Würfel-Aufgabe   Bayern LK 2006

Die Firma VEGAS hat ein neues Gesellschaftsspiel entwickelt, bei dem neben Laplace-Würfeln auch spezielle Vegas-Würfel verwendet werden, die sich äußerlich von den Laplace-Würfeln nicht unterscheiden. Die Vegas-Würfel zeigen die Augenzahl „6" mit der erhöhten Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$, während die anderen Augenzahlen untereinander gleich wahrscheinlich sind.

1. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert der Zufallsgröße „Augenzahl beim einmaligen Werfen eines Vegas-Würfels" 4 ist.

2. Auf dem Tisch liegen ungeordnet drei Laplace-Würfel und ein Vegas-Würfel. Ein Spieler nimmt davon zufällig drei Würfel und wirft sie gleichzeitig.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er drei gleiche Augenzahlen, wenn er drei Laplace-Würfel genommen hat? Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er drei gleiche Augenzahlen, wenn er zwei Laplace-Würfel und den Vegas-Würfel genommen hat?

   Welche Folgerung können Sie aus Ihren Ergebnissen bezüglich der stochastischen Abhängigkeit der Ereignisse „Er erzielt drei gleiche Augenzahlen" und „Er nimmt drei Laplace-Würfel" ziehen?

3. Um bei einem Würfel festzustellen, ob es sich um einen Laplace- oder Vegas-Würfel handelt, wird er 100-mal geworfen. Ein Vegas-Würfel soll mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % als solcher eingestuft werden.

   a) Bestimmen Sie hierzu die Entscheidungsregel anhand der Anzahl der geworfenen Sechser so, dass möglichst auch ein Laplace-Würfel richtig eingestuft wird.
   [Ergebnis: Entscheidung für Vegas-Würfel ab 23 geworfenen Sechsern]

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei dieser Entscheidungsregel ein Laplace-Würfel falsch eingestuft?

Eine Packung des Spiels enthält - ungeordnet und äußerlich nicht unterscheidbar - 7 Laplace- und 3 Vegas-Würfel.

4. Aus dieser Packung wird ein Würfel entnommen und 100-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um einen Vegas-Würfel, wenn dabei 25-mal eine „6" geworfen wird?

5. Die 10 Würfel werden nun einzeln nacheinander aus der Packung entnommen und je 100-mal geworfen.

   a) Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der geworfenen Sechser unter den insgesamt 1000 durchzuführenden Würfen. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X.
   [Ergebnis: $E(X) = 216\,\frac{2}{3}$, $V(X) = 163\,\frac{8}{9}$]

   b) Die Zufallsgröße X ist näherungsweise normalverteilt. Berechnen Sie mit Hilfe der Normalverteilung, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei den 1000 Würfen mehr als 225-mal eine „6" geworfen wird.

6. Bei einem Spiel werden jeweils 5 Würfel geworfen. Aus den Augenzahlen - aufgefasst als Ziffern - werden möglichst große fünfstellige natürliche Zahlen gebildet, z. B. 43321, nicht jedoch 34312.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine Zahl größer als 50000, wenn es sich um 5 Laplace-Würfel handelt?

   b) Wie viele verschiedene natürliche Zahlen können nach dieser Spielregel gebildet werden? Wählen Sie aus den folgenden kombinatorischen „Modellen" zunächst das für dieses Problem passende aus und bestimmen Sie dann mit dessen Hilfe die gesuchte Anzahl.

      A) Anzahl der fünfstelligen Zahlen aus den Ziffern 1 bis 6 dividiert durch die Zahl der Permutationen von 5 Elementen

      B) Zahl der möglichen Verteilungen von 5 Kugeln auf 6 Urnen, wobei es nur auf die jeweilige Anzahl der Kugeln in den Urnen ankommt

      C) Zahl der möglichen Verteilungen von 6 Kugeln auf 5 Urnen, wobei es nur auf die jeweilige Anzahl der Kugeln in den Urnen ankommt

Würfel-Aufgabe Bayern LK 2006 Lösungshinweise

Die Firma VEGAS hat ein neues Gesellschaftsspiel entwickelt, bei dem neben Laplace-Würfeln auch spezielle Vegas-Würfel verwendet werden, die sich äußerlich von den Laplace-Würfeln nicht unterscheiden. Die Vegas-Würfel zeigen die Augenzahl „6“ mit der erhöhten Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$, während die anderen Augenzahlen untereinander gleich wahrscheinlich sind.

1. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert der Zufallsgröße „Augenzahl beim einmaligen Werfen eines Vegas-Würfels“ 4 ist. $P(„1“) = \frac{2}{15} \ldots P(„5“) = \frac{2}{15}$

2. Auf dem Tisch liegen ungeordnet drei Laplace-Würfel und ein Vegas-Würfel. Ein Spieler nimmt davon zufällig drei Würfel und wirft sie gleichzeitig.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er drei gleiche Augenzahlen, wenn er drei Laplace-Würfel genommen hat? Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er drei gleiche Augenzahlen, wenn er zwei Laplace-Würfel und den Vegas-Würfel genommen hat? $\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$, $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{36}$

   Welche Folgerung können Sie aus Ihren Ergebnissen bezüglich der stochastischen Abhängigkeit der Ereignisse „Er erzielt drei gleiche Augenzahlen“ und „Er nimmt drei Laplace-Würfel“ ziehen?

   Die Ereignisse sind unabhängig.

3. Um bei einem Würfel festzustellen, ob es sich um einen Laplace- oder Vegas-Würfel handelt, wird er 100-mal geworfen. Ein Vegas-Würfel soll mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % als solcher eingestuft werden.

   a) Bestimmen Sie hierzu die Entscheidungsregel anhand der Anzahl der geworfenen Sechser so, dass möglichst auch ein Laplace-Würfel richtig eingestuft wird.
   [Ergebnis: Entscheidung für Vegas-Würfel ab 23 geworfenen Sechsern]

   $$P_{1/3}^{100}(X \leq k) \leq 1\,\% \quad \Longrightarrow \quad k \leq 22$$

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei dieser Entscheidungsregel ein Laplace-Würfel falsch eingestuft? $P_{1/6}^{100}(Y \geq 23) = 6{,}3\,\%$

Eine Packung des Spiels enthält - ungeordnet und äußerlich nicht unterscheidbar - 7 Laplace- und 3 Vegas-Würfel.

4. Aus dieser Packung wird ein Würfel entnommen und 100-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um einen Vegas-Würfel, wenn dabei 25-mal eine „6“ geworfen wird?

$$\frac{\frac{3}{10} \cdot P_{1/3}^{100}(X = 25)}{\frac{7}{10} \cdot P_{1/6}^{100}(Y = 25) + \frac{3}{10} \cdot P_{1/3}^{100}(X = 25)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}0178}{0{,}7 \cdot 0{,}0098 + 0{,}3 \cdot 0{,}0178} = 43{,}8\,\%$$

5. Die 10 Würfel werden nun einzeln nacheinander aus der Packung entnommen und je 100-mal geworfen.

   a) Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der geworfenen Sechser unter den insgesamt 1000 durchzuführenden Würfen. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X.

   [Ergebnis: $E(X) = 216\frac{2}{3}$, $V(X) = 163\frac{8}{9}$]

   $$E(X) = 7 \cdot \frac{100}{6} + 3 \cdot \frac{100}{3}, \quad V(X) = 7 \cdot 100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + 3 \cdot 100 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$$

   b) Die Zufallsgröße X ist näherungsweise normalverteilt. Berechnen Sie mit Hilfe der Normalverteilung, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei den 1000 Würfen mehr als 225-mal eine „6“ geworfen wird. $\sigma = 12{,}8 \qquad P = 24{,}5\,\%$

6. Bei einem Spiel werden jeweils 5 Würfel geworfen. Aus den Augenzahlen - aufgefasst als Ziffern - werden möglichst große fünfstellige natürliche Zahlen gebildet, z. B. 43321, nicht jedoch 34312.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine Zahl größer als 50000, wenn es sich um 5 Laplace-Würfel handelt?
   $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 86{,}8\,\%$

   b) Wie viele verschiedene natürliche Zahlen können nach dieser Spielregel gebildet werden? Wählen Sie aus den folgenden kombinatorischen „Modellen“ zunächst das für dieses Problem passende aus und bestimmen Sie dann mit dessen Hilfe die gesuchte Anzahl.

