

Analysis 1

I.1 Neubesiedlung von Biotopen

Eine Forschergruppe beobachtet in den Tropen die Neubesiedlung von Seen durch bisher in diesen Seen nicht vorhandene Krebsarten (z. B. bei einer Überschwemmung).



- a) Ein Team von Biologen hat für ein Forschungsprojekt den Aaba-See ausgewählt, einen See in tropischer Lage mit nahezu gleichen Witterungsbedingungen über das ganze Jahr.

Die Forscher setzen 13 000 Ruderfluszkrebse aus. Diese Krebse vermehren sich besonders schnell.

Anhand von Stichproben schätzen die Biologen den jeweiligen Bestand in Monatsabständen. In der Tabelle sind die Daten für einen Beobachtungszeitraum von 7 Monaten angegeben:

Monate	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl der Ruderflusskrebse in Tausend	13	37,4	62,3	78,7	89,9	96,9	100,8	102,5

- Berechnen Sie mithilfe kubischer und logistischer Regression zwei mathematische Modelle (Näherungsfunktionen) zur Beschreibung dieses Krebsbestands.
Hinweis: Wenn Sie hier keine geeigneten Funktionen gefunden haben, so können Sie schon jetzt mit den unten gegebenen Funktionen g und h weiterarbeiten. **10 P**
- Skizzieren Sie die Graphen beider Modelle für $0 \leq x \leq 24$ in das beigegefügte Koordinatensystem. **5 P**
- Entscheiden Sie, welches der beiden Modelle Sie für die Beschreibung des Krebsbestandes am geeignetsten halten. Untersuchen Sie dazu Vorzüge und Nachteile dieser Modelle - einerseits im Beobachtungszeitraum und andererseits auf lange Sicht. **10 P**

Einige Rechner würden im weiteren Verlauf der Aufgabe Probleme mit den gefundenen Funktionen beim Lösen von Gleichungen haben. Arbeiten Sie bitte daher nur noch mit den folgenden leicht vereinfachten Funktionen g und h weiter. Sie sind wie folgt definiert:

$$g(x) = 0,1x^3 - 3,1x^2 + 30x + 12 \quad \text{und} \quad h(x) = \frac{100e^x}{e^x + 5}$$

x in Monaten und die Funktionswerte in tausend Krebsen

- Bestimmen Sie für beide Modelle die jeweiligen Zeitpunkte innerhalb des Beobachtungszeitraums, bei denen die Wachstumsrate am größten ist. Berechnen Sie diese Wachstumsraten und beschreiben Sie die Ergebnisse in Worten. **20 P**

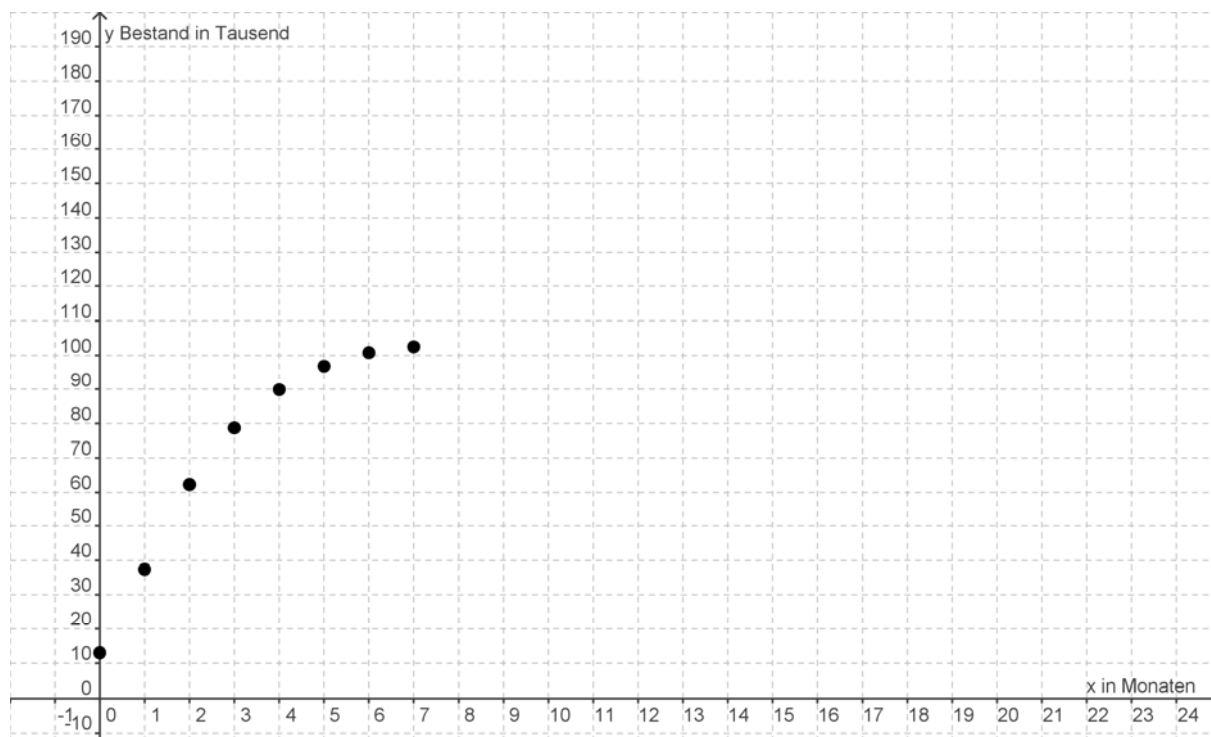
Für die **Änderungsrate** von Krebsbeständen liegen den Biologen mathematische Modelle vor. Die Änderungsrate für die Anzahl von Ruderflusskrebse genügt näherungsweise einer Funktion f_k mit

$$f_k(x) = 90000 \cdot \frac{e^{k \cdot x}}{(1 + e^{k \cdot x})^2}, \quad k > 0 \text{ und } x \geq 0, \quad x \text{ in Monaten.}$$

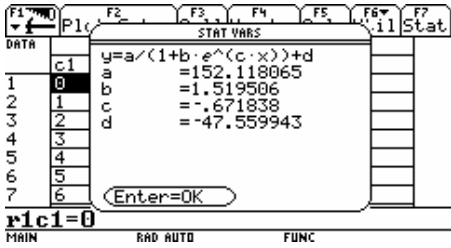
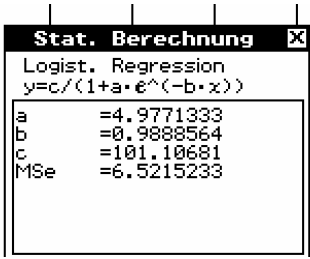
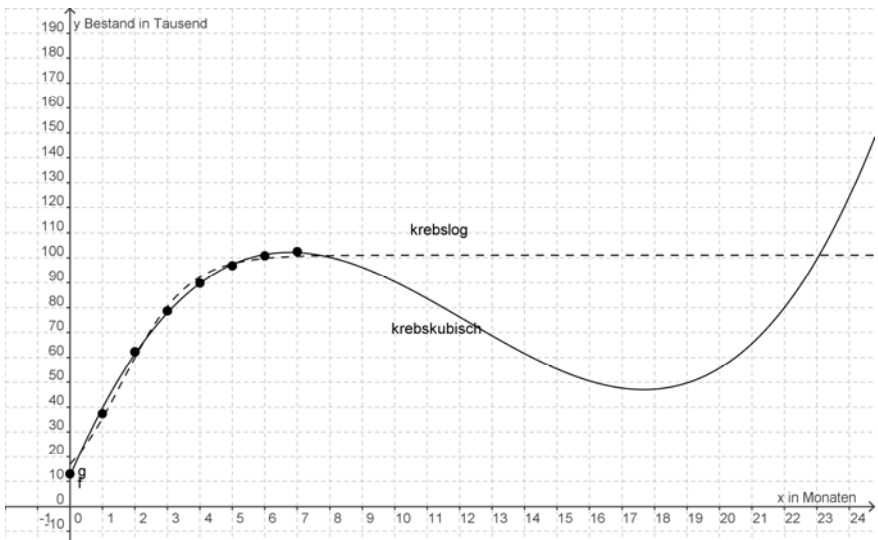
Hinweis: Beachten Sie bitte, dass bei diesen Funktionen die Funktionswerte nicht in tausend Krebsen sondern in Krebsen angegeben sind.

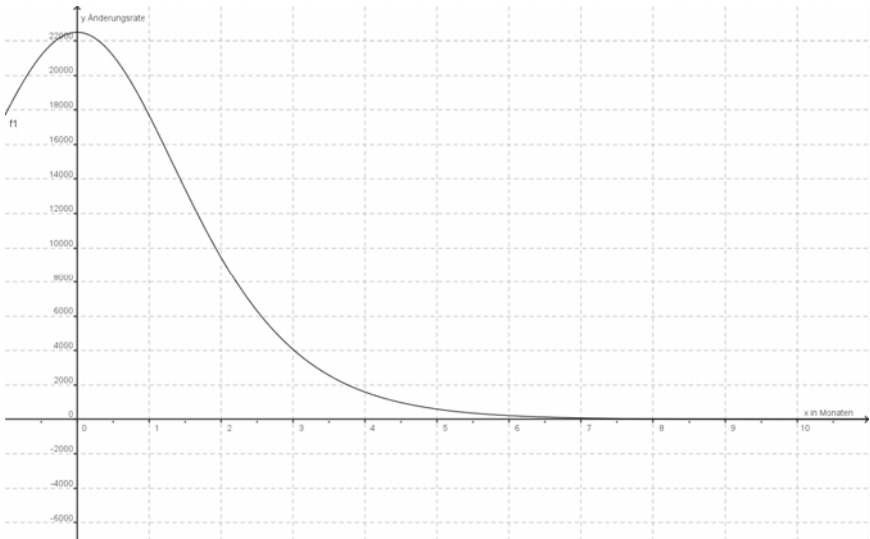
- b) • Betrachten Sie zunächst den Graphen von f_k für $k = 1$ in den ersten 10 Monaten auf Ihrem Bildschirm und skizzieren Sie den Graphen auf Ihrem Bearbeitungsblatt. Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen von f_1 in Bezug auf den Krebsbestand. **15 P**
- Variieren Sie nun auf dem Bildschirm den Parameter k von 0,5 bis 2. Interpretieren Sie den unterschiedlichen Verlauf der Graphen von f_k in Bezug auf den Krebsbestand. **15 P**
- c) Ein Forscherteam arbeitet am tropischen Cuki-See, der keine Ruderflusskrebse aufweist. Nach einer außergewöhnlichen Überschwemmung entdeckt das Team plötzlich diese Krebsart. Drei Monate nach dem ersten Auftauchen der Ruderflusskrebse im Cuki-See schätzen die Forscher aufgrund einiger Stichprobenmessungen den Krebsbestand auf ca. 40 000 Krebse.
- Bestätigen Sie, dass die Forscher für k den Wert $k = 1,026$ wählen müssen, sofern der Wert auf drei Nachkommastellen genau angesetzt werden soll. Gehen Sie dabei von der Bestandsfunktion B_k mit $B_k(x) = \int_0^x f_k(z) dz$ aus. **10 P**
 - Berechnen Sie den Bestand der Ruderflusskrebse gemäß diesem Modell nach dem ersten Viertelmonat. **5 P**
 - Bestimmen Sie den Krebsbestand gemäß diesem Modell nach langer Zeit. Berechnen Sie dazu den Ausdruck der Bestandsfunktion explizit (d. h. mithilfe einer Stammfunktion ohne Integralzeichen) und interpretieren Sie den Term.
Hinweis: Das Ablesen in einer Grafik sowie das Berechnen von Werten mit dem Computer-Algebra-System reichen hier nicht aus. **10 P**

