, die Partei A zu wählen. Welche Erfolgswahrscheinlichkeiten können mit 95,4%-iger Sicherheit dem Stichprobenergebnis zugrundeliegen?

$$0,505 \leq p \leq 0,575$$

2. In einer Stichprobe vom Umfang 600 fand man 257 Personen mit der Blutgruppe A. Wie viele mögliche Blutspender für diese Blutgruppe wird man finden, wenn in der betreffenden Bevölkerungsgruppe 450000 Erwachsene leben? (95,4%-iger Sicherheitswahrscheinlichkeit)

$$0,389 \leq p \leq 0,469 \implies 175000 \leq N \leq 211000$$

3. Einem Elektrohändler werden Glühlampen zweiter Wahl angeboten. Für den Händler wäre der Kauf vorteilhaft, wenn mehr als 80% der Glühlampen in Ordnung wären. Er prüft 60 Glühlampen.

- a) Bei welcher Mindestanzahl intakter Glühlampen sollte der Händler kaufen?
 b) In einer Stichprobe sind 50 Glühlampen in Ordnung. Der Händler nimmt das Angebot nicht an. Hätte es sein können, dass der Kauf für ihn günstig gewesen wäre?

a) $p = 0,8$

2σ -Umgebung = $[42, 54]$. Die linke Grenze ist für dieses Problem ohne Belang.

Ab 55 intakter Glühlampen sollte der Händler die Glühlampen kaufen.

b) 95,4%-Konfidenzintervall: $0,717 \leq p \leq 0,908$

GTR: $0,737 \leq p \leq 0,930$

Alle Erfolgswahrscheinlichkeiten mit $0,8 \leq p \leq 0,908$ sind für den Händler günstig.

4. Um die Anzahl abzuschätzen, mit der Tiere einer bestimmten Art in einem Gebiet vorhanden sind, fängt man Tiere dieser Art ein, markiert sie und setzt sie wieder aus. Nach einiger Zeit fängt man erneut Tiere dieser Art und zählt, wie viele davon markiert sind.

- a) In einem abgegrenzten Waldstück werden 70 Hasen markiert und nach einigen Tagen werden insgesamt 50 Hasen beobachtet, von denen 17 markiert sind.
 b) Von 100 markierten Fischen eines Teichs werden 27 beim zweiten Mal gefangen, 108 Fische sind unmarkiert.

a) $X = 17, n = 50, 95,4\%$ -Konfidenzintervall: $0,222 \leq p \leq 0,481$ GTR: $0,206 \leq p \leq 0,474$

Diese mit dem Stichprobenergebnis verträglichen Anteile p entsprechen dem Anteil $\frac{70}{N}$, wobei N die Anzahl aller Hasen ist.

Für N erhalten wir: $146 \leq N \leq 314$

GTR: $148 \leq N \leq 339$

b) $X = 27, n = 135, 95,4\%$ -Konfidenzintervall: $0,140 \leq p \leq 0,277 \implies 361 \leq N \leq 713$

: $0,131 \leq p \leq 0,269 \implies 372 \leq N \leq 763$

Wahr oder falsch?

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

- a) Eine Intervallschätzung für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit wird mit wachsendem Stichprobenumfang immer genauer.
- b) Wenn die Sicherheitswahrscheinlichkeit (das Sicherheitsniveau) vergrößert wird, dann nimmt die Größe des Konfidenzintervalls ab.
- c) Der Punktschätzer liegt immer genau in der Mitte des Konfidenzintervalls.
- d) Wenn man den Stichprobenumfang verdoppelt, wird das Konfidenzintervall halb so groß.

Wahr oder falsch?