      A) Anzahl der fünfstelligen Zahlen aus den Ziffern 1 bis 6 dividiert durch die Zahl der Permutationen von 5 Elementen

      B) Zahl der möglichen Verteilungen von 5 Kugeln auf 6 Urnen, wobei es nur auf die jeweilige Anzahl der Kugeln in den Urnen ankommt

      C) Zahl der möglichen Verteilungen von 6 Kugeln auf 5 Urnen, wobei es nur auf die jeweilige Anzahl der Kugeln in den Urnen ankommt

   B) $\binom{10}{5} = 252$

Ausschuss-Aufgabe Bayern LK 2006

1. Für einen 8-köpfigen Ausschuss kandidieren 12 Frauen und 8 Männer.

   a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Ausschuss zusammenzusetzen, wenn er mindestens 3 und höchstens 5 männliche Mitglieder haben soll?

   In den Ausschuss wurden 4 Frauen und 4 Männer gewählt. Die Sitzungen finden an einem rechteckigen Tisch statt, der an seinen beiden Längsseiten je 4 Personen Platz bietet. Die Mitglieder setzen sich an die beiden Längsseiten des Tisches, die sich auf der Tür- und auf der Fensterseite des Raumes befinden.

   b) Auf wie viele verschiedene Arten können die Ausschussmitglieder Platz nehmen, wenn die 4 Frauen auf einer Seite des Tisches sitzen sollen und die Personen unterschieden werden?

   c) Auf wie viele verschiedene Arten können die Ausschussmitglieder Platz nehmen, wenn auf jeder Längsseite des Tisches Frauen und Männer abwechselnd sitzen sollen und die Personen unterschieden werden?

2. Beim Abiturstreich an einem Gymnasium muss ein Sportlehrer seine Sicherheit bei Basketball-Freiwürfen gegen einen Vereinsspieler aus dem Kreis der Abiturienten unter Beweis stellen. Der Sportlehrer trifft bei jedem Versuch mit einer Wahrscheinlichkeit von 35 %, der Vereinsspieler mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 %.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft der Sportlehrer bei 12 Versuchen höchstens zweimal?

   b) Der Sportlehrer hat bei seinen 12 Versuchen dreimal getroffen. Wie oft muss der Vereinsspieler mindestens werfen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % mehr als 3 Treffer erzielt? Verwenden Sie zur Lösung die Tabellen zur Stochastik.

   c) Wie oft muss die Schulleiterin, die im Mittel bei jedem 8. Wurf in den Korb trifft, mindestens werfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % wenigstens einmal zu treffen?

   d) Ein Schüler führt 100 Freiwürfe aus, um seine Trefferwahrscheinlichkeit p zu bestimmen. Als Ergebnis möchte er ein Intervall angeben, in dem p mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75 % liegt. Zeigen Sie, dass die Länge dieses Intervalls nicht kleiner als $\frac{1}{5}$ gewählt werden kann, wenn diese mit der Ungleichung von Tschebyschow abgeschätzt wird.

3. Ein Prüfer einer Universität entwickelt einen Multiple-Choice-Test, der aus 50 Fragen mit je 4 Antworten besteht, von denen jeweils genau eine richtig ist. Für das Bestehen des Tests legt er die Mindestzahl richtiger Antworten nach folgendem Kriterium fest: Wenn ein Student durch sein Wissen nur die Hälfte der Fragen sicher richtig beantworten kann und die übrigen Fragen ausschließlich aufgrund bloßen Ratens beantwortet, dann soll er den Test mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % nicht bestehen.

   a) Bestimmen Sie, wie viele Fragen mindestens richtig beantwortet werden müssen, damit der Test unter den genannten Bedingungen bestanden wird.

   b) Ein Student kann 60 % der Fragen durch sein Wissen sicher beantworten und muss sich beim Rest auf bloßes Raten verlassen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht er den Test nicht, wenn für das Bestehen mindestens 36 Fragen richtig beantwortet werden müssen?

4. Sei H die relative Häufigkeit der Anzahl der Treffer einer nach $B(n, p)$ verteilten Zufallsgröße. Geben Sie den Erwartungswert von H an und zeigen Sie, dass die Standardabweichung von H kleiner oder gleich $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ ist.