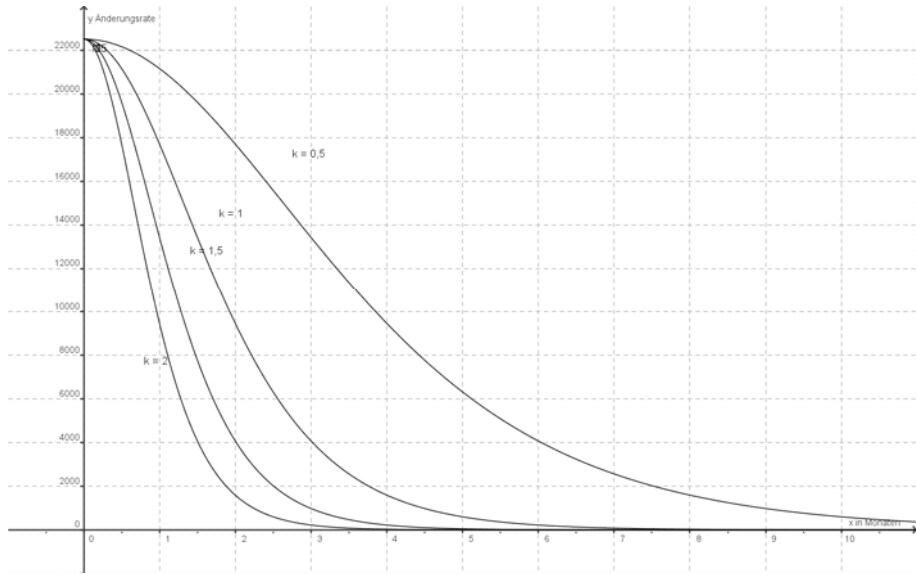
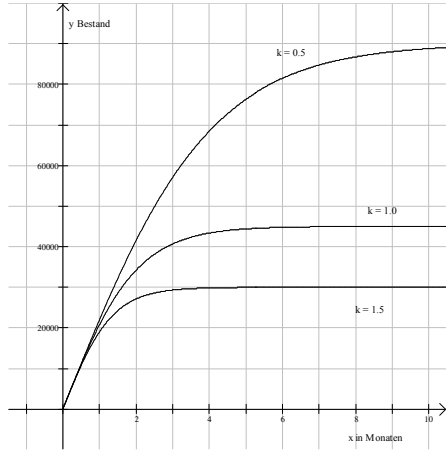
Anlage zur Aufgabe „Neubesiedlung von Biotopen“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Die kubische Regression liefert:</p> $krebsskubisch(x) = 0,085101x^3 - 3,11915x^2 + 30,5206x + 12,1106.$ <p>Die logistische Regression über Derive liefert:</p> $krebsslog(x) = \frac{4,06497 \cdot 10^7 \cdot e^{0,988856 x}}{4,02048 \cdot 10^5 \cdot e^{0,988856 \cdot x} + 2,00104 \cdot 10^6}.$ <p>Mit den Ti Rechnern ergibt sich</p>  <p>Mit dem ClassPad ergibt sich</p>  <p>Beide Funktionen sind zur Beschreibung des Krebsbestands im Beobachtungszeitraum $[0,7]$ gut geeignet. Der Graph von krebsskubisch passt im Beobachtungsbereich $[0,7]$ genauer zu den Messpunkten als der Graph von krebsslog. (Dies ist aber nur in einer Derive-Grafik deutlich zu erkennen.) Für große x-Werte nähert sich der Graph von krebsslog einer Sättigungsgrenze an, der Graph von krebsskubisch fällt zunächst, was sinnvoll sein kann. Nach einem Tiefpunkt bei etwa $x = 18$ wächst der Bestand nach diesem Modell aber ins Unendliche. Das ist nicht realistisch. krebsslog muss also favorisiert werden.</p>	10		
		5		
			10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<ul style="list-style-type: none"> Maximum der Wachstumsrate <p>Das kubische Modell:</p> <p>Aus $g''(x) = 0$ erhält man mithilfe des solve-Befehls $x = \frac{31}{3}$. Der Wendepunkt liegt also nicht im Beobachtungszeitraum. Wegen $g''(0) = -6,2$ ist der Graph im Beobachtungszeitraum rechtsgekrümmt und der stärkste Anstieg während des Beobachtungszeitraums liegt bei g als Randmaximum zum Zeitpunkt $t = 0$ vor.</p> <p>Nach diesem Modell ist die Wachstumsrate zu Beginn am höchsten: Sie beträgt 30.000 Krebse pro Monat.</p> <p>Das logistische Modell:</p> <p>Die größte Wachstumsrate liegt bei der Funktion h im Wendepunkt vor: $h''(x) = 0$ liefert über den solve-Befehl $x = \ln(5) \approx 1,609$ oder $x = \infty$. Für den Beobachtungszeitraum ist nur $x = \ln(5)$ relevant.</p> <p>Es gilt $h'(\ln(5)) = 25$.</p> <p>Die größte Wachstumsrate tritt für dieses Modell also nach gut anderthalb Monaten ein. Sie beträgt 25 000 Krebse pro Monat.</p> <p><i>Hinweis: Auch andere Lösungswege wie z. B. durch Ablesen vom Graphen oder aus einer Tabelle sind mit einer sinnvollen Genauigkeit möglich.</i></p>			
	<p>b) • Skizze für $k = 1$.</p>  <p>Der Bestand der Ruderflusskrebse wächst zu Beginn am stärksten. Der Bestand wächst ständig weiter, das Wachstum wird jedoch immer schwächer. Für große x-Werte nähert sich der Bestand einer Sättigungsgrenze.</p> <ul style="list-style-type: none"> Die Schüler erzeugen ein Bild für k zwischen 0,5 und 2 auf ihrem CAS. Eine Skizze auf dem Papier ist möglich, wird aber nicht verlangt. 		10	10
			15	

Lösungsskizze		Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
 <p>Für alle k wächst der Bestand ständig, und zwar zu Beginn am stärksten und für alle k gleich stark. Je größer k ist, umso steiler fällt der Graph der Änderungsrate für kleine x-Werte und umso schneller nähert er sich bei wachsendem x der x-Achse. Je größer k ist, umso schneller wird also das Wachstum gedämpft.</p> <p>Für alle k ist die Bestandskurve rechtsgekrümmt. Für alle k nähert sich die Bestandskurve einer Horizontalen, der Sättigungsgrenze. Je größer k ist, umso schneller nähert sich die Bestandskurve der Sättigungsgrenze. Je größer k, umso kleiner die Sättigungsgrenze, da der Flächeninhalt unter dem Graphen der Änderungsrate abnimmt.</p> <p>Dieser Sachverhalt wird in der von den Schülerinnen und Schülern nicht verlangten Skizze dargestellt:</p> 				
c)	<ul style="list-style-type: none"> B_k kann als Integral definiert oder als expliziter Funktionsterm bestimmt werden. <p><u>Weg 1:</u> Die Fragestellung kann über die Lösung der Gleichung mithilfe des solve-Befehls bearbeitet werden.</p>		10	5

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung										
		I	II	III								
	<p>Es ergibt sich $k \approx \pm 1,02592$. Da $k > 0$ vorausgesetzt war, ergibt sich $k \approx 1,02592$ und auf drei Stellen gerundet also $k \approx 1,026$.</p> <p><u>Weg 2:</u> Die Fragestellung kann über eine Wertetabelle gelöst werden:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>k</th> <th>$B_k(3)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1,025</td> <td>40.025,8</td> </tr> <tr> <td>1,026</td> <td>39.997,9</td> </tr> <tr> <td>1,027</td> <td>39.970,0</td> </tr> </tbody> </table> <p>Für $k = 1,026$ wird der Bestand von 40 000 also am genauesten erreicht.</p> <ul style="list-style-type: none"> Der Bestand am Ende des ersten Viertelmonats ergibt sich aus $B_{1,026}(0,25) = 5594,36$. <p>Der Bestand beträgt nach diesem Modell 5 594 Krebse. Nach dem ersten Viertelmonat sind also etwa 5 600 Ruderflussskrebse im Cuki-See. Der Ausdruck für die Bestandsfunktion ergibt sich durch Berechnung des Integrals mit dem CAS und durch Einsetzen von $k = 1,026$ zum Beispiel in der Form. $B_{1,026}(x) = \frac{2500000 \cdot (e^{1,026 \cdot x} - 1)}{57 \cdot (e^{1,026 \cdot x} + 1)}$. <p>Der Krebsbestand nach langer Zeit wird über den Grenzwert der Bestandsfunktion für x „gegen unendlich“ bestimmt:</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2500000 \cdot (e^{1,026 \cdot x} - 1)}{57 \cdot (e^{1,026 \cdot x} + 1)} \right)$ <p>Da $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{1,026 \cdot x} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{1,026 \cdot x} + 1)$ folgt:</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} B_{1,026}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2500000}{57} \cdot 1 = \frac{2500000}{57} \approx 43860.$ <p>Nach langer Zeit wird der Krebsbestand gemäß diesem Modell etwa 43 860 Krebse betragen.</p> </p>	k	$B_k(3)$	1,025	40.025,8	1,026	39.997,9	1,027	39.970,0		10	
k	$B_k(3)$											
1,025	40.025,8											
1,026	39.997,9											
1,027	39.970,0											
		5										
			5	5								
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20								

Analysis 2

I.2 Zitronenpresse

Eine Zitronenpresse besteht aus der eigentlichen Presse als Deckel und einem Auffanggefäß. Beides wird in der nebenstehenden Abbildung gezeigt.

Die Zitronenpresse ist insgesamt etwa 9 cm hoch; Deckel und Auffanggefäß haben einen Durchmesser von 12 cm.

Als Modellgrundlage für die Form des Deckels wird im Folgenden von der Rotation des Graphen einer Funktion $f_{a,b}$ mit

$$f_{a,b}(x) = ax^4 + bx^2 + 4 \quad (\text{mit } a \neq 0)$$

um die y -Achse ausgegangen.

Die Einheit im Koordinatensystem entspricht 1 cm.

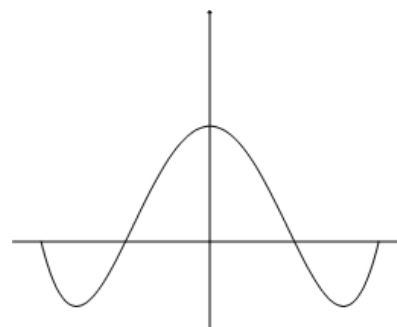


- a) Bestätigen Sie zunächst, dass jeder Funktionsgraph dieser Funktionenschar einen Extrempunkt auf der y -Achse besitzt, und geben Sie die Koordinaten dieses Punktes an. **5 P**

- b) Für $a = 3$ und $-5 \leq b \leq 5$ gibt es drei prinzipiell unterschiedliche Verläufe der Graphen. Skizzieren Sie dafür jeweils ein Beispiel und geben Sie den gewählten Wert für b an. Beschreiben Sie die Unterschiede. **10 P**

- c) Bestimmen Sie eine Bedingung für a und b , sodass genau drei Extrempunkte vorliegen.

Bestimmen Sie nunmehr im Hinblick auf eine brauchbare Modellierung der Zitronenpresse eine weitere Bedingung dafür, dass der Extrempunkt auf der y -Achse ein Hochpunkt ist und außerdem genau zwei Tiefpunkte vorliegen. **10 P**



- d) Berechnen Sie nun a und b so, dass $x = 3$ und $x = 6$ Nullstellen von $f_{a,b}$ sind; damit soll der Durchmesser der Zitronenpresse sinnvoll berücksichtigt werden. **5 P**

Verwenden Sie für die weiteren Berechnungen:

$$f(x) = \frac{1}{81}x^4 - \frac{5}{9}x^2 + 4.$$

- e) Ermitteln Sie die Extrempunkte von f im Intervall $[-6; 6]$. **15 P**

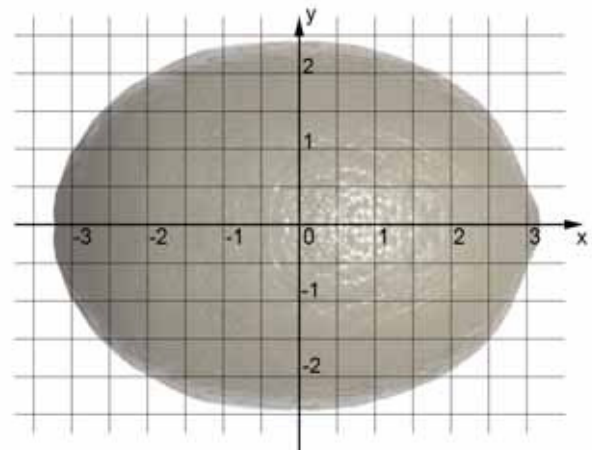
- f) Das Auffanggefäß hat die Form eines Kegelstumpfes mit der Wandstärke 0,2 cm. Seine innere Mantelfläche wird durch die Rotation der Geraden t um die y -Achse gebildet; t ist dabei die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(6|0)$. Seine äußere Mantelfläche entsteht durch die Rotation einer entsprechenden Parallelen p zu t um die y -Achse. Der obere Rand des Auffanggefäßes liegt bei $y = 0$, der innere Boden bei $y = -5$.