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

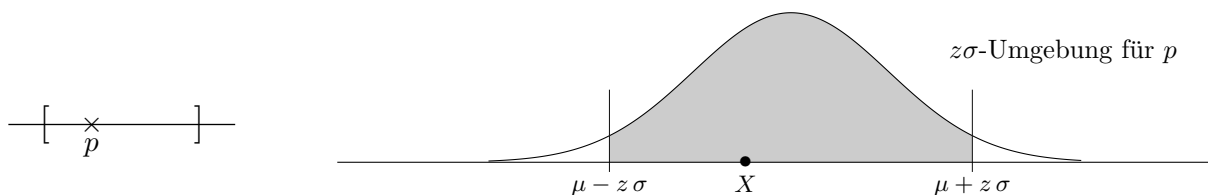
- a) Eine Intervallschätzung für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit wird mit wachsendem Stichprobenumfang immer genauer.
- b) Wenn die Sicherheitswahrscheinlichkeit (das Sicherheitsniveau) vergrößert wird, dann nimmt die Größe des Konfidenzintervalls ab.
- c) Der Punktschätzer liegt immer genau in der Mitte des Konfidenzintervalls.
- d) Wenn man den Stichprobenumfang verdoppelt, wird das Konfidenzintervall halb so groß.

- a) Stimmt, da mit wachsendem n die Intervalllänge kleiner wird.
Das ist (z.B.) an der Länge des (genäherten) Wald-Konfidenzintervalls zu erkennen.
- b) Stimmt nicht. Dies erkennt man z.B. daran, dass bei einem Sicherheitsniveau von 100% die Intervalllänge 1 ist, da sämtliche Werte von 0 bis 1 im Intervall enthalten sein müssen.
Für ein größeres Sicherheitsniveau wird der z -Wert auch größer, und damit auch die Intervalllänge.
- c) Das gilt allgemein nur für das (genäherte) Wald-Konfidenzintervall.
- d) Das stimmt nicht. Näherungsweise gilt für Konfidenzintervalle:
Wenn man den Stichprobenumfang vervierfacht, dann ist das Konfidenzintervall halb so groß.

In der mathematischen Literatur wird der z -Wert mit $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ angegeben.

Im Gegensatz zu der hier verwendeten Schreibweise beträgt die Sicherheitswahrscheinlichkeit dann $1 - \alpha$.

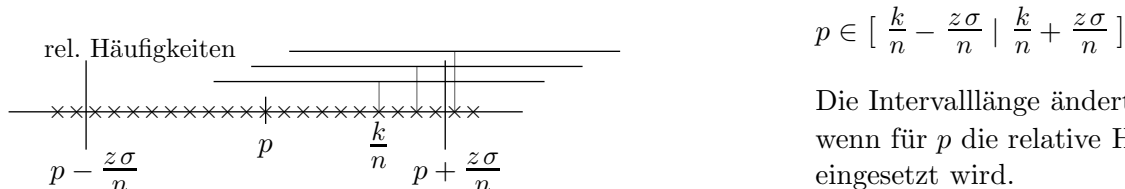
Konfidenzintervall, noch einmal das Wichtigste



Das Konfidenzintervall zum Stichprobenergebnis X (gegeben n , Sicherheitswahrscheinlichkeit α) besteht aus allen p , für die das Stichprobenergebnis X in der $z\sigma$ -Umgebung liegt.

$$\begin{aligned} \mu - z\sigma &\leq X \leq \mu + z\sigma && \text{beachte: } \mu = np, \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \\ \Leftrightarrow p - z\frac{\sigma}{n} &\leq \frac{X}{n} \leq p + z\frac{\sigma}{n} \\ \Leftrightarrow -z\frac{\sigma}{n} &\leq \frac{X}{n} - p \leq z\frac{\sigma}{n} \\ \Leftrightarrow \left| \frac{X}{n} - p \right| &\leq z\frac{\sigma}{n} && z = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

Sei p die (unbekannte) Wahrscheinlichkeit.
Prognoseintervall I_{rel} für die relativen Häufigkeiten:



Die Intervalllänge ändert sich kaum, wenn für p die relative Häufigkeit $\frac{k}{n}$ eingesetzt wird.

Das genäherte oder Wald-Konfidenzintervall erhalten wir, indem zu $\frac{k}{n}$ (statt p) die Grenzen des Schwankungsintervalls bestimmt und diese durch n dividiert werden.
Das Stichprobenergebnis $X = k$ liegt mit der Sicherheitswahrscheinlichkeit α in der $z\sigma$ -Umgebung von μ . Dasselbe gilt für die relativen Häufigkeiten und dem zugehörigen Intervall I_{rel} . Das Konfidenzintervall überdeckt genau dann p , wenn $\frac{k}{n}$ in I_{rel} fällt (beachte die Längen), also mit der Wahrscheinlichkeit α .
Mit 1-PropZInt (GTR, STAT-Tests-Menü) kann dieses Konfidenzintervall direkt ermittelt werden.

