Schimmelpilz-Aufgabe LK Abiturprüfung Baden-Württemberg 2002

Für jedes $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

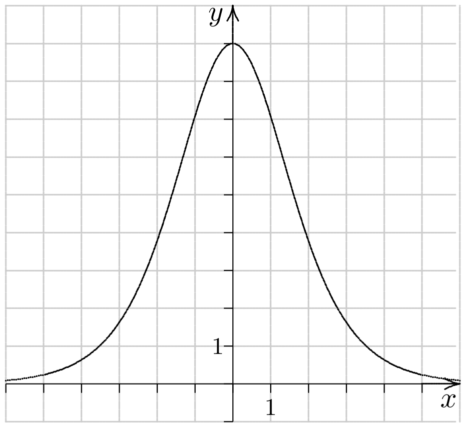
$$f_a(x) = \frac{a \cdot e^x}{(1+e^x)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ihr Schaubild sei K_a.

a) Die nebenstehende Abbildung zeigt ein Schaubild K_a. Bestimmen Sie den Zahlenwert des zugehörigen Parameters a.
Gegeben ist die Funktion g mit

$$g(x) = e^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes von K_{36} und dem Schaubild von g. Für welche Werte von a hat K_a mit dem Schaubild von g einen Punkt gemeinsam?



b) Zeigen Sie: Für jedes $a \neq 0$ gilt $f_a(x) = f_a(-x), \quad x \in \mathbb{R}$.
K_a und die x-Achse begrenzen eine beidseitig ins Unendliche reichende Fläche.
Zeigen Sie, dass diese Fläche einen endlichen Inhalt hat.

Durch

$$F(t) = \frac{36 \cdot e^t}{1+e^t}$$

wird der Inhalt der Fläche beschrieben, die ein Schimmelpilz auf einer Brotscheibe bedeckt.
Dabei wird t in Tagen seit Beobachtungsbeginn und $F(t)$ in cm^2 gemessen.

c) Zu welchem Zeitpunkt breitet sich der Schimmelpilz am schnellsten aus?
Wie groß ist die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit?
Weisen Sie nach, dass F eine Differenzialgleichung der Form

$$F'(t) = k \cdot F(t) \cdot [G - F(t)]$$

erfüllt.
Welche Art von Wachstum liegt demnach vor?
Skizzieren Sie das Schaubild von F für $-5 \leq t \leq 5$.

d) Zeigen Sie: Für kleine Werte von $F(t)$ gilt näherungsweise die Differenzialgleichung $F'(t) = F(t)$.
Geben Sie eine mögliche Lösungsfunktion dieser Differenzialgleichung an, die für kleine Werte von $F(t)$ näherungsweise den Inhalt der bedeckten Fläche beschreibt.

Schimmelpilz-Aufgabe Lösungshinweise

Für jedes $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = \frac{a \cdot e^x}{(1+e^x)^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ihr Schaubild sei K_a.

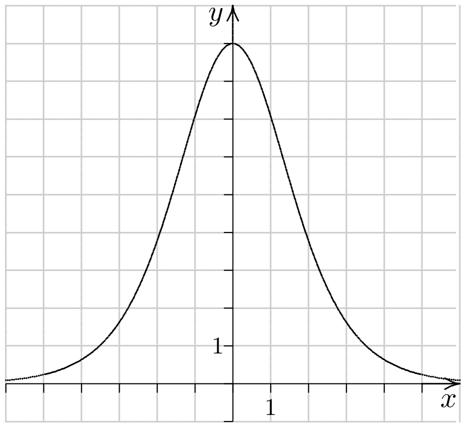
a) Die nebenstehende Abbildung zeigt ein Schaubild K_a. Bestimmen Sie den Zahlenwert des zugehörigen Parameters a.

$f_a(0) = 9,\ a = 36$

Gegeben ist die Funktion g mit

$$g(x) = e^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes von K_{36} und dem Schaubild von g. Für welche Werte von a hat K_a mit dem Schaubild von g einen Punkt gemeinsam?



$e^{2x} + 2e^x - 35 = 0,\ \ S(\ln 5 \mid 5)$

$e^{2x} + 2e^x + 1 - a = 0,\ \ S_a(\ln(\sqrt{a}-1) \mid \sqrt{a}-1),\ \ a > 1$

b) Zeigen Sie: Für jedes $a \neq 0$ gilt $f_a(x) = f_a(-x), \quad x \in \mathbb{R}$.
K_a und die x-Achse begrenzen eine beidseitig ins Unendliche reichende Fläche.
Zeigen Sie, dass diese Fläche einen endlichen Inhalt hat.

Substitution $u = 1 + e^x$

$$A = 2 \cdot \lim_{z\to\infty} \left(-\frac{a}{1+e^z} + \frac{a}{2}\right) = a$$

Durch

$$F(t) = \frac{36 \cdot e^t}{1+e^t}$$

wird der Inhalt der Fläche beschrieben, die ein Schimmelpilz auf einer Brotscheibe bedeckt.
Dabei wird t in Tagen seit Beobachtungsbeginn und $F(t)$ in cm^2 gemessen.

c) Zu welchem Zeitpunkt breitet sich der Schimmelpilz am schnellsten aus?
Wie groß ist die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit?

$F'(t) = f_{36}(t) \quad \overset{\text{Graph}}{\Longrightarrow} \quad t = 0, \quad F'(0) = 9\ (cm^2/\text{Tag})$

Weisen Sie nach, dass F eine Differenzialgleichung der Form

$$F'(t) = k \cdot F(t) \cdot [G - F(t)]$$

erfüllt.

$G = 36,\ k = \frac{1}{36}$

Welche Art von Wachstum liegt demnach vor?
Skizzieren Sie das Schaubild von F für $-5 \leq t \leq 5$.

d) Zeigen Sie: Für kleine Werte von $F(t)$ gilt näherungsweise die Differenzialgleichung $F'(t) = F(t)$.
Geben Sie eine mögliche Lösungsfunktion dieser Differenzialgleichung an, die für kleine Werte von $F(t)$ näherungsweise den Inhalt der bedeckten Fläche beschreibt.

$$F'(t) = \tfrac{1}{36} \cdot F(t) \cdot \big[36 - F(t)\big] = F(t) - \tfrac{1}{36} \cdot \big(F(t)\big)^2 \approx F(t)$$

mit $F(-5) = 0{,}24$ lautet eine Lösungsfunktion $F^*(t) = 35{,}6 \cdot e^t$