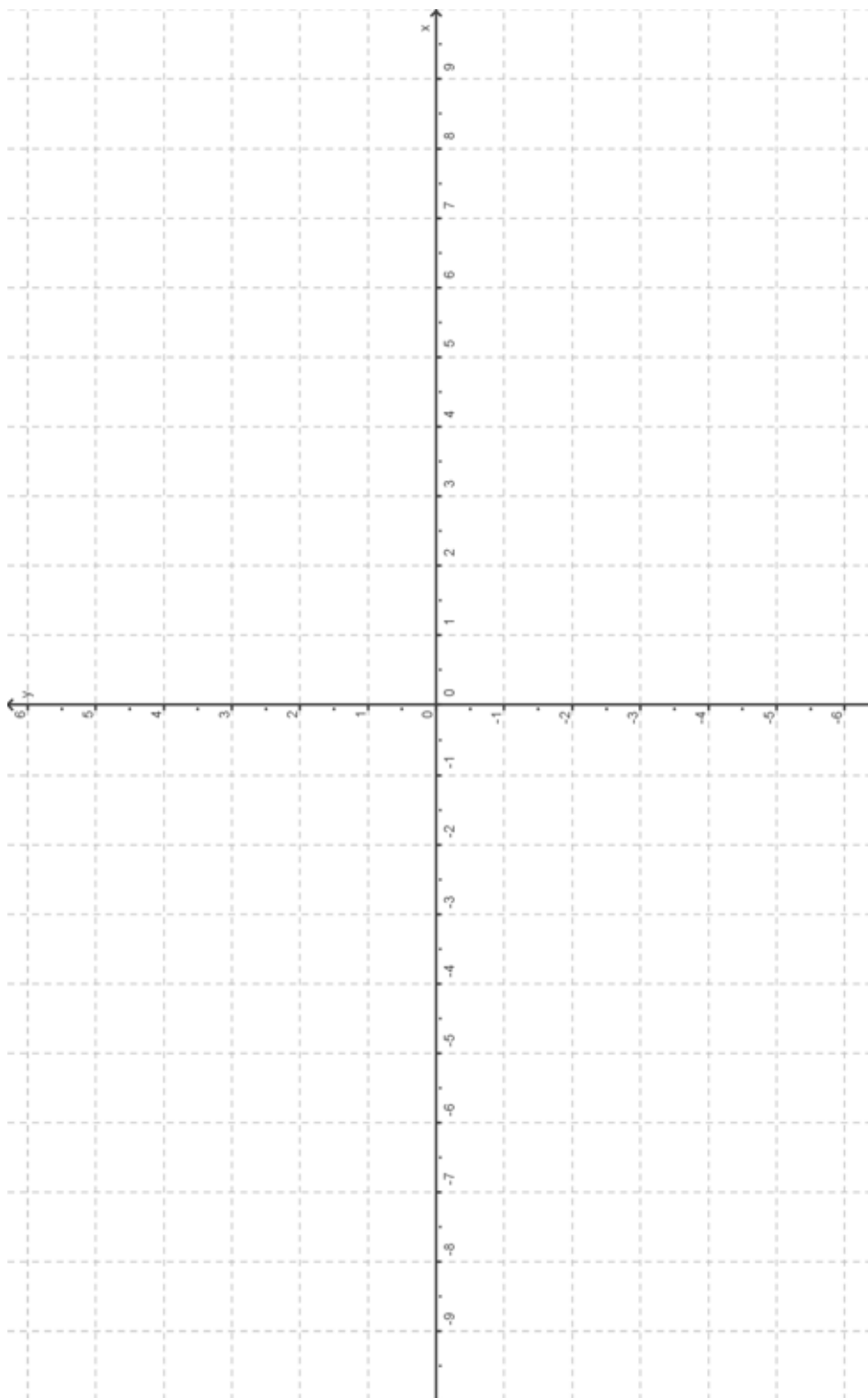
- Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangente t und ihrer Parallelen p . Bestimmen Sie außerdem den inneren Radius r der Bodenfläche des Auffanggefäßes.
*Hinweis: Falls Sie keine Gleichung für die Tangente bzw. deren Parallelen bestimmt haben, so verwenden Sie im Weiteren $t(x) = 4x - 25$ und $p(x) = 4x - 26$. Dieses sind **nicht** die richtigen Lösungen.* **25 P**
- Berechnen Sie den Materialbedarf für die Herstellung des Auffanggefäßes. **10 P**

- g) Mit der Zitronenpresse soll nun eine Zitrone ausgepresst werden.

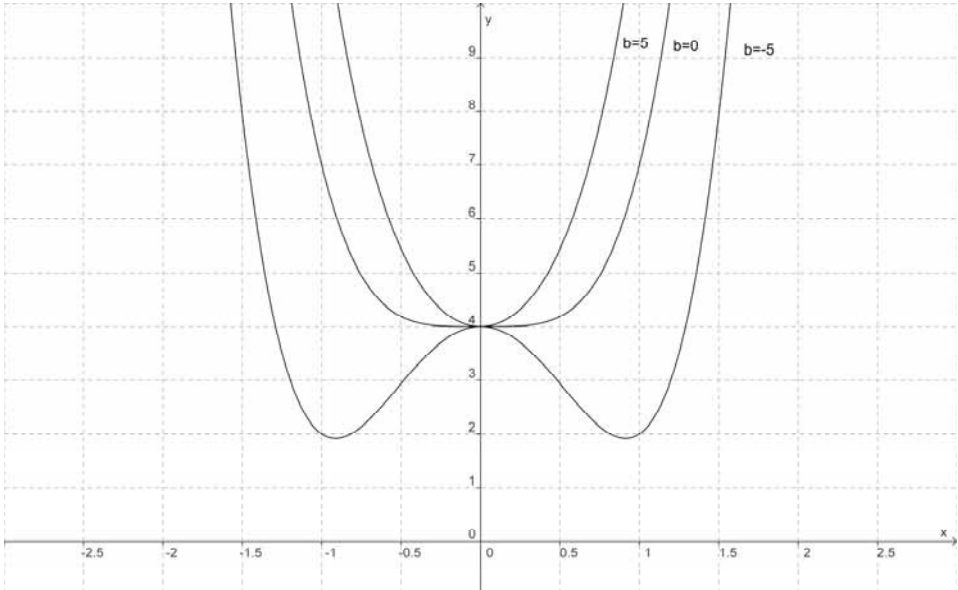
- Kennzeichnen Sie bei der abgebildeten Zitrone etwa zehn Punkte und bestimmen Sie damit eine geeignete Randfunktion. **10 P**
- Bestimmen Sie das Volumen näherungsweise mithilfe Ihrer gefundenen Randfunktion. **10 P**



Anlage zur Aufgabe „Zitronenpresse“



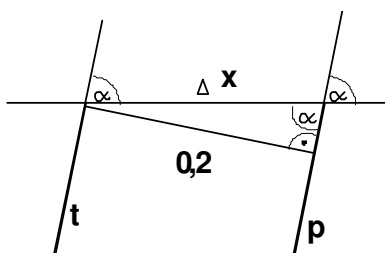
Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Aus der Achsensymmetrie des Graphen folgt, dass jeder Graph auf der y-Achse einen Extrempunkt hat, und zwar (0 4).	5		
b)	 <p>Für z. B. $b = -5$ hat die Funktion drei Extrempunkte. Für $b = 5$ und für $b = 0$ haben die Funktion jeweils nur einen Extrempunkt. Aber für $b = 0$ ist es eine dreifache Extremstelle.</p>	5	5	
c)	<p>Ableitungen:</p> $f_{a,b}'(x) = 4ax^3 + 2bx = x \cdot (4ax^2 + 2b)$ $f_{a,b}''(x) = 12ax^2 + 2b.$ <p>Notwendige Bedingung für das Vorliegen weiterer Extremstellen:</p> $4ax^2 + 2b = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{b}{2a}.$ $b \neq 0 \text{ und } \frac{b}{2a} < 0.$ <p>Das bedeutet, dass b und a unterschiedliche Vorzeichen haben müssen. Soll es sich bei den Extrempunkten um Tiefpunkte handeln, so muss für die zweite Ableitung gelten:</p> $f_{a,b}''\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right) = 12a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + 2b = -4b > 0.$ <p>Daraus folgt somit: $b < 0$.</p>			10

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	<p>Die beiden Bedingungen liefern das folgende Gleichungssystem:</p> $81a + 9b + 4 = 0$ $1296a + 36b + 4 = 0$ <p>Multiplikation der ersten Gleichung mit -4 und anschließende Addition liefert</p> $972a - 12 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{81}.$ <p>Durch Einsetzen von a erhält man: $9b + 5 = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{5}{9}$ und damit</p> $f(x) = \frac{1}{81}x^4 - \frac{5}{9}x^2 + 4.$	5		
e)	<p><u>Extrempunkte:</u></p> $f'(x) = \frac{4}{81}x^3 - \frac{10}{9}x =$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee \frac{4}{81}x^2 = \frac{10}{9}$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = \frac{90}{4}$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm \frac{3}{2}\sqrt{10}$ <p>Dass 0 Maximalstelle ist, ist bereits bekannt.</p> $f''(x) = \frac{4}{27}x^2 - \frac{10}{9}.$ <p>also handelt es sich bei $x = \pm \frac{3}{2}\sqrt{10}$ um Minimalstel-</p> $f''\left(\pm \frac{3}{2}\sqrt{10}\right) = \frac{20}{9} > 0,$ <p>len. $f\left(\pm \frac{3}{2}\sqrt{10}\right) = -\frac{9}{4}.$</p> <p>Damit sind $T_1\left(\frac{3}{2}\sqrt{10} \mid -\frac{9}{4}\right)$ und $T_2\left(-\frac{3}{2}\sqrt{10} \mid -\frac{9}{4}\right)$ die Tiefpunkte und $H(0 \mid 4)$ der Hochpunkt des Graphen.</p>	5	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	<p>Die Tangentengleichung hat die Form:</p> $t(x) = f'(6) \cdot (x - 6) + f(6)$ $= 4(x - 6) + 0$ $= 4x - 24.$ <p>Den Radius r_1 bestimmt man mit der Gleichung: $t(r_1) = 4r_1 - 24 = -5$. Es folgt:</p> $r_1 = \frac{19}{4} = 4,75.$ <p>Der innere Radius beträgt also 4,75 cm.</p> <p>Der Steigungswinkel α von t bzw. p ergibt sich aus $\tan \alpha = 4$, d. h. $\alpha = \arctan 4 \approx 75,96^\circ$.</p> <p>Die Verschiebung Δx zwischen p und t in x-Richtung ist $\Delta x = \frac{0,2}{\sin \alpha} \approx 0,206$.</p> <p>Damit folgt die Gleichung für die Parallele p zu t:</p> $p(x) \approx 4 \cdot (x - 0,206) - 24 = 4x - 24,824.$ <p><u>Bestimmung des Materialbedarfs für das Auffanggefäß:</u></p> <p>Das zu bestimmende Volumen V für den Materialbedarf erhält man durch Subtraktion des inneren Kegelstumpfvolumens V_1 vom äußeren Kegelstumpfvolumen V_2: Die Volumina der Kegelstümpfe erhält man entweder mit der Formel aus der Formelsammlung oder indem man sich den Kegelstumpf als Differenz zweier Kegel vorstellt.</p> $V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot 5 \left(4,75^2 + 6^2 + 4,75 \cdot 6 \right) \approx 455,858.$ <p>Für V_2 benötigt man noch den äußeren Radius.</p> <p>Der Radius r_2 ergibt sich aus der Gleichung $p(r_2) \approx 4r_2 - 24,824 = -5,2$.</p> <p>Mithilfe des solve-Befehls erhält man $r_2 \approx 4,91$.</p> $V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot 5,2 \left(4,91^2 + 6,206^2 + 4,91 \cdot 6,206 \right) \approx 506,937.$ $V = V_2 - V_1 \approx 506,937 - 455,858 \approx 51,079.$ <p>Der Materialbedarf beträgt ungefähr $51,1 \text{ cm}^3$.</p>			
			10	15
		5	5	



Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze										Zuordnung Bewertung																				
											I	II	III																		
g)	Aus der Zeichnung sind z. B. die folgenden Werte abzulesen:																														
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 5%;">x</td> <td style="width: 5%;">-3,2</td> <td style="width: 5%;">-3</td> <td style="width: 5%;">-2</td> <td style="width: 5%;">-1</td> <td style="width: 5%;">0</td> <td style="width: 5%;">1</td> <td style="width: 5%;">2</td> <td style="width: 5%;">2,5</td> <td style="width: 5%;">3</td> <td style="width: 5%;">3,2</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>2,3</td> <td>2,4</td> <td>2,3</td> <td>1,8</td> <td>1,5</td> <td>0,5</td> <td>0</td> </tr> </table>													x	-3,2	-3	-2	-1	0	1	2	2,5	3	3,2	y	0	1	2	2,3	2,4	2,3
x	-3,2	-3	-2	-1	0	1	2	2,5	3	3,2																					
y	0	1	2	2,3	2,4	2,3	1,8	1,5	0,5	0																					
	<p>Z. B. durch Regression mit einer ganz rationalen Funktion vierten Grades lässt sich daraus die genäherte Randfunktion r mit</p> $r(x) = -0,021601 \cdot x^4 + 0,001056x^3 + 0,004139x^2 - 0,043727 \cdot x + 2,327400$ <p>bestimmen.</p> <p>Das ungefähre Volumen der Zitrone berechnet sich damit als Rotationsvolumen:</p> $V = \pi \cdot \int_{-3,2}^{3,2} r(x)^2 dx \approx 78,849.$ <p>Die Zitrone hat also ein Volumen von ca. 79 cm^3.</p>											10																			
	Insgesamt 100 BWE										25	55	20																		

II.1 Quadrille

Der **Turning Torso** ist ein Hochhaus in der schwedischen Stadt Malmö. Der 57 Etagen hohe Wolkenkratzer erreicht eine Höhe von 190 Metern und ist damit der höchste Wolkenkratzer Skandinaviens und das zweithöchste Wohngebäude in Europa. Er wurde im Sommer 2005 eingeweiht und gilt seither als ein Wahrzeichen der Stadt.

Die einzelnen Stockwerke sind gegeneinander verdreht und haben alle eine gleich große, im Wesentlichen quadratische Grundfläche.

Der „Turning Torso“ regte einen anderen Architekten an, das rechts unten skizzierte Hochhaus „**Quadrille**“ zu entwerfen, auf das sich alle Aufgabenteile beziehen.

Das Hochhaus „Quadrille“ hat eine quadratische horizontale Grundfläche der Seitenlänge 20 m und schließt in 120 m Höhe ab mit einer dazu parallelen kleineren (im Gegensatz zu Malmö) quadratischen Dachfläche mit der Seitenlänge von nur 10 m.

Die Mittelpunkte von Dach- und Bodenfläche sind lotrecht übereinander und liegen in dieser Aufgabe auf der z -Achse.

Die Dachfläche ist gegenüber der Bodenfläche von oben gesehen um 90° nach rechts gedreht.

Das Hochhaus hat 30 Stockwerke gleicher Höhe mit jeweils waagrechtem Boden und waagrechter Decke.

Alle Hauskanten sind gerade Strecken (dies auch im Gegensatz zu Malmö).

