Parallelogrammschatten-Aufgabe Abiturprüfung LK Bayern 2004

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(-2\,|\,5\,|\,-2)$, $B(1\,|\,2\,|\,-2)$, $C(10\,|\,5\,|\,1)$ sowie die Ebene $E:\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 7 = 0$ gegeben.

1. a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts D so, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist, und berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunkts M. Legen Sie ein Koordinatensystem an (Querformat, Ursprung in Seitenmitte) und tragen Sie das Parallelogramm $ABCD$ sowie den Punkt M ein.
[Zur Kontrolle: $M(4\,|\,5\,|\,-0{,}5)$]

   b) Zeigen Sie, dass das Parallelogramm $ABCD$ in einer Parallelebene zur Ebene E liegt, die nicht mit E identisch ist.

   c) Die Parallelogrammfläche schneidet die x_1x_2-Ebene in der Strecke $[GH]$. Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte G und H und tragen Sie die Strecke $[GH]$ in die angelegte Zeichnung ein.
[Zur Kontrolle: $G(4\,|\,7\,|\,0)$ und $H(7\,|\,4\,|\,0)$]

   d) In welchem Verhältnis wird die Fläche des Parallelogramms durch die x_1x_2-Ebene geteilt? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. a) S ist der Punkt in E, der vom Diagonalenschnittpunkt M den geringsten Abstand hat. Berechnen Sie die Koordinaten von S und zeichnen Sie die Pyramide $ABCDS$ in Ihre Zeichnung ein.
[Zur Kontrolle: $S(3\,|\,4\,|\,3{,}5)$]

   b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCDS$.

3. S' sei der Spiegelpunkt von S bezüglich der Ebene, in der das Parallelogramm $ABCD$ liegt.

   a) Berechnen Sie die Koordinaten von S' und tragen Sie S' in die Zeichnung ein.

   In S' sei eine punktförmige Lichtquelle angebracht. Die Parallelogrammfläche sei lichtundurchlässig. Die Lichtquelle erzeugt von diesem Parallelogramm in der Ebene E das Schattenbild $A'B'C'D'$.

   b) Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunktes A' von A. Tragen Sie ohne weitere Rechnung das Bildviereck $A'B'C'D'$ in die Zeichnung ein.

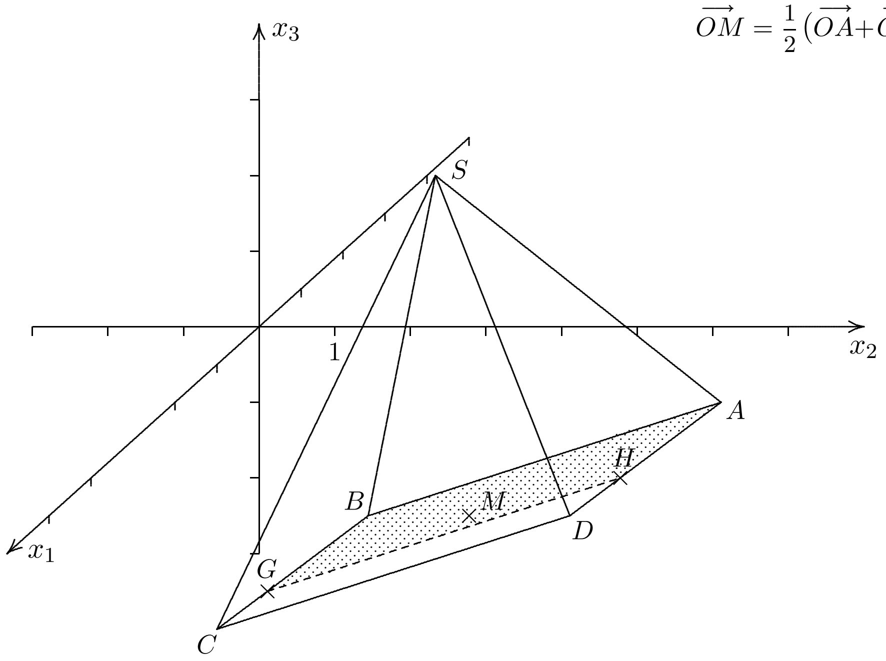
Parallelogrammschatten-Aufgabe   Abiturprüfung LK Bayern 2004 Lösungen

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(-2\,|\,5\,|\,-2)$, $B(1\,|\,2\,|\,-2)$, $C(10\,|\,5\,|\,1)$ sowie die Ebene $E:\;\; x_1 + x_2 - 4x_3 + 7 = 0$ gegeben.

