Vektorrechnung Abiturprüfung Sachsen 1999

3. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1\,|\,2\,|\,3)$, $B(4\,|\,5\,|\,3)$, $C(1\,|\,2\,|\,10)$, $D(1\,|\,0\,|\,5)$, $F(-3\,|\,4\,|\,2)$ und die Ebene $E:\ x - y = -1$ gegeben. Der Punkt C liegt in der Ebene E.

   a) Weisen Sie nach, dass die durch die Punkte A und B verlaufende Gerade in der Ebene E liegt. Geben Sie die Koordinaten aller Schnittpunkte dieser Ebene mit den Koordinatenachsen an und beschreiben Sie die Lage der Ebene E im Koordinatensystem.

   b) Durch die Punkte D und F verläuft die Gerade g.
   Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und den Schnittwinkel der Geraden g mit der Ebene E.

   c) Ein Punkt Q wird an der Ebene E gespiegelt.
   Der Bildpunkt Q' hat die Koordinaten $Q'(-4\,|\,-1\,|\,11)$. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes Q und den Abstand der Punkte Q und Q' voneinander.

   d) Das Dreieck ABC ist die Grundfläche von Pyramiden, die ein Volumen von 14 haben. Ermitteln Sie die Höhe einer solchen Pyramide. Jede Pyramidenspitze dieser Pyramiden liegt in genau einer von zwei parallelen Ebenen. Ermitteln Sie für diese Ebenen je eine Gleichung.

3. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1\,|\,2\,|\,3)$, $B(4\,|\,5\,|\,3)$, $C(1\,|\,2\,|\,10)$, $D(1\,|\,0\,|\,5)$, $F(-3\,|\,4\,|\,2)$ und die Ebene $E:\ x - y = -1$ gegeben. Der Punkt C liegt in der Ebene E.

a) Weisen Sie nach, dass die durch die Punkte A und B verlaufende Gerade in der Ebene E liegt. Geben Sie die Koordinaten aller Schnittpunkte dieser Ebene mit den Koordinatenachsen an und beschreiben Sie die Lage der Ebene E im Koordinatensystem.

$A \in E,\ B \in E$

$S_x(-1\,|\,0\,|\,0)$, $S_y(0\,|\,1\,|\,0)$, E ist parallel zur z-Achse

b) Durch die Punkte D und F verläuft die Gerade g.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und den Schnittwinkel der Geraden g mit der Ebene E.

$S\left(0\,|\,1\,|\,\frac{17}{4}\right)$, $\alpha = 62{,}1^\circ$

c) Ein Punkt Q wird an der Ebene E gespiegelt.
Der Bildpunkt Q' hat die Koordinaten $Q'(-4\,|\,-1\,|\,11)$. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes Q und den Abstand der Punkte Q und Q' voneinander.

Senkrechte zu E durch Q' $\quad h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt von h und E: $T(-3\,|\,-2\,|\,11)$

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ'} + 2\,\overrightarrow{Q'T} \quad \Longrightarrow \quad Q(-2\,|\,-3\,|\,11)$

$d(Q, Q') = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

d) Das Dreieck ABC ist die Grundfläche von Pyramiden, die ein Volumen von 14 haben. Ermitteln Sie die Höhe einer solchen Pyramide. Jede Pyramidenspitze dieser Pyramiden liegt in genau einer von zwei parallelen Ebenen. Ermitteln Sie für diese Ebenen je eine Gleichung.

$V = \frac{1}{3}\,G \cdot h$, $\quad G = \frac{\sqrt{18} \cdot 7}{2}$, $\quad \Delta ABC$ ist rechtwinklig, $\quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$h = 2\sqrt{2}$

$E_1:\quad x - y = 3$

$E_2:\quad x - y = -5$

(siehe HNF)