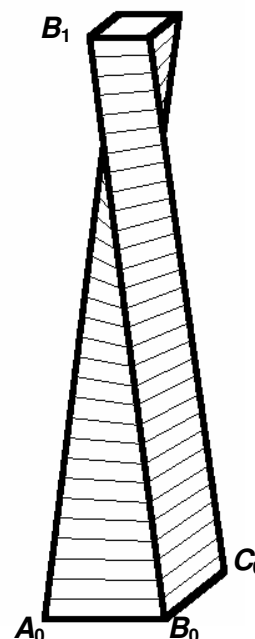
Aus Symmetriegründen folgt, dass alle vier von oben nach unten verlaufenden Gebäudekanten gleich lang sind und dass alle Stockwerke (alle horizontalen Schnittflächen) Quadrate sind.

- a) Geben Sie für ein geeignetes Koordinatensystem (Einheit entspricht 1 m), in dem der Eckpunkt A_0 (siehe Abbildung) die Koordinaten $(10 \mid -10 \mid 0)$ hat, die Koordinaten der anderen 7 Eckpunkte des Hochhauses an. **10 P**

Wenn Ihnen das nicht gelingt, verwenden sie für die weiteren Aufgabenteile die folgenden 8 Punkte:

$$A_0(10 \mid 10 \mid 0), B_0(-10 \mid 10 \mid 0), C_0(-10 \mid -10 \mid 0), D_0(10 \mid -10 \mid 0)$$

$$A_1(5 \mid -5 \mid 120), B_1(5 \mid 5 \mid 120), C_1(-5 \mid 5 \mid 120), D_1(-5 \mid -5 \mid 120)$$



Die Stockwerke werden – wie üblich – von unten nach oben gezählt, und es gelte hier die Vereinbarung, dass das Erdgeschoss die Nummer 1 trägt, also als erstes Stockwerk bezeichnet wird.

b) – Berechnen Sie die Längen der von oben nach unten verlaufenden Hauskanten.

– Bestätigen Sie, dass in der Höhe h der zugehörige Punkt A_h auf der Kante $\overline{A_0A_1}$ die

Koordinaten $\left(10 - \frac{h}{8} \mid -10 + \frac{h}{24} \mid h\right)$ hat.

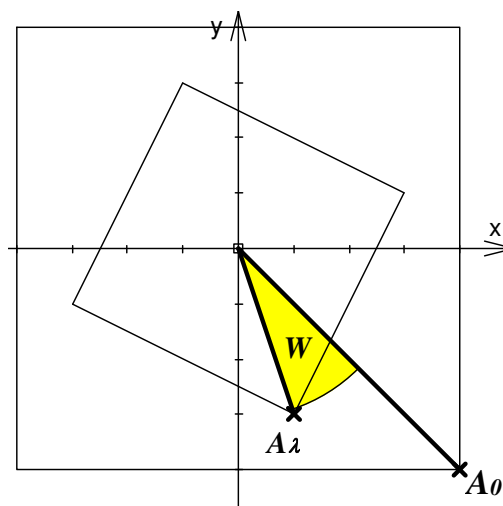
– Berechnen Sie die Koordinaten der vier Eckpunkte der Bodenfläche in 40 m Höhe, also in Höhe der Bodenfläche des 11. Stockwerkes.

10 P

c) Es werden in diesem Aufgabenteil die Winkel untersucht, um die – von oben gesehen – die Bodenflächen der einzelnen Stockwerke gegenüber der Bodenfläche des Erdgeschosses nach rechts verdreht sind.
(Die z -Koordinaten brauchen also nicht betrachtet zu werden!)

Der Winkel W , um den eine Bodenfläche in der Höhe h gegenüber der Bodenfläche des Erdgeschosses von oben gesehen nach rechts verdreht ist, lässt sich durch folgende Funktionsgleichung beschreiben:

$$W(h) = \arctan\left(\frac{3(80-h)}{h-240}\right) + 45^\circ.$$



– Erstellen Sie eine Tabelle, in der für die Stockwerke 1, 5, 10, ..., 20, 25 und 30 diese Drehwinkel dargestellt sind.

– Geben Sie den Winkel W an, um den die Bodenfläche des 16. Stockwerkes in 60 m Höhe gegenüber der des Grundgeschosses (1. Stock) gedreht ist.

– Bestimmen Sie das Stockwerk, bei dem $W = 45^\circ$, bei dem also die Bodenfläche gegenüber der Bodenfläche des Grundgeschosses um 45° gedreht ist.

– Begründen Sie die obige Formel mithilfe der nebenstehenden Skizze.

25 P

d) Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt der Bodenfläche in der Höhe h – gemessen in m^2 – gilt:

$F(h) = \frac{5}{144}(h^2 - 192h + 11520)$ und dass das 25. Stockwerk ($h = 96$ m) die geringste Bodenfläche hat.

10 P

e) Die Miete p pro Quadratmeter steigt – wegen der immer schöneren Aussicht – mit der Höhe der einzelnen Stockwerke über dem Boden. Im Erdgeschoss – also bei der Höhe 0 m – kostet der Quadratmeter 10 € Miete, im 30. Stockwerk – also in 116 m Bodenhöhe – hat sich die Miete pro Quadratmeter auf 20 € verdoppelt.

$p = p(h)$ lässt sich in Abhängigkeit von der Höhe h als eine ganz rationale Funktion 3. Grades mit den Zusatzbedingungen $p'(0) = p'(116) = 0$ angeben.

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

- Bestimmen Sie die den Funktionsterm von p und begründen Sie, dass p in dem hier relevanten Bereich von h streng monoton wächst. Interpretieren Sie diese Aussage.

Zur Kontrolle: $p(h) = -\frac{5}{390224}(h^3 - 174h^2 - 780448)$.

- Bestimmen Sie das Stockwerk mit der geringsten Miete und das Stockwerk mit der höchsten Miete (dabei sollen Fahrstuhlschächte, Treppenhäuser etc. als Teil der Mietfläche mitgerechnet werden). **25 P**

- f) Die Seitenflächen des Hochhauses werden durch die Schar der waagerechten Verbindungsstrecken zwischen den entsprechenden von oben nach unten verlaufenden Hauskanten gebildet. Begründen Sie,

- dass zwei benachbarte von oben nach unten verlaufende Hauskanten windschief sind,
- dass die Punkte P und Q als Endpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke zwischen zwei benachbarten Hauskanten nicht auf gleicher Höhe liegen,

zur Kontrolle: Die Punkte haben die Koordinaten $\left(-\frac{1132}{581} \mid -\frac{3496}{581} \mid \frac{55536}{581}\right)$ bzw. $\left(\frac{3476}{581} \mid -\frac{1192}{581} \mid \frac{56016}{581}\right)$,

- dass der Mittelpunkt von P und Q genau in Höhe der minimalen Bodenfläche liegt,
- dass der Mittelpunkt von P und Q nicht auf der zugehörigen Seitenfläche liegt, dass die Seitenflächen des Hauses also gekrümmt sein müssen. **20 P**

Erwartungshorizont

Die in a) vorgegebene Alternative wird als Ersatzlösung bezeichnet und im Folgenden bei Abweichungen erwähnt.

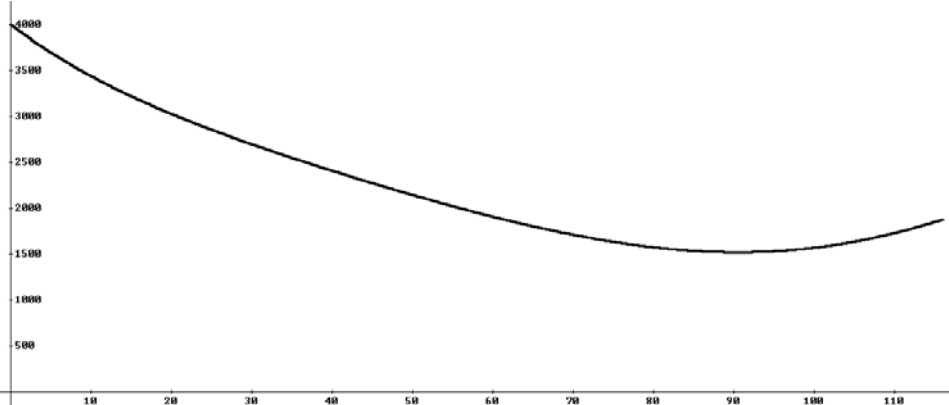
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Wir wählen die x-y-Ebene als Erdgeschossenebene, dann kann man für die Eckpunkte des Erdgeschossbodens z. B. folgende Punkte wählen: $A_0(10 -10 0)$, $B_0(10 10 0)$, $C_0(-10 10 0)$, $D_0(-10 -10 0)$.</p> <p>Als Eckpunkte des Daches kann man wählen: $A_1(-5 -5 120)$, $B_1(5 -5 120)$, $C_1(5 5 120)$, $D_1(-5 5 120)$.</p> <p>Dabei wurden die von oben nach unten verlaufenden Hauskanten jeweils durch zwei Punkte mit dem gleichen Buchstaben als Bezeichner gekennzeichnet.</p>	10		
b)	<p>– Es genügt, eine der vier gleich langen Kantenlängen zu berechnen: $\overline{A_0A_1} = \sqrt{(-5-10)^2 + (-5+10)^2 + (120-0)^2}$ $= \sqrt{225 + 25 + 14400} = \sqrt{14650} = 121,037\dots$ <p>Jede von oben nach unten verlaufende Hochhauskante ist etwa 121 m lang.</p> <p>– Die vier von oben nach unten verlaufenden Kanten haben die Parameterformen: $\vec{a}_\lambda = \vec{a}_0 + \lambda \cdot (\vec{a}_1 - \vec{a}_0)$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$, $\vec{b}_\lambda = \vec{b}_0 + \lambda \cdot (\vec{b}_1 - \vec{b}_0)$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$, $\vec{c}_\lambda = \vec{c}_0 + \lambda \cdot (\vec{c}_1 - \vec{c}_0)$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$, $\vec{d}_\lambda = \vec{d}_0 + \lambda \cdot (\vec{d}_1 - \vec{d}_0)$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$.</p> <p>Betrachtet man beispielsweise die Kante $\overline{A_0A_1}$, so erhält man diese in Koordinatenform: $(-15\lambda + 10 5\lambda - 10 120\lambda)$. In der Höhe h ist die z-Komponente gleich h und damit $\lambda = \frac{h}{120}$.</p> <p>Einsetzen ergibt: $\left(10 - \frac{h}{8} -10 + \frac{h}{24} h\right)$, was zu zeigen ist.</p> <p>– Da die Bodenfläche des 11. Stockwerkes bei $h = 40$ liegt, erhält man auf der Kante $\overline{A_0A_1}$ den Punkt $\left(5 -\frac{25}{3} 40\right)$ bzw. $(5 -8,\bar{3} 40)$.</p> <p>Auf die gleiche Weise oder durch Ausnutzen der Symmetrie erhält man die Koordinaten aller vier Fußbodeneckpunkte des 11. Stockwerkes: $A_{\frac{1}{3}}(5 -8,\bar{3} 40)$, $B_{\frac{1}{3}}(8,\bar{3} 5 40)$, $C_{\frac{1}{3}}(-5 8,\bar{3} 40)$, $D_{\frac{1}{3}}(-8,\bar{3} -5 40)$.</p> </p>	5	5	

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung																										
		I	II	III																								
	<p><i>Ersatzlösung:</i></p> $A_{\frac{1}{3}} \left(8, \bar{3} \mid 5 \mid 40 \right), \quad B_{\frac{1}{3}} \left(-5 \mid 8, \bar{3} \mid 40 \right),$ $C_{\frac{1}{3}} \left(-8, \bar{3} \mid -5 \mid 40 \right), \quad D_{\frac{1}{3}} \left(5 \mid -8, \bar{3} \mid 40 \right).$ <p><i>Bemerkung:</i> Diese Werte können entweder durch Einsetzen in alle vier Parameterdarstellungen oder durch Einsetzen in nur eine der vier Parameterdarstellungen und Ausnutzen der Symmetrie gewonnen werden.</p>																											
c)	<p>Der Stockwerknnummer n entspricht die Bodenhöhe $4(n - 1)$. Eine Auswertung der gegebenen Funktionsgleichung ergibt folgende Tabelle:</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>1</th> <th>5</th> <th>10</th> <th>15</th> <th>20</th> <th>25</th> <th>30</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>h [m]</td> <td>0</td> <td>16</td> <td>36</td> <td>56</td> <td>76</td> <td>96</td> <td>116</td> </tr> <tr> <td>$W(h)$</td> <td>0°</td> <td>$4,4^\circ$</td> <td>$12,1^\circ$</td> <td>$23,6^\circ$</td> <td>$40,8^\circ$</td> <td>$63,4^\circ$</td> <td>$86,0^\circ$</td> </tr> </tbody> </table> <p>Der halben Höhe 60 m entspricht das 16. Stockwerk mit dem Drehwinkel $26,6^\circ$. In 80 m Höhe, also im 21. Stockwerk wird der Drehwinkel von 45° realisiert.</p> <p><i>Begründung der Funktionsgleichung:</i> (vgl. Skizze rechts von der Aufgabe)</p> <p>Die Verbindungslinie von z. B. A_0 zum Ursprung schließt mit der y-Achse einen Winkel von 45° ein. Der eingezeichnete Punkt A_x hat die Form (vgl. b):</p> $\left(10 - \frac{h}{8} \mid -10 + \frac{h}{24} \mid h \right).$ <p>Für den Winkel α, den der zugehörige Ortsvektor mit der y-Achse bildet, gilt</p> $\tan \alpha = \frac{10 - \frac{h}{8}}{-10 + \frac{h}{24}} = \frac{80 - h}{-240 + h} = \frac{3(80 - h)}{-240 + h}.$ <p><i>(Bemerkung: Es empfiehlt sich den Winkel zur <u>y-Achse</u> und nicht - wie oft üblich - zur <u>x-Achse</u> zu betrachten, um die Definitionslücke des Tangens bei $h = 80$ zu vermeiden).</i></p> <p>Dieser Term für $\tan \alpha$ hat eine Nullstelle bei $h = 80$, dort ist also $\alpha = 0^\circ$. (was noch einmal bestätigt, dass In 80 m Höhe der Drehwinkel von $W(80) = 45^\circ$ realisiert wird).</p> <p>Um α (als Funktion von h) zu bestimmen, muss man übergehen zum Arcus-Tangens. Dieser ist ebenso wie der Tangens negativ links von $h = 80$ und positiv rechts von $h = 80$. Dies entspricht auch der geometrischen Gegebenheit, dass man - um den gesuchten Drehwinkel $W(\alpha)$ zu bekommen - links von $h = 80$ das Winkelmaß von α von 45° abziehen und rechts von $h = 80$ zu 45° addieren muss. Es gilt also $W(h) = \arctan\left(\frac{3(80 - h)}{h - 240}\right) + 45^\circ$, w.z.b.w.</p>	n	1	5	10	15	20	25	30	h [m]	0	16	36	56	76	96	116	$W(h)$	0°	$4,4^\circ$	$12,1^\circ$	$23,6^\circ$	$40,8^\circ$	$63,4^\circ$	$86,0^\circ$	10	5	10
n	1	5	10	15	20	25	30																					
h [m]	0	16	36	56	76	96	116																					
$W(h)$	0°	$4,4^\circ$	$12,1^\circ$	$23,6^\circ$	$40,8^\circ$	$63,4^\circ$	$86,0^\circ$																					