1. a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts D so, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist, und berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunkts M. Legen Sie ein Koordinatensystem an (Querformat, Ursprung in Seitenmitte) und tragen Sie das Parallelogramm $ABCD$ sowie den Punkt M ein.

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC},\;\; D(7\,|\,8\,|\,1)$

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\big(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\big),\;\; M(4\,|\,5\,|\,-0{,}5)$



b) Zeigen Sie, dass das Parallelogramm $ABCD$ in einer Parallelebene zur Ebene E liegt, die nicht mit E identisch ist.

Parallelogrammfläche: $\;\; x_1 + x_2 - 4x_3 - 11 = 0$

Normalenvektoren gleich, Abstand zum Ursprung verschieden

c) Die Parallelogrammfläche schneidet die x_1x_2-Ebene in der Strecke $[GH]$. Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte G und H und tragen Sie die Strecke $[GH]$ in die angelegte Zeichnung ein.

[Zur Kontrolle: $G(4\,|\,7\,|\,0)$ und $H(7\,|\,4\,|\,0)$]   *Spurpunkte,* $x_3 = 0$

d) In welchem Verhältnis wird die Fläche des Parallelogramms durch die x_1x_2-Ebene geteilt? Begründen Sie Ihre Antwort.

$[GH]$ verläuft parallel zu den Parallelogrammseiten $[AB]$ und $[CD]$
und teilt die beiden anderen Seiten im Verhältnis 2:1.
Dieses Verhältnis überträgt sich auf die Teilflächen.

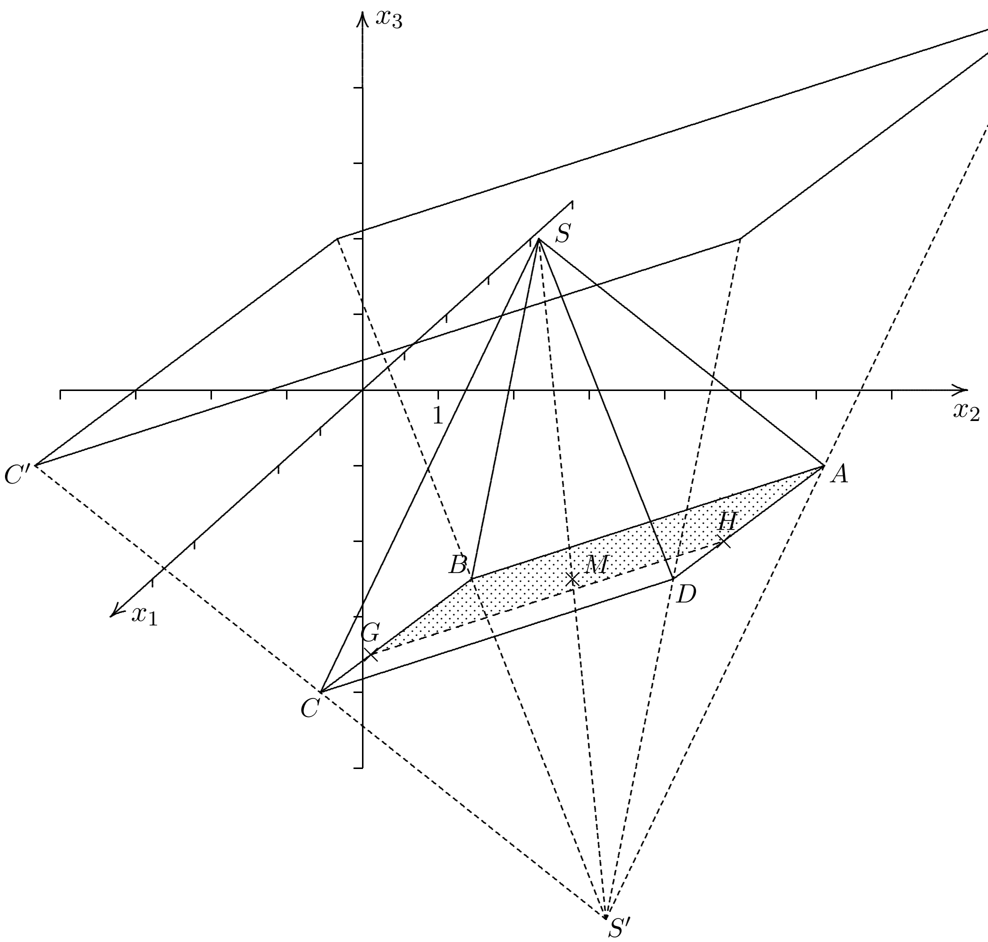
2. a) S ist der Punkt in E, der vom Diagonalenschnittpunkt M den geringsten Abstand hat. Berechnen Sie die Koordinaten von S und zeichnen Sie die Pyramide $ABCDS$ in Ihre Zeichnung ein.