Ausschuss-Aufgabe Bayern LK 2006 Lösungshinweise

1. Für einen 8-köpfigen Ausschuss kandidieren 12 Frauen und 8 Männer.

   a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Ausschuss zusammenzusetzen, wenn er mindestens 3 und höchstens 5 männliche Mitglieder haben soll? $\binom{12}{5} \cdot \binom{8}{3} + \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} + \binom{12}{3} \cdot \binom{8}{5} = 91322$

   In den Ausschuss wurden 4 Frauen und 4 Männer gewählt. Die Sitzungen finden an einem rechteckigen Tisch statt, der an seinen beiden Längsseiten je 4 Personen Platz bietet. Die Mitglieder setzen sich an die beiden Längsseiten des Tisches, die sich auf der Tür- und auf der Fensterseite des Raumes befinden.

   b) Auf wie viele verschiedene Arten können die Ausschussmitglieder Platz nehmen, wenn die 4 Frauen auf einer Seite des Tisches sitzen sollen und die Personen unterschieden werden? $2 \cdot 4! \cdot 4! = 1152$

   c) Auf wie viele verschiedene Arten können die Ausschussmitglieder Platz nehmen, wenn auf jeder Längsseite des Tisches Frauen und Männer abwechselnd sitzen sollen und die Personen unterschieden werden? $2 \cdot 2 \cdot 4! \cdot 4! = 2304$

2. Beim Abiturstreich an einem Gymnasium muss ein Sportlehrer seine Sicherheit bei Basketball-Freiwürfen gegen einen Vereinsspieler aus dem Kreis der Abiturienten unter Beweis stellen. Der Sportlehrer trifft bei jedem Versuch mit einer Wahrscheinlichkeit von 35 %, der Vereinsspieler mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 %.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft der Sportlehrer bei 12 Versuchen höchstens zweimal? $P_{0,35}^{12}(X \leq 2) = 15{,}1\,\%$

   b) Der Sportlehrer hat bei seinen 12 Versuchen dreimal getroffen. Wie oft muss der Vereinsspieler mindestens werfen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % mehr als 3 Treffer erzielt? Verwenden Sie zur Lösung die Tabellen zur Stochastik. $P_{0,6}^{n}(Y > 3) \geq 80\,\% \quad \Longrightarrow \quad n \geq 8$

   c) Wie oft muss die Schulleiterin, die im Mittel bei jedem 8. Wurf in den Korb trifft, mindestens werfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % wenigstens einmal zu treffen?
   $P_{1/8}^{n}(Z \geq 1) = 1 - P_{1/8}^{n}(Z = 0) > 90\,\% \quad \Longrightarrow \quad n \geq 18$

   d) Ein Schüler führt 100 Freiwürfe aus, um seine Trefferwahrscheinlichkeit p zu bestimmen. Als Ergebnis möchte er ein Intervall angeben, in dem p mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75 % liegt. Zeigen Sie, dass die Länge dieses Intervalls nicht kleiner als $\frac{1}{5}$ gewählt werden kann, wenn diese mit der Ungleichung von Tschebyschow abgeschätzt wird.
   $$P(\mid \frac{X}{n} - p \mid < a) \;\geq\; 1 - \frac{1}{4 \cdot a^2 \cdot n} \;\geq\; 0{,}75 \quad \Longrightarrow \quad 2a \geq 0{,}2$$

3. Ein Prüfer einer Universität entwickelt einen Multiple-Choice-Test, der aus 50 Fragen mit je 4 Antworten besteht, von denen jeweils genau eine richtig ist. Für das Bestehen des Tests legt er die Mindestzahl richtiger Antworten nach folgendem Kriterium fest: Wenn ein Student durch sein Wissen nur die Hälfte der Fragen sicher richtig beantworten kann und die übrigen Fragen ausschließlich aufgrund bloßen Ratens beantwortet, dann soll er den Test mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % nicht bestehen.

   a) Bestimmen Sie, wie viele Fragen mindestens richtig beantwortet werden müssen, damit der Test unter den genannten Bedingungen bestanden wird. $P_{1/4}^{25}(X \geq k) \leq 5\,\% \quad \Longrightarrow \quad k \geq 11 \qquad n \geq 36$

   b) Ein Student kann 60 % der Fragen durch sein Wissen sicher beantworten und muss sich beim Rest auf bloßes Raten verlassen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht er den Test nicht, wenn für das Bestehen mindestens 36 Fragen richtig beantwortet werden müssen? $P_{1/4}^{20}(Y \leq 5) = 61{,}7\,\%$

4. Sei H die relative Häufigkeit der Anzahl der Treffer einer nach $B(n,p)$ verteilten Zufallsgröße. Geben Sie den Erwartungswert von H an und zeigen Sie, dass die Standardabweichung von H kleiner oder gleich $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ ist.
   $$E(X) = np, \quad E(\frac{X}{n}) = p, \; V(X) = npq, \quad V(\frac{X}{n}) = \frac{1}{n^2} \cdot npq = \frac{pq}{n} \leq \frac{1}{4n}$$