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung			
		I	II	III	
d)	<p>Der Flächeninhalt $F(h)$ einer Bodenfläche als Funktion von h ist das Quadrat des Abstandes von zwei zugehörigen benachbarten Bodenecken. Solche zwei Ecken haben z. B. die Koordinaten</p> $a_0 + \frac{h}{120} \cdot (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) = \left(10 - \frac{h}{8} \mid -10 + \frac{h}{24} \mid h \right) \text{ und}$ $\bar{b}_0 + \frac{h}{120} \cdot (\bar{b}_1 - \bar{b}_0) = \left(10 - \frac{h}{24} \mid 10 - \frac{h}{8} \mid h \right).$ <p><i>Ersatzlösung:</i> $\left(10 - \frac{h}{24} \mid 10 - \frac{h}{8} \mid h \right) \text{ und } \left(-10 + \frac{h}{8} \mid 10 - \frac{h}{24} \mid h \right).$</p> <p>Ein Geschoss hat eine quadratische Grundfläche. Der Betrag des Differenzvektors gibt die Seitenlänge an. Zur Bestimmung des Flächeninhalts muss diese also quadriert werden.</p> <p>Differenzvektor: $\left(\frac{h}{12} \mid -\frac{h}{6} + 20 \mid 0 \right)$. Quadrat: $F(h) = \frac{5}{144} \cdot (h^2 - 192h + 11520)$.</p> <p>Die quadratische Funktion F hat ihr Minimum bei $h = 96$, also hat das 25. Stockwerk in der Höhe von 96 m die minimale Bodenfläche.</p> <p><i>Alternative:</i> Es genügt, das Quadrat des Abstandes von $\left(10 - \frac{h}{8} \mid -10 + \frac{h}{24} \mid h \right)$ von der z-Achse zu betrachten (halbe Diagonale im entsprechenden Bodenquadrat) und (wenn man will, zu verdoppeln), denn</p> $2F(h) = \left(10 - \frac{h}{8} \right)^2 + \left(-10 + \frac{h}{24} \right)^2.$ <p>So erhält man auch den Term für $F(h)$ bzw. $\frac{F(h)}{2}$.</p>				10
e)	<p>Die gesuchte ganzrationale Funktion p kann durch eine Steckbriefaufgabe gelöst werden: Als Ansatz wählt man $p(h) = a \cdot h^3 + b \cdot h^2 + c \cdot h + d$</p> <p>Als Lösung des linearen Gleichungssystems</p> $p(0) = 10 \wedge p(116) = 20 \wedge p'(0) = 0 \wedge p'(116) = 0$ <p>erhält man mithilfe des solve-Befehls $a = -\frac{5}{39024}$, $b = \frac{15}{6728}$, $c = 0$ und $d = 10$, sodass der Funktionsterm die folgende Gestalt hat: $p(h) = -\frac{5}{390224}h^3 + \frac{15}{6728}h^2 + 10$.</p> <p>Eine zweite Möglichkeit besteht durch Integration von p'. Es muss ja gelten: $p'(h) = a \cdot h \cdot (h - 116)$. Also</p> $p(h) = \int a \cdot h \cdot (h - 116) dh = \frac{a}{3}h^3 - 58 \cdot a \cdot h^2 + C.$ <p>Aus $p(0) = 10$ folgt $C = 10$. Aus $p(116) = 20$ folgt danach $a = -\frac{15}{390244}$,</p>				

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung																							
		I	II	III																					
	<p>also $p(h) = -\frac{5}{390224}h^3 + \frac{15}{6728}h^2 + 10 = -\frac{5}{390224}(h^3 - 174h^2 - 780448)$.</p> <p>Im Inneren des relevanten Intervalls von $h = 0$ bis $h = 116$ ist die Ableitung p' positiv (zwischen den Nullstellen einer nach unten geöffneten Parabel), also ist p streng monoton wachsend, der Mietpreis pro Quadratmeter steigt also mit der durch die Höhe bedingten immer schöneren Aussicht.</p> <p>Für die Miete eines ganzen Stockwerkes in der Höhe h gilt dann (vgl. d)):</p> $Mi(h) = F(h) \cdot p(h) = \left(\frac{5}{144}(h^2 - 192h + 11520) \right) \cdot \left(-\frac{5}{390224}h^3 + \frac{15}{6728}h^2 + 10 \right)$ $= -\frac{25}{56192256}h^5 + \frac{1525}{9365376}h^4 - \frac{975}{48778}h^3 + \frac{7025}{60552}h^2 - \frac{200}{3}h + 4000.$ <p>Durch Plotten dieser Funktion erkennt man, dass sie ein absolutes Minimum bei etwa $h = 90$ besitzt, also zwischen dem 23. und 24. Stockwerk ($h = 88$ und $h = 92$):</p>  <p>Setzt man diese beiden Werte ein, erhält man: $Mi(88) \approx 1524$ und $Mi(92) \approx 1522$.</p> <p>Im 24. Stockwerk ist die Miete also am geringsten.</p> <p>Man kann den Funktionsterm von Mi natürlich auch ableiten und numerisch die relevante Nullstelle dieser Ableitung bestimmen: $h_{Min} \approx 90,48$. Die obige Überprüfung muss dann aber trotzdem erfolgen.</p> <p>Man könnte auch rein empirisch vorgehen und in einer Wertetabelle z. B. die Stockwerke 21 bis 26 untersuchen:</p> <table border="1" data-bbox="311 1720 1145 1859"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>21</th> <th>22</th> <th>23</th> <th>24</th> <th>25</th> <th>26</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>h [m]</td> <td>80</td> <td>84</td> <td>88</td> <td>92</td> <td>96</td> <td>100</td> </tr> <tr> <td>$Mi(h)$ [€]</td> <td>1574</td> <td>1542</td> <td>1524</td> <td>1522</td> <td>1537</td> <td>1569</td> </tr> </tbody> </table> <p><i>Bemerkung: Dieses methodische Abweichen von der üblichen Minimax-Bestimmung ist typisch bei Verwendung von CAS-Rechnern in angewandten Aufgabenstellungen und sollte so oder ähnlich auch als richtig gewertet werden.</i></p>	n	21	22	23	24	25	26	h [m]	80	84	88	92	96	100	$Mi(h)$ [€]	1574	1542	1524	1522	1537	1569			
n	21	22	23	24	25	26																			
h [m]	80	84	88	92	96	100																			
$Mi(h)$ [€]	1574	1542	1524	1522	1537	1569																			
				25																					

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	<p>– Man zeigt, dass die beiden von den Hauskanten $\overline{A_0A_1}$ und $\overline{B_0B_1}$ gebildeten Geraden keinen Punkt gemeinsam haben (parallel sind sie offensichtlich nicht).</p> <p>Zu lösen wäre: $\overline{a_0} + \lambda \cdot (\overline{a_1} - \overline{a_0}) = \overline{b_0} + \mu \cdot (\overline{b_1} - \overline{b_0})$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, also das lineare Gleichungssystem</p> $\begin{array}{rcl} 10 - 15\lambda = 10 - 5\mu & & 10 - 5\lambda = -10 + 15\mu \\ -10 + 5\lambda = 10 - 15\mu & \text{Ersatzlösung:} & 10 - 15\lambda = 10 - 5\mu \\ 120\lambda = 120\mu & & 120\lambda = 120\mu \end{array}$ <p>Die letzte Gleichung ergibt $\lambda = \mu$ und die erste Gleichung zeigt dann sofort, dass das Gleichungssystem nicht lösbar ist.</p> <p>Die beiden Geraden (Kanten) sind also windschief.</p> <p><u>Alternative Lösung:</u> Die Windschiefe ist auch dadurch einzusehen, dass andernfalls aus Symmetriegründen je zwei benachbarte Kanten einen gemeinsamen Punkt hätten und dass alle diese vier Punkte in gleicher Höhe sein müssten. Dann fielen diese vier Punkte aber in einem Punkt auf der z-Achse zusammen, in einer Spitze also, und der Turm wäre ein(e) gewöhnliche(r) quadratische(r) Pyramide(-nstumpf). Das widerspricht aber der Lage der oberen vier Eckpunkte.</p> <p>Auch die in d) erkannte Existenz einer minimalen Bodenfläche könnte hier als Begründung herangeführt werden.</p> <p>– Die Bestimmung der Punkte P und Q kann entweder über Orthogonalitätsbetrachtungen oder über die Minimierung der Abstandsfunktion (mit zwei Variablen, also über partielle Ableitungen) erfolgen. Hier wird der erste Weg dargestellt:</p> <p>\overline{PQ} muss (z. B.) orthogonal zu $\overline{A_1A_0}$ und orthogonal zu $\overline{B_1B_0}$ sein:</p> $\left((\overline{b_0} + \mu(\overline{b_1} - \overline{b_0})) - (\overline{a_0} + \lambda(\overline{a_1} - \overline{a_0})) \right) \cdot (\overline{a_1} - \overline{a_0}) = 0$ $\left((\overline{b_0} + \mu(\overline{b_1} - \overline{b_0})) - (\overline{a_0} + \lambda(\overline{a_1} - \overline{a_0})) \right) \cdot (\overline{b_1} - \overline{b_0}) = 0, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$ <p>Einsetzen ergibt:</p> $\begin{array}{l} 293\lambda - 288\mu = 2 \\ 288\lambda - 293\mu = -6, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{array}$ <p>mit den Lösungen</p> $\lambda = \frac{2314}{2905} = 0,7965\dots \quad \text{und} \quad \mu = \frac{2334}{2905} = 0,803\dots \quad \text{und den zugehörigen Punkten}$ $P\left(-\frac{1132}{581} \mid -\frac{3496}{581} \mid \frac{55536}{581}\right) \approx (-1,948365 \mid -6,017212 \mid 95,586919) \quad \text{und}$ $Q\left(\frac{3476}{581} \mid -\frac{1192}{581} \mid \frac{56016}{581}\right) \approx (5,982788 \mid -2,051635 \mid 96,413081).$			5
			5	

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p><i>Ersatzlösung:</i></p> $P\left(\frac{3496}{581} \mid -\frac{1132}{581} \mid \frac{55536}{581}\right) \approx (6,017212 \mid -1,948365 \mid 95,586919) \text{ und}$ $Q\left(\frac{1192}{581} \mid \frac{3476}{581} \mid \frac{56016}{581}\right) \approx (2,051635 \mid 5,982788 \mid 96,413081).$ <p><i>Die Punkte liegen knapp unterhalb bzw. oberhalb der minimalen Bodenfläche.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – Der Mittelpunkt M der Strecke \overline{PQ} hat die Koordinaten $\frac{1}{2} \cdot (\vec{p} + \vec{q}) = \left(\frac{1172}{581} \mid -\frac{2344}{581} \mid 96\right) \approx (2,017212 \mid -4,034423 \mid 96),$ liegt also exakt auf der Höhe der minimalen Bodenfläche. – Wenn dieser Punkt auf der Seitenfläche läge, müsste er auf der entsprechenden Fußbodenkante liegen, also auf der Strecke $\overline{A_{\frac{96}{120}} B_{\frac{96}{120}}}$. <p>Es gilt: $A_{\frac{96}{120}}(-2 \mid -6 \mid 96)$ und $B_{\frac{96}{120}}(6 \mid -2 \mid 96)$.</p> <p>Ersatzlösung: $A_{\frac{96}{120}}(6 \mid -2 \mid 96)$ und $B_{\frac{96}{120}}(2 \mid 6 \mid 96)$.</p> <p>Es müsste also gelten:</p> $\vec{m} = \vec{a}_{\frac{96}{120}} + \lambda \cdot \left(\vec{b}_{\frac{96}{120}} - \vec{a}_{\frac{96}{120}}\right), \text{ also } \begin{pmatrix} \frac{1172}{581} \\ -\frac{2344}{581} \\ 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 96 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \left(\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 96 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 96 \end{pmatrix} \right).$ <p>Dies führt auf die beiden Gleichungen</p> $8\lambda - 2 = \frac{1172}{581} \quad \text{und} \quad 4\lambda - 6 = -\frac{2344}{581},$ <p>die offensichtlich nicht gleichzeitig erfüllt werden können.</p> <p>Der Punkt M liegt also nicht auf der entsprechenden Seitenfläche. Wäre die Seitenfläche eben, dann müsste der Punkt M auf ihr liegen. Dies ist aber nicht der Fall.</p> <p>Dass die Seitenflächen nicht eben sind, folgt auch aus der Windschiefe der jeweils zugehörigen zwei von oben nach unten verlaufenden Kanten. Denn diese liegen ja in der Seitenfläche und könnten nicht windschief sein, wenn die Seitenfläche eben wäre.</p>		5	
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

II.2 Insektenpopulation

In den Tropen legen die Weibchen einer bestimmten Insektenpopulation jedes Jahr kurz vor Beginn der Regenzeit ihre Eier und sterben bald darauf. Durchschnittlich kommen dabei auf jedes ausgewachsene Insekt etwa 90 Eier, aus denen wenig später Larven schlüpfen. Der Larvenbestand nimmt von Jahr zu Jahr durch Witterungseinflüsse, aber auch durch den Verzehr durch andere Tiere, ab. Im dritten Jahr verpuppen sich die Larven, und aus einem Teil der Puppen entwickeln sich im folgenden Jahr Insekten, die wieder kurz vor Beginn der Regenzeit für den Fortbestand sorgen. Die jährliche Entwicklung dieser Insektenpopulation wird durch die nebensehende Populationsmatrix A beschrieben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Betrachten Sie zunächst die Populationsmatrix A .