[Zur Kontrolle: $S(3\,|\,4\,|\,3{,}5)$]   *Schnitt der Geraden* $g\colon\; \vec{x} = \overrightarrow{OM} + \lambda\vec{n}$ *mit* E

b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCDS$.

$V = \frac{1}{3}\,\big|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\big|\cdot\big|\overrightarrow{MS}\big| = 54$

oder $V = \frac{1}{3}\,\big|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{MS}\big|$



3. S' sei der Spiegelpunkt von S bezüglich der Ebene, in der das Parallelogramm $ABCD$ liegt.

   a) Berechnen Sie die Koordinaten von S' und tragen Sie S' in die Zeichnung ein.

$$\overrightarrow{OS'} = \overrightarrow{OS} + 2\cdot\overrightarrow{SM},\ \ S'(5\,|\,6\,|\,-4{,}5)$$

In S' sei eine punktförmige Lichtquelle angebracht. Die Parallelogrammfläche sei lichtundurchlässig. Die Lichtquelle erzeugt von diesem Parallelogramm in der Ebene E das Schattenbild $A'B'C'D'$.

   b) Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunktes A' von A. Tragen Sie ohne weitere Rechnung das Bildviereck $A'B'C'D'$ in die Zeichnung ein.

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OS'} + 2\cdot\overrightarrow{S'A},\ \ A'(-9\,|\,4\,|\,-0{,}5)$$

beachte: Das Parallelogramm $ABCD$ liegt parallel zum Parallelogramm $A'B'C'D'$.

Es liegt eine zentrische Streckung mit dem Zentrum S' und dem Faktor 2 vor.

Pyramidenzerlegung-Aufgabe Abiturprüfung LK Bayern 2004

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $A(10\,|\,0\,|\,0)$, $B(0\,|\,4\,|\,0)$, $S(0\,|\,0\,|\,6)$ sowie die Ebenenschar

$$E_t: \; 3x_2 + tx_3 - 3t = 0 \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

gegeben. Die Punkte A, B und S legen die Ebene F fest.

1. a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Normalenform.

   [mögliches Ergebnis: $6x_1 + 15x_2 + 10x_3 - 60 = 0$]

   b) Berechnen Sie, unter welchem Winkel die Ebene F die x_1x_2-Ebene schneidet.

   c) Zeigen Sie, dass die Ebene E_2 parallel zur Geraden BS ist.

   d) Zeigen Sie, dass die zu AO parallele Mittelparallele des Dreiecks AOS identisch ist mit der Geraden p, die alle Ebenen der Schar E_t gemeinsam haben.

2. Die Punkte A, B, O und S bilden die Ecken der Pyramide $ABOS$.

   a) Legen Sie ein Koordinatensystem an. Zeichnen Sie die Pyramide $ABOS$, die Gerade p und die Schnittfläche der Ebene E_2 mit der Pyramide ein.

   b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABOS$.

   c) Zeigen Sie, dass die Ebene E_2 die Pyramide $ABOS$ in zwei Teilkörper mit gleichem Volumen zerlegt.
   (Hinweis: Zerlegen Sie einen der beiden Teilkörper in ein dreiseitiges Prisma und eine dreiseitige Pyramide.)

