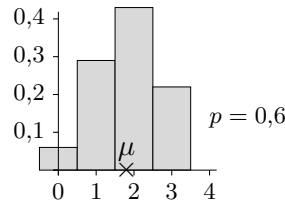
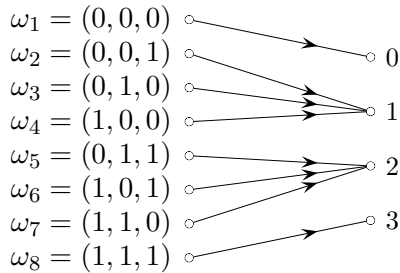
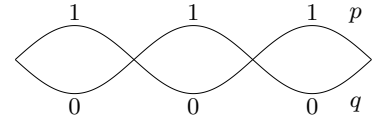


Erwartungswert der Binomialverteilung

Wir betrachten eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 3$ und bestimmen den Erwartungswert der Zufallsvariablen $X(\omega)$, die die Anzahl der Treffer (Einsen) angibt, z.B. $X(1, 0, 1) = 2$.



k		0		1		2		3	
$P(X = k)$		q^3		$3pq^2$		$3p^2q$		p^3	

Mit der Verteilung der Zufallsvariablen X kann der Erwartungswert mühelos berechnet werden.

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 0 \cdot q^3 + 1 \cdot 3pq^2 + 2 \cdot 3p^2q + 3 \cdot p^3 \\
 &= 3p \underbrace{(q^2 + 2pq + p^2)}_{(q+p)^2} \\
 &= 3p \qquad \text{beachte: } p + q = 1
 \end{aligned}$$

Es ist zu vermuten, dass für eine Bernoulli-Kette der Länge n gilt: $E(X) = np$ und dass dieses Ergebnis dadurch zustande kommt, dass der Erwartungswert für eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 1$, nämlich p , nur mit n multipliziert wird.

Zerlegen wir daher die Zufallsvariable X in: $X = X_1 + X_2 + X_3$

oder mit Argumenten: $X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega)$,

wobei $X_i(\omega)$ die i -te Stelle von ω angibt. Für X_1 (wie auch für X_2, X_3) gilt:

k		0		1	
$P(X_1 = k)$		q		p	

Damit ist $E(X_i) = p$

und $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3p$,

das Allgemeine in dieser Überlegung ist nun zu erkennen.

Jedoch ist die Begründung noch nicht ganz vollständig, es fehlt der Nachweis der Linearität:

$$E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$$

Seien daher X und Y zwei beliebige Zufallsvariable auf Ω , zu zeigen ist: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Aus der obigen Verteilungstabelle von X ist ersichtlich, dass der Erwartungswert auch mit $E(X) = X(\omega_1) \cdot p_1 + X(\omega_2) \cdot p_2 + \dots + X(\omega_n) \cdot p_n$ errechnet werden kann (z.B. ist $3p^2q$ die Summe der Wahrscheinlichkeiten dreier Elementarereignisse). Mit der Tabelle kann $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ nun leicht eingesehen werden.

<i>Elementarereignis</i>		ω_1	ω_2	ω_3	...	ω_n
Wahrscheinlichkeit von ω_i		p_1	p_2	p_3	...	p_n
$X(\omega_i)$		x_1	x_2	x_3	...	x_n
$Y(\omega_i)$		y_1	y_2	y_3	...	y_n

Nämlich:

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= (x_1 + y_1) \cdot p_1 + (x_2 + y_2) \cdot p_2 + \dots + (x_n + y_n) \cdot p_n \\ &= \underbrace{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n}_{E(X)} + \underbrace{y_1 \cdot p_1 + y_2 \cdot p_2 + \dots + y_n \cdot p_n}_{E(Y)} \\ &= \end{aligned}$$