- Stellen Sie das durch A beschriebene Modell mit einem Übergangsgraphen dar.
- Beschreiben Sie die biologische Bedeutung der von Null abweichenden Komponenten der Matrix A .

15 P

b) Im Weiteren wird die Entwicklung der Insektenpopulation genauer untersucht.

- Berechnen Sie die ersten 10 Potenzen der Populationsmatrix A .
- Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Hinblick auf die Insektenpopulation.

10 P

Gehen Sie in den folgenden Aufgabenteilen c), d) und e) davon aus, dass sich die Insekten entsprechend dem obigen Modell, d. h. mithilfe der Populationsmatrix A entwickeln.

c) In einem Naturreservat hat man zum Beginn der Untersuchung pro ha Waldfläche den folgenden Bestandsvektor \vec{p}_0 ermittelt:

Alter	Name	Anzahl
0 bis 1 Jahre	Larven 1	9000
1 bis 2 Jahre	Larven 2	3000
2 bis 3 Jahre	Puppen	900
3 bis 4 Jahre	ausgewachsene Insekten	700

- Berechnen Sie den zu erwartenden Bestandsvektor \vec{p}_1 der Insektenpopulationen im Jahr nach dem Beginn der Untersuchung.
- Bestimmen Sie den Bestandsvektor \vec{p}_{-1} der Insektenpopulation im Jahr vor Beginn der Untersuchung.

15 P

d) Man spricht von einer Insektenschwemme, wenn mehr als 2000 ausgewachsene Insekten pro ha Waldfläche, bzw. von einem Unterbestand, wenn weniger als 100 ausgewachsene Insekten pro ha Waldfläche vorkommen.

Entscheiden Sie, ob und gegebenenfalls wann es bei langfristig ungestörter Entwicklung der Population

- zu einer Insektenschwemme oder
- zu einem Unterbestand

kommt.

10 P

Leistungskurs Mathematik

- e) In einem benachbarten Gebiet ermitteln die Wissenschaftler seit Jahren eine annähernd konstante Anzahl ausgewachsener Insekten pro ha Baumbestand.
- Begründen Sie durch geeignete Rechnung, dass mithilfe der Populationsmatrix A das Auftreten einer stabilen Population erklärt werden kann.
 - Ermitteln Sie eine passende Startpopulation für den Fall, dass 250 ausgewachsene Insekten pro ha Baumbestand gezählt wurden. **10 P**
- f) Durch Umweltverschmutzung sinkt bei sonst gleich bleibenden Überlebensraten die Anzahl der von den Weibchen gelegten Eier auf durchschnittlich 60 Stück pro ausgewachsenem Insekt. Ermitteln Sie, wie sich diese Veränderung auf die langfristige Entwicklung der Insektenpopulation auswirkt. **10 P**
- g) Die untersuchte Insektenpopulation gilt als stark gefährdet, wenn in ihrem Verbreitungsgebiet pro ha Baumbestand dauerhaft weniger als 15 Insekten gezählt werden. Betrachten Sie für diesen Aufgabenteil den Bestandsvektor \vec{p}_0 aus dem Aufgabenteil c) und die Populationsmatrix aus dem Aufgabenteil f)
- Innerhalb eines jeden Zyklus gibt es eine maximale Insektenanzahl. Ermitteln Sie eine geeignete Funktion, die diese maximalen Insektenanzahlen beschreibt.
 - Bestimmen Sie das erste Jahr, ab welchem die Insektenpopulation in diesem Gebiet zu den gefährdeten Arten gehört. **10 P**
- h) Sie haben in den Aufgabenteilen f) und g) festgestellt, dass die durchschnittliche Anzahl der Eier pro ausgewachsenem Insekt bei gleich bleibender Überlebensrate der Larven einen großen Einfluss für die Gesamtentwicklung der Population dieser Insektenart hat. Ermitteln Sie einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Eier pro ausgewachsenem Insekt und der langfristigen Populationsentwicklung. Begründen Sie Ihr Ergebnis mithilfe des Modells. **10 P**
- i) Die Forscher erkennen, dass die neuen Umweltbedingungen zu weiteren Entwicklungsveränderungen geführt haben. Dieses wird in der Matrix A_{neu} dargestellt.

$$A_{neu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 45 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$$

- Interpretieren Sie die im Vergleich zur Matrix A veränderten Werte in A_{neu} im Kontext der Aufgabenstellung.
- Es gibt Vektoren, die in diesem neuen Modell aufgrund des Sachkontextes nicht als Bestandsvektoren vorkommen können. Begründen Sie dies, indem Sie z. B. Vorjahresbestände betrachten. **10 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p style="text-align: center;">90</p> <p>Biologische Bedeutung der Koeffizienten: $a_{13} = 90$ ist die Vermehrungsrate /Geburtenrate $a_{21} = \frac{1}{3}$ ist die Überlebensrate der Larven im 1. Jahr (Larven 1 / Eier) $a_{32} = \frac{1}{3}$ ist die Überlebensrate der Larven im 2. Jahr (Larven 2) $a_{33} = \frac{1}{10}$ ist die Überlebensrate der verpuppten Larven im 3. Jahr (Puppen)</p>	10	5	
b)	<p>Berechnung von A^n mit $n = 1, 2, 3, \dots, 10$.</p> <p>Die Matrix A^4 ist identisch mit der Einheitsmatrix E. Also gilt: $A = A^5$ und $A^2 = A^6 \dots$ usw.</p> <p>Für die Entwicklung der Population bedeutet das, dass sich in einem Zyklus von vier Jahren wieder die Ausgangspopulation einstellt.</p>	5	5	
c)	<p>Bestimmung von \vec{p}_1:</p> $\vec{p}_1 = A \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9000 \\ 3000 \\ 900 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63000 \\ 3000 \\ 1000 \\ 90 \end{pmatrix}$			

Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Bestimmung von \vec{p}_{-1}:</p> <p>Z. B. aus dem Ansatz $\vec{p}_0 = A \cdot \vec{p}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9000 \\ 3000 \\ 900 \\ 700 \end{pmatrix}$</p> <p>erhält man z. B. mithilfe des solve-Befehls</p> <p>$x_1 = 9000, x_2 = 2700, x_3 = 7000, x_4 = 100$ und $\vec{p}_{-1} = \begin{pmatrix} 9000 \\ 2700 \\ 7000 \\ 100 \end{pmatrix}$.</p> <p>Ein weiterer Ansatz ergibt sich z. B. mithilfe der inversen Matrix: $\vec{p}_{-1} = A^{-1} \cdot \vec{p}_0$ oder aus der Zykluseigenschaft.</p>	10	5	
d)	<p>Die Lösung erhält man durch Rückgriff auf b) oder durch Bestimmung der der Vektoren \vec{p}_1 bis \vec{p}_3 danach wiederholen sich die Ergebnisse.</p> <p>$\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 9000 \\ 3000 \\ 900 \\ 700 \end{pmatrix}, \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 63000 \\ 3000 \\ 1000 \\ 90 \end{pmatrix}, \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 8100 \\ 21000 \\ 1000 \\ 100 \end{pmatrix}$ und $\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 9000 \\ 2700 \\ 7000 \\ 100 \end{pmatrix}$,</p> <p>Es tritt keine Insektenschwemme auf, da nie mehr als 700 (ausgewachsene) Insekten auftreten.</p> <p>Ein Unterbestand tritt im 1. Jahr nach Untersuchungsbeginn auf, also auch im 5. Jahr usw.</p> <p>Bei einer ungestörten Entwicklung treten alle 4 Jahre Unterbestände auf, d. h. in den Jahren $1 + 4 \cdot n, n \in \mathbb{N}^0$.</p>			10
e)	<p>Die Aufgabenstellung führt zum folgenden LGS: $A \cdot \vec{p}_x = \vec{p}_x$, d. h.</p> <p>$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Die Lösung z. B. mit dem solve-Befehl ergibt</p> <p>eine parameterabhängige Lösung. Die könnte z. B. folgendermaßen aussehen: $x_1 = 90x_4, x_2 = 30x_4, x_3 = 10x_4, x_4 \in \mathbb{N}^*$.</p>			

Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Mit diesem Modell ist also eine stabile Population möglich.</p> <p>Setzt man in $\vec{p}_x = \begin{pmatrix} 90x_4 \\ 30x_4 \\ 10x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$ die x_4-Komponente gleich 250, so erhält man</p> $\vec{p}_x = \begin{pmatrix} 22500 \\ 7500 \\ 2500 \\ 250 \end{pmatrix}$ <p>Dieses ist die gesuchte Startpopulation für einen stabilen Zustand mit 250 Insekten.</p>			10
f)	<p>Mit den neuen Bedingungen erhält man die neue Populationsmatrix</p> $A_U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 60 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$ <p>Nun werden wieder (wie im Aufgabenteil b)) die Potenzen der Populationsmatrix untersucht. Berechnungen ergeben,</p> $\text{dass } A_U^4 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$ <p>Die Matrix A_U^4 ist identisch mit der um $\frac{2}{3}$ „vervielfachten“ Einheitsmatrix E.</p> <p>Die Insektenpopulation wird nach jeweils vier Jahren auf $\frac{2}{3}$ des Bestandes ihres vorherigen Bestandes sinken. Sie stirbt langfristig aus.</p> <p>Auch eine Betrachtung mithilfe des Anfangsbestandes \vec{p}_0 ist möglich.</p>			10

Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
g)	<p>Die Insektenanzahlen für die Matrix A sind für die ersten Jahre (beginnend mit dem Jahr Null: 700, 90, 100, 100, 700, 90,</p> <p>Die entsprechenden Insektenanzahlen für die Matrix A_U sind, auf ganze Tiere gerundet: 700, 90, 100, 100, 466, 60, 66, 66, 311,</p> <p>Da $A_U^4 = \frac{2}{3}E$ ergeben sich die maximalen Insektenanzahlen in den Jahren 0, 4, 8, ..., also für $t = 4 \cdot n$, $n \in \mathbb{N}^0$</p> <p>Betrachtet man die „Hochzahlen“ des 4-Jahres-Zyklus, so ergibt sich, dass die Werte auf jeweils $\frac{2}{3}$ des Vorwertes sinken.</p> <p>Damit ergibt sich die Funktionsgleichung</p> $f(t) = 700 \cdot \left(\frac{60}{90}\right)^t = 700 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t, \text{ mit } t = 4 \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}^0$ <p>Gelöst werden muss $f(t) \leq 15$. Z. B. Mithilfe des solve-Befehls oder einer Wertetabelle erhält man $t \geq 9,47808$.</p> <p>Im 10. Zyklus, also nach $4 \cdot 10 = 40$ Jahren ist maximale Anzahl der Insekten erstmalig unter 15 gefallen.</p> <p>Man muss aber beachten, dass schon in den Jahren vorher die Maximalzahl eines Zyklus nicht erreicht wird, denn $90 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \approx 2,34$. Also sind schon alle Werte in diesem Zyklus unter 15 Stück pro ha, sodass schon ab dem 37. Jahr die Insektenanzahl dauerhaft unter 15 Insekten pro ha liegt.</p>		5	5
h)	<p>Setzt man anstelle der Ei-Anzahlen eine Variable x ein und betrachtet den 4-Jahreszyklus, so ergibt sich der „Vermehrungsfaktor“ $\frac{x}{90}$.</p> <p>Für $0 < x < 90$ kommt es also zur Abnahme der Population, also langfristig zu einem Aussterben.</p> <p>Für $x = 90$ gibt es eine periodische, aber stabile Entwicklung der Population, für $x > 90$ wächst die Population (zumindest nach dem Modell) ins Unendliche.</p> <p>Begründet werden kann dies mithilfe der Matrixpotenzen:</p> $A_x^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \frac{x}{90} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{90} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{90} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x}{90} \end{pmatrix} = \frac{x}{90} \cdot E, \text{ also}$			