Stichprobenlänge

Die Länge des Konfidenzintervalls soll (höchstens) d betragen, d. h.

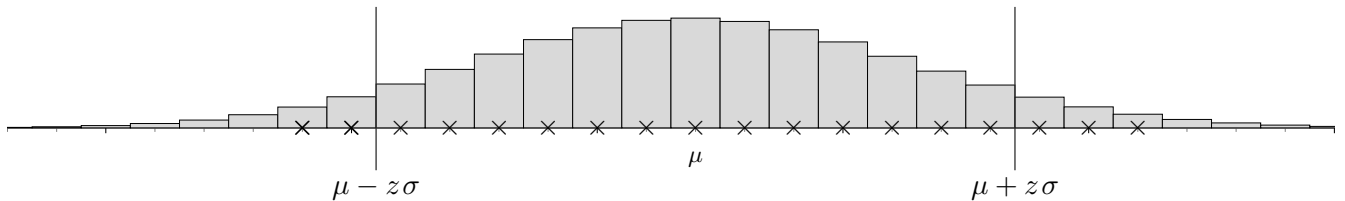
$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{z\sigma}{n} &\leq d && \text{quadrieren} \\ \frac{4z^2pq}{n} &\leq d^2 \\ 4\left(\frac{z}{d}\right)^2 pq &\leq n \end{aligned}$$

Hierbei ist das minimale n zu bestimmen.

Falls eine Näherung für p bekannt ist, kann sie verwendet (eingesetzt) werden, ansonsten ist vom ungünstigsten Fall $p = \frac{1}{2}$ auszugehen.

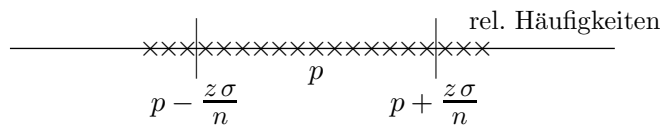
Prognoseintervall Konfidenzintervall

Sachlage: Die Wahrscheinlichkeit p ist uns bekannt.



Die Ergebnisse einer Stichprobe vom Umfang n werden mit der Sicherheitswahrscheinlichkeit α in der $z\sigma$ -Umgebung liegen. Diese heißt auch Schwankungs- oder Prognoseintervall.

Die relativen Häufigkeiten $\frac{k}{n}$ der Stichprobenergebnisse liegen dann in $\left[p - \frac{z\sigma}{n} \mid p + \frac{z\sigma}{n} \right]$, dem Prognoseintervall für die relativen Häufigkeiten (Division durch n).



Zu gegebenem p sind also Aussagen über die zu erwartenden Stichprobenergebnisse bzw. über die relativen Häufigkeiten möglich (man schließt von der Gesamtheit auf die Stichprobe).

Nehmen wir nun die umgekehrte Blickrichtung ein.

Das p ist uns nicht bekannt, es liegt jedoch ein Stichprobenergebnis $X = k$ vor.

Die Punktschätzung $\frac{k}{n}$ ist eine Näherung für p .

Ein Intervall, das mit einer vorgegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit die uns unbekannte Wahrscheinlichkeit p überdeckt, heißt Konfidenzintervall.

Das Wald-Konfidenzintervall, das der GTR mit 1-PropZInt ermittelt, hat die Grenzen $\frac{k}{n} \pm \frac{z\sigma}{n}$ ($\frac{k}{n}$ in σ für p eingesetzt).

Mit demselben GRT-Befehl können auch (auf einfache Weise, trotz der unterschiedlichen Blickrichtungen) die Prognoseintervalle für die relativen Häufigkeiten und der Stichprobenergebnisse ermittelt werden.

Mit dem bekannten p ist hier lediglich $k = p \cdot n$ zu wählen. Die mit dem GTR ermittelten Intervallgrenzen sind für das Prognoseintervall der Stichprobenergebnisse noch mit n zu multiplizieren.

Beispiel

$n = 500$, $p = 0,5$, $\alpha = 98\%$

Prognoseintervalle ($k = 250$)

$[0,448; 0,552]$

$[224; 276]$