3. a) Zeigen Sie, dass $M(1{,}2\,|\,1{,}2\,|\,1{,}2)$ der Mittelpunkt der Inkugel K der Pyramide $ABOS$ ist.

   b) Die Ebenenschar E_t enthält neben der x_1x_3-Ebene eine weitere Tangentialebene von K. Berechnen Sie den zugehörigen Wert von t.

Pyramidenzerlegung-Aufgabe   Abiturprüfung LK Bayern 2004 Lösungen

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $A(10\,|\,0\,|\,0)$, $B(0\,|\,4\,|\,0)$, $S(0\,|\,0\,|\,6)$ sowie die Ebenenschar

$$E_t: \; 3x_2 + tx_3 - 3t = 0 \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

gegeben. Die Punkte A, B und S legen die Ebene F fest.

1. a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Normalenform.

   [mögliches Ergebnis: $6x_1 + 15x_2 + 10x_3 - 60 = 0$]

   b) Berechnen Sie, unter welchem Winkel die Ebene F die x_1x_2-Ebene schneidet. $\alpha = 58{,}2^\circ$

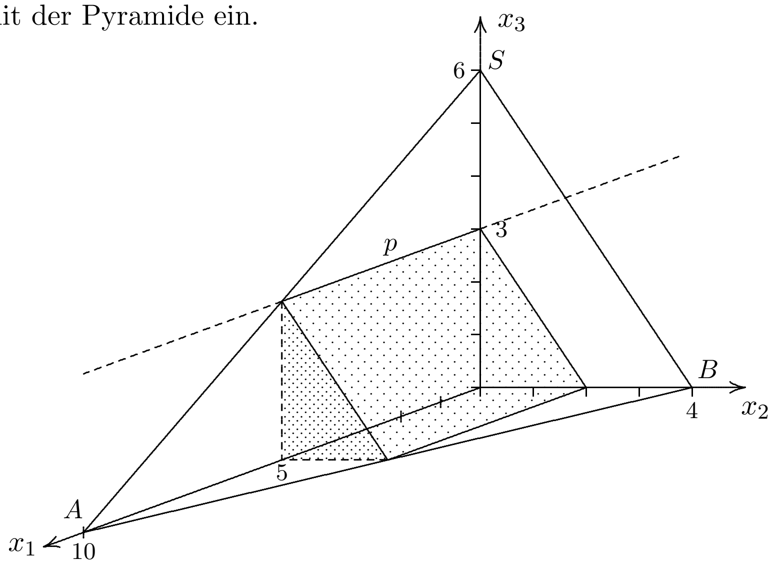
   c) Zeigen Sie, dass die Ebene E_2 parallel zur Geraden BS ist. $\overrightarrow{BS} \perp \vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   d) Zeigen Sie, dass die zu AO parallele Mittelparallele des Dreiecks AOS identisch ist mit der Geraden p, die alle Ebenen der Schar E_t gemeinsam haben.

   $p\colon\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_t \cap p$

2. Die Punkte A, B, O und S bilden die Ecken der Pyramide $ABOS$.

   a) Legen Sie ein Koordinatensystem an. Zeichnen Sie die Pyramide $ABOS$, die Gerade p und die Schnittfläche der Ebene E_2 mit der Pyramide ein.



   b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABOS$. $V_{Pyramide} = 40$

   c) Zeigen Sie, dass die Ebene E_2 die Pyramide $ABOS$ in zwei Teilkörper mit gleichem Volumen zerlegt. (Hinweis: ...) $V_{Teilkörper} = 15 + 5$

3. a) Zeigen Sie, dass $M(1{,}2\,|\,1{,}2\,|\,1{,}2)$ der Mittelpunkt der Inkugel K der Pyramide $ABOS$ ist.

   Der Abstand von M zu den Koordinatenebenen beträgt stets 1,2 und es ist $d(M,F) = 1{,}2$.

   b) Die Ebenenschar E_t enthält neben der x_1x_3-Ebene eine weitere Tangentialebene von K. Berechnen Sie den zugehörigen Wert von t.

   Bedingung: $d(M, E_t) = 1{,}2 \implies 6 - 3t = 2\sqrt{9 + t^2}$

   $\implies t_1 = 0,\; t_2 = \frac{36}{5}$