Leistungskurs Mathematik

		Lösungsskizze			Zuordnung, Bewertung		
					I	II	III
		$A_x^{4z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}^{4z} = \left(\begin{pmatrix} \frac{x}{90} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{90} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{90} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x}{90} \end{pmatrix} \right)^z = \left(\frac{x}{90} \right)^z \cdot E$				5	5
i)	<p>Interpretation:</p> <ul style="list-style-type: none"> Die durchschnittliche Eiablage ist von 90 auf 45 Eier pro Käfer gesunken. Ein Teil, genauer $\frac{1}{12}$ der Larven auf Stufe 1 geht bereits nach dem ersten Jahr ins Puppenstadium über, $\frac{1}{4}$ der Larven auf Stufe 1 geht in die Larvenstufe 2 über. Da $\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$, bleibt die Überlebensrate der Larven auf Stufe 1 gleich. Die restliche Entwicklung verläuft normal. <p>Die Ermittlung von $\vec{p}_{(a_0)-1}$ aus einer beliebigen Anfangspopulation \vec{p}_{a_0} führt zu dem Ansatz $\vec{p}_{a_0} = A_{neu} \cdot \vec{p}_{(a_0)-1}$:</p> $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 45 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45x_4 \\ \frac{1}{4}x_1 \\ \frac{1}{12}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \\ \frac{1}{10}x_3 \end{pmatrix}$ <p>Als Lösung ergibt sich:</p> $x_1 = 4a_2, x_2 = 3a_3 - a_2, x_3 = 10a_4, x_4 = \frac{1}{45}a_1$ <p>mit $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0 \wedge x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$.</p> <p>Aus $x_2 = 3a_3 - a_2$ ist unmittelbar zu erkennen, dass für die Fälle $a_2 > 3a_3$ die Nichtnegativitätsbedingung für die Anzahl der zweijährigen Larven nicht mehr gegeben ist. Also lässt sich für alle Vektoren, in denen die Anzahl der zweijährigen Larven mehr als dreimal so hoch ist wie die der Puppen, keine Vorjahrespopulation ermitteln, d. h., diese Vektoren treten in der Population als Bestandsvektoren nicht auf.</p>			5	5		
		Insgesamt 100 BWE			25	50	25

STOCHASTIK 1

III.1 Falschparker

Der Berliner Senat überlegt, ob er die Parkgebühren (1 € / h) erhöhen muss, damit die Einnahmeverluste durch Parken ohne gültigen Parkschein (so genanntes „Falschparken“) ausgeglichen werden können.

Nach Angabe des Senats beträgt der Anteil der Falschparker gemäß einer Studie aus dem Frühjahr ca. 15 %.

Die mittlere Parkdauer beträgt zwei Stunden.



- a) Zwei Politessen überprüfen zunächst den Parkplatz „Kudamm-Karree“ mit 34 Autos, dann den Parkplatz „Wertheim Kurfürstendamm“ mit 48 Autos.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Politessen auf dem Parkplatz „Kudamm-Karree“ genau drei Falschparker aufschreiben.
 - Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Politessen auf beiden Parkplätzen zusammen mindestens vier Falschparker aufschreiben.
 - Berechnen Sie, mit wie vielen Falschparkern die Politessen auf beiden Parkplätzen zusammen rechnen sollten.
 - Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Politessen beim Kudamm-Karree genau fünf und bei Wertheim genau sechs Falschparker finden. **25 P**
- b) In der Senatsverwaltung wird überlegt und anschließend eine Stichprobe von 500 überprüften Autos ausgewertet.
- Berechnen Sie zunächst, wie viele parkende Autos hätten überprüft werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99 % mindestens einen Falschparker zu erwischen.
 - Bestimmen Sie für diese Stichprobe den kleinstmöglichen Bereich, in dem die Zahl an Falschparkern mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % liegt. Dieser Bereich soll zusätzlich symmetrisch zum Erwartungswert liegen. **15 P**
- c) Es gibt nicht überall und jederzeit Politessen. Deswegen kann man davon ausgehen, dass nur etwa 10% von allen Falschparkern durch Kontrollen von Politessen gefunden werden. Etwa die Hälfte der Falschparker parkt nur kurz und kehrt nach wenigen Minuten zum Wagen zurück. Diese wird verwarnt und muss 1 € Parkgebühr nachbezahlen. Die andere Hälfte muss ein Bußgeld von 15 € bezahlen.
- Zeigen Sie, dass ein Falschparker durch sein Verhalten für die Stadt Berlin im Mittel 1,15 € Mindereinnahmen verursacht.
 - Bestimmen Sie den Betrag, auf den der Berliner Senat das Bußgeld erhöhen müsste, damit Falschparker keine Mindereinnahmen verursachen. **15 P**

Der Senat entschloss sich stattdessen zu einer drastischen Erhöhung der Parkgebühren. Im Gegensatz zum Senat befürchteten die Medien, dass (deswegen) der Anteil der Falschparker deutlich angestiegen sein könnte.

- d) Leiten Sie ein Testverfahren für eine Kontrolle von 2400 Fahrzeugen her, mit dem man die Befürchtung der Medien gegebenenfalls statistisch (auf dem 5 %-Niveau) begründen kann. **15 P**

Wenn man den Test aus d) sogar auf dem 1%-Niveau plante, so käme man zu dem Ergebnis, dass dann bei der Kontrolle mehr als 401 Falschparker gefunden werden müssten, um –statistisch begründet – behaupten zu können, dass sich der Anteil an Falschparkern erhöht hat. Auf diesen verschärften Test bezieht sich der folgende Aufgabenteil.

- e) Der tatsächliche Falschparkeranteil nach der Gebührenerhöhung sei p_1 .

- Betrachten Sie nun die Wahrscheinlichkeit β , dass der verschärfte Test kein signifikantes Ergebnis liefert (dass also nicht mehr als 401 Falschparker gefunden werden) als Funktion von p_1 ($\beta = \beta(p_1)$) in folgendem Definitionsintervall: $0,1 \leq p_1 \leq 0,2$.

(Diese Funktion heißt Operationsstatistik des Tests).

Geben Sie eine sinnvolle Wertetabelle mit 8 ausgewählten Werten an und zeichnen Sie den Graphen.

Bemerkung: Wenn Sie die Funktionswerte $\beta(p_1)$ nicht bestimmen können, so versuchen Sie wenigstens eine qualitative Skizze des Graphen anzufertigen.

- Interpretieren Sie im Sachkontext die Funktionswerte $\beta(p_1)$ für p_1 größer als 15 %.
- Angenommen $p_1 = 17\%$, und es werden weniger als 402 Falschparker gefunden, es liegt also kein signifikantes Ergebnis vor. Ist das überraschend? Kann sich in einem solchen Falle der Berliner Senat in seiner Ansicht bestätigt fühlen? Begründen Sie Ihre Antworten auf diese beiden Fragen. **30 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	<ul style="list-style-type: none"> Die Anzahl der Falschparker unter den 34 kontrollierten Fahrzeugen ist $B_{34;0,15}$-verteilt: $\binom{34}{3} \cdot 0,15^3 \cdot 0,85^{31} \approx 13\%$. Die Anzahl der Falschparker unter den 82 kontrollierten Fahrzeugen ist $B_{82;0,15}$-verteilt: $P(\text{„mind. 4 Falschparker“}) = 1 - P(\text{„höchstens 3 Falschparker“}) =$ $1 - P(X \leq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) \approx$ $1 - 0,0000016 - 0,000024 - 0,000169 - 0,000794 \approx 0,999.$ Die Wahrscheinlichkeit, mindestens 4 Falschparker zu ertappen, ist ca. 99,9%. $E(X) = 82 \cdot 0,15 = 12,3$. Die Politessen müssen mit ca. 12 Falschparkern rechnen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Politessen beim Kudamm-Karree genau 5 und bei Wertheim genau 6 Falschparker finden, beträgt $\binom{34}{5} \cdot 0,15^5 \cdot 0,85^{29} \cdot \binom{48}{6} \cdot 0,15^6 \cdot 0,85^{42} \approx 0,1897 \cdot 0,1517 \approx 0,0288 \approx 2,9\%$. 	15	10	
b)	<ul style="list-style-type: none"> Y: Anzahl der ertappten Falschparker bei n überprüften Autos; Y ist $B_{n;0,15}$-verteilt. $P(\text{mind. ein Falschparker}) = P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) \geq 0,99$, also $P(Y = 0) \leq 0,01$, d. h. man müsste mindestens 29 Autos kontrollieren. Kleinstmöglicher Bereich symmetrisch zum Erwartungswert: $n = 500$ und $p = 0,15 \Rightarrow \mu = 500 \cdot 0,15 = 75$. Durch Ausprobieren erhält man $P(X \leq 64) = 0,092272$ und $P(X \leq 65) = 0,115719$ sowie $P(X \geq 85) = 0,118118$ und $P(X \geq 86) = 0,095871$ Somit lautet das kleinstmögliche Intervall: $[64; 86]$. Hinweis: Gerätebedingt können hier geringfügig andere Ergebnisse auftreten. Alternativ kann man auch die Normalverteilung als Annäherung benutzen.: Es ist $\sigma = \sqrt{(500 \cdot 0,15 \cdot 0,85)} \approx 7,984$. Dann gilt: $P(X - \mu \leq d) = 2 \cdot \Phi(\frac{d}{\sigma}) - 1 \geq 0,80 \Leftrightarrow \Phi(\frac{d}{\sigma}) \geq \frac{1,8}{2} = 0,9$. Mithilfe eines CAS oder einer Tabelle für die Normalverteilung folgt: $\frac{d}{\sigma} \approx 1,282 \Rightarrow d \approx 10,42 \Rightarrow d \geq 11$. 	5	10	

Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung														
		I	II	III												
c)	<p>Es ist G die „Einnahmedifferenz“ die ein Falschparker gegenüber einem regelgerechten Verhalten verursacht.</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <thead> <tr> <th></th> <th>Falschparker nicht ertappt</th> <th>Falschparker verwarnt</th> <th>Falschparker ertappt</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>g_i (in €)</td> <td>-2</td> <td>0</td> <td>13</td> </tr> <tr> <td>$P(G = g_i)$</td> <td>0,9</td> <td>0,05</td> <td>0,05</td> </tr> </tbody> </table> <p>Erwartungswert $E(G) = (-2) \cdot 0,90 + 13 \cdot 0,05 = -1,15$, d. h., pro Falschparker macht die Stadt im Durchschnitt einen Verlust von 1,15 €.</p> <p>Man müsste also eine Erhöhung des Bußgeldes beschließen, um mindestens ohne Verlust für die Stadt zu arbeiten.</p> <p>Ist B das erhöhte Bußgeld, so gilt:</p> $E(G) = (-2) \cdot 0,90 + (B - 2) \cdot 0,05 = 0 \Leftrightarrow B = 38.$ <p>Damit kein Verlust entsteht, müsste das Bußgeld mindestens auf 38 € erhöht werden.</p>		Falschparker nicht ertappt	Falschparker verwarnt	Falschparker ertappt	g_i (in €)	-2	0	13	$P(G = g_i)$	0,9	0,05	0,05		10	5
	Falschparker nicht ertappt	Falschparker verwarnt	Falschparker ertappt													
g_i (in €)	-2	0	13													
$P(G = g_i)$	0,9	0,05	0,05													
d)	<p>Die Medien könnten ihre Behauptung statistisch belegen, wenn die Nullhypothese $H_0 : p \leq 0,15$ verworfen werden könnte, d. h. wenn die Anzahl X der in der Stichprobe auftretenden Falschparker genügend groß ist. Wir bestimmen eine möglichst kleine Schranke K so, dass $P(\{X > K\} H_0) \leq 5\%$.</p> <p>Zunächst können wir abschätzen: $P(\{X > K\} H_0) \leq P(\{X > K\} p = 0,15)$.</p> <p>Durch Ausprobieren erhält man $P(X > 388) = 0,52758$ und $P(X > 389) = 0,047002$.</p> <p>Also liegt bei mehr als 389 Falschparkern ein signifikantes Ergebnis vor. In diesem Falle könnten die Medien sich – statistisch begründet - bestätigt fühlen.</p> <p>Alternativ kann man mit der Normalverteilung arbeiten:</p> <p>Unter der Bedingung $p = 0,15$ ist $\frac{X - \mu + 0,5}{\sigma}$ in guter Näherung standard-normalverteilt mit</p> $\mu = 2400 \cdot 0,15 = 360 \text{ und } \sigma = \sqrt{2400 \cdot 0,15 \cdot 0,85} \approx 17,49.$ <p>Der Tabelle entnimmt man für eine standard-normalverteilte Zufallsvariable N: $P(N > 1,645) \approx 5\%$. Also</p> $P\left(\frac{X - \mu + 0,5}{\sigma} > 1,645 \mid p = 0,15\right) \leq 5\%$ $\Leftrightarrow P(X > \mu - 0,5 + 1,645 \cdot \sigma \mid p = 0,15) \leq 5\%$ $\Leftrightarrow P(X > 388,31 \mid p = 0,15) \leq 5\%$ <p>Die Nullhypothese kann also auf dem 5 %-Niveau verworfen werden, wenn in der Stichprobe mehr als 389 Falschparker angetroffen werden.</p>		15													

Leistungskurs Mathematik

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung																				
		I	II	III																		
e)	<ul style="list-style-type: none"> Es gilt, $P(\{X \leq 401\} p = p_1)$ zu bestimmen 																					
	<table border="1"> <tr> <td>p_1</td> <td>0,1</td> <td>0,14</td> <td>0,15</td> <td>0,155</td> <td>0,16</td> <td>0,17</td> <td>0,18</td> <td>0,2</td> </tr> <tr> <td>$\beta(p_1)$</td> <td>1</td> <td>0,99992</td> <td>0,99044</td> <td>0,95083</td> <td>0,83516</td> <td>0,36393</td> <td>0,05154</td> <td>0,00002</td> </tr> </table>				p_1	0,1	0,14	0,15	0,155	0,16	0,17	0,18	0,2	$\beta(p_1)$	1	0,99992	0,99044	0,95083	0,83516	0,36393	0,05154	0,00002
	p_1				0,1	0,14	0,15	0,155	0,16	0,17	0,18	0,2										
$\beta(p_1)$	1	0,99992	0,99044	0,95083	0,83516	0,36393	0,05154	0,00002														
<ul style="list-style-type: none"> Funktionswerte $\beta(p_1)$ für p_1 größer als 15 % geben Wahrscheinlichkeiten für Fehler 2. Art an, falls $p = p_1$. Erst wenn p_1 größer als 19 % ist auch die Wahrscheinlichkeit, für den zugehörigen Fehler 2. Art so klein, dass fast immer ein signifikantes Ergebnis erzielt wird. Wenn $p_1 = 17\%$, wäre einerseits die Falschparkerquote deutlich gestiegen, andererseits ist $\beta(p_1)$ noch ca. 36 %, d. h. mit ziemlich hoher Wahrscheinlichkeit „entdeckt“ der Test dieses Ergebnis nicht (kommt zu keinem signifikanten Ergebnis). Dies ist also nicht überraschend. Keine Signifikanz bedeutet aber nicht, dass ein statistisches Argument für eine unveränderte Falschparkerquote vorliegt. Der Berliner Senat sollte sich also nicht in seiner Ansicht bestätigt fühlen. 		15	15																			
Insgesamt 100 BWE		20	60	20																		

STOCHASTIK 2

III.2 Rund um den HSV

Der Hamburger SV trägt seine Heimspiele in der 57 000 Zuschauer fassenden Arena im Volkspark aus (siehe nebenstehende Abbildung).

- a) In der ersten Reihe eines Sitzbereichs befinden sich 31 Plätze, von denen im letzten Saisonspiel 29 besetzt werden.

- Berechnen Sie die Anzahl aller Möglichkeiten, wie sich die 29 (unterscheidbaren) Personen auf die 31 Plätze verteilen können.
- Berechnen Sie die Anzahl aller Möglichkeiten, wie sich die freien Plätze verteilen könnten. **15 P**

- b) Die Bundesligastatistik über viele Jahre weist aus, dass im Mittel etwa 3 Tore pro Spiel (Spieldauer: 90 Minuten) fallen.



Arena des HSV

Ein Zuschauer verlässt während der Spielzeit für 3 Minuten seinen Sitzplatz, um die Toilette aufzusuchen. Auf dem Weg überlegt er sich, ob er bis zu seiner Rückkehr ein Tor „verpasst“ haben wird. Sie sollen deshalb gleich die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass ausgerechnet in diesen 3 Minuten mindestens ein Tor fällt. Bitte lesen Sie aber vorher den folgenden Hinweis:

Hinweis: Nehmen Sie an, dass der Erwartungswert μ der Anzahl T der in einem fest ausgewählten Zeitintervall fallenden Tore während eines Bundesligaspiels nur von der Länge dieses Zeitintervalls abhängig ist und zu dieser proportional ist.

Dann kann man für T die Poissonverteilung verwenden: $P(\{T = k\}) = \frac{1}{e^\mu} \cdot \frac{\mu^k}{k!}$.

- Bestimmen Sie das hier passende μ und ermitteln Sie nun damit die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass ausgerechnet in der Toilettenpause mindestens ein Tor fällt. Fertigen Sie hierzu eine Wertetabelle für sinnvolle Werte von k an.
- Untersuchen Sie auch, ob die Annahmen aus dem Hinweis realistisch sind. **15 P**

Ein Busunternehmen aus Flensburg bietet den Transport zum Stadion an. Es setzt dazu zwei Busse mit insgesamt 92 Plätzen ein. Man kann einen Busplatz telefonisch oder per Internet buchen, braucht aber erst beim Fahrtantritt zu zahlen. Der Andrang bei Fußballspielen ist erfahrungsgemäß groß, und das Angebot ist stets ausgebucht. Allerdings werden im Mittel nur 90 % der gebuchten Plätze tatsächlich wahrgenommen. Wegen des Nichtwahrnehmens von gebuchten Fahrten bietet das Unternehmen deshalb 101 Plätze – also mehr als vorhanden – zur Buchung an. Nehmen Sie an, dass die Anzahlen der nicht kommenden bzw. kommenden Bucher binomialverteilt sind.

Hinweis: Sie können alle Aufgabenteile mit Ihrem Computer bearbeiten, die Tabelle aus der Anlage verwenden oder auch näherungsweise mit der Normalverteilung rechnen.

- c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei Fahrtantritt mehr als 92 Fahrgäste erscheinen, dass also mindestens eine Person mit gebuchten Plätzen abgewiesen werden muss. **10 P**

Leistungskurs Mathematik

- d) Bestimmen Sie die Maximalzahl der Buchungen, die das Unternehmen zulassen kann, sodass es mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % zu keinen Überbuchungen kommt. **15 P**

Das Busunternehmen will erreichen, dass der Anteil der Absagen sinkt. Deshalb ändert es seine Vertragsbedingungen dahin gehend, dass schon gleich bei der Buchung eine Anzahlung von 5 € zu zahlen ist, die bei Nichterscheinen nicht zurückgezahlt wird.

- e) Während der nächsten 1000 Buchungen soll untersucht werden, ob die neue Regelung zu einer Senkung der Absagerquote führt.
Leiten Sie dazu eine Entscheidungsregel her. (Ermitteln Sie die Anzahl K von Absagen so, dass man gerade noch – statistisch begründet – behaupten kann, dass die Maßnahme erfolgreich war. Gehen Sie dabei von einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ aus, d. h. die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art soll höchstens 5 % sein). **15 P**

Für die Aufgabenteile f) und g) gehen Sie nun von folgenden Daten aus:

- Tatsächlich werden im Mittel nur noch **6 %** der gebuchten Plätze nicht in Anspruch genommen.
 - Der Fahrpreis beträgt 20 €. Ein gebuchter Kunde, der nicht kommt, bringt dem Unternehmer also eine Einnahme von 5 € ein: Ein gebuchter Kunde, der mitfährt, bringt eine Einnahme von 20 €.
- f) Berechnen Sie die erwarteten Einnahmen, wenn das Busunternehmen keine Überbuchungen zulässt. **10 P**
- g) Das Unternehmen lässt nun immerhin 5 Überbuchungen zu, nimmt also immer 97 Buchungen an. Kunden, welche die gebuchte Fahrt wegen Überbuchung nicht antreten können, bekommen die Anzahlung zurückerstattet und verursachen zusätzliche Entschädigungskosten von 25 €.
- Ermitteln Sie – je nachdem wie viele Absagen anfallen – die maximal mögliche und die minimal mögliche Einnahme des Unternehmens für eine Fahrt zu einem HSV-Spiel.
 - Um eine Bilanz aufzustellen, begründen Sie die folgenden Aussagen:
 - Das Unternehmen hat sichere Einnahmen E_1 von 485 €.
 - Stellen Sie sich vor, dass alle Bucher, die zur Fahrt erscheinen, zunächst die fehlenden 15 € bezahlen. Der Erwartungswert E_2 für diese Einnahmen beträgt dann 1367,70 €.
 - Erst kurz vor der Abfahrt erhalten diejenigen Kunden, die wegen Überbuchung nicht mitfahren können, ihre Fahrtkosten von 20 € zurück und außerdem 25 € Entschädigung. Der Erwartungswert dieser Auszahlungen beträgt:
- $$K = 45\text{€} \cdot \left(\begin{array}{l} 5 \cdot B(97; 0,06; 0) + 4 \cdot B(97; 0,06; 1) + 3 \cdot B(97; 0,06; 2) \\ + 2 \cdot B(97; 0,06; 3) + 1 \cdot B(97; 0,06; 4) \end{array} \right)$$
- Dennoch lohnt es sich finanziell für das Unternehmen, die 5 Überbuchungen zuzulassen. **20 P**

Anlage 1 zur Aufgabe „Rund um den HSV“, Aufgabenteile c) und d)

Tabellenauszug für akkumulierte Binomialverteilungswerte

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

		$p = 0,1$											
		n											
		92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
0		0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1		0,0007	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
2		0,0039	0,0036	0,0033	0,0030	0,0028	0,0025	0,0023	0,0021	0,0019	0,0018	0,0016	0,0015
3		0,0145	0,0134	0,0125	0,0115	0,0107	0,0099	0,0092	0,0085	0,0078	0,0072	0,0067	0,0062
4		0,0408	0,0382	0,0357	0,0334	0,0312	0,0291	0,0272	0,0254	0,0237	0,0221	0,0206	0,0192
k	5	0,0922	0,0870	0,0821	0,0775	0,0731	0,0689	0,0649	0,0612	0,0576	0,0542	0,0510	0,0479
6		0,1750	0,1667	0,1587	0,1511	0,1437	0,1366	0,1299	0,1234	0,1172	0,1112	0,1055	0,1000
7		0,2880	0,2767	0,2657	0,2550	0,2446	0,2345	0,2247	0,2152	0,2061	0,1972	0,1886	0,1803
8		0,4214	0,4081	0,3949	0,3820	0,3693	0,3568	0,3446	0,3326	0,3209	0,3094	0,2982	0,2872
9		0,5598	0,5459	0,5321	0,5184	0,5048	0,4912	0,4778	0,4645	0,4513	0,4382	0,4254	0,4126
10		0,6874	0,6746	0,6617	0,6488	0,6358	0,6227	0,6095	0,5963	0,5832	0,5700	0,5568	0,5437
11		0,7931	0,7825	0,7717	0,7607	0,7495	0,7381	0,7266	0,7149	0,7030	0,6910	0,6789	0,6667
12		0,8723	0,8644	0,8562	0,8478	0,8391	0,8301	0,8209	0,8115	0,8018	0,7919	0,7819	0,7716
13		0,9265	0,9211	0,9154	0,9095	0,9033	0,8969	0,8902	0,8833	0,8761	0,8687	0,8610	0,8531

Anlage 2 zur Aufgabe „Rund um den HSV“, Aufgabenteil g)

Tabellenauszug für Binomialverteilungswerte

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

		$p = 0,06$									
		n									
		92	93	94	95	96	97	98	99	100	
0		0,0034	0,0032	0,0030	0,0028	0,0026	0,0025	0,0023	0,0022	0,0021	
1		0,0198	0,0188	0,0179	0,0170	0,0161	0,0153	0,0145	0,0138	0,0131	
2		0,0575	0,0552	0,0530	0,0509	0,0489	0,0469	0,0450	0,0432	0,0414	
3		0,1101	0,1069	0,1038	0,1008	0,0978	0,0949	0,0920	0,0892	0,0864	
4		0,1564	0,1536	0,1508	0,1480	0,1451	0,1423	0,1394	0,1366	0,1338	
k	5	0,1756	0,1745	0,1732	0,1719	0,1705	0,1689	0,1673	0,1657	0,1639	
6		0,1626	0,1634	0,1640	0,1646	0,1650	0,1653	0,1656	0,1657	0,1657	
7		0,1275	0,1296	0,1316	0,1336	0,1354	0,1372	0,1389	0,1405	0,1420	
8		0,0865	0,0889	0,0914	0,0938	0,0962	0,0985	0,1008	0,1031	0,1054	
9		0,0515	0,0536	0,0557	0,0579	0,0600	0,0622	0,0644	0,0666	0,0687	
10		0,0273	0,0287	0,0302	0,0318	0,0333	0,0349	0,0366	0,0382	0,0399	
11		0,0130	0,0138	0,0147	0,0157	0,0166	0,0176	0,0187	0,0197	0,0209	
12		0,0056	0,0060	0,0065	0,0070	0,0075	0,0081	0,0086	0,0092	0,0099	
13		0,0022	0,0024	0,0026	0,0029	0,0031	0,0034	0,0036	0,0039	0,0043	

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung												
		I	II	III										
a)	<p>Die zuerst ankommende Person hat 31 Plätze zur Auswahl, die zweite 30, usw. und die letzte noch 3. Aufstellen des Terms liefert:</p> $31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot \dots \cdot 3 = \frac{31!}{2!} \approx 4,1 \cdot 10^{33}.$ <p>(Es gibt ungefähr $4,1 \cdot 10^{33}$ Möglichkeiten für die Belegung.)</p> <p>Da man den freien Plätzen nicht verschiedene Personen zuordnen kann, gibt es $\binom{31}{2} = 465$ Möglichkeiten für die freien Plätze.</p>	15												
b)	<p>Wenn man annimmt, dass in fest gewählten Spielzeitintervallen, die erwarteten Anzahlen an Toren proportional zur Länge der Intervalle ist, dann hat man aus der gegebenen Statistik für ein ganzes Spiel von 90 Minuten den Erwartungswert von 3 Toren, also für ein Zeitintervall von 3 Minuten den Erwartungswert von</p> $\mu = 3 \cdot \frac{3}{90} = 0,1 \text{ (Toren).}$ <p>Die angenommene Poissonverteilung für $\mu = 0,1$ ist teilweise in folgender Tabelle berechnet:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>K</th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$P(\{T = k\})$</td> <td>0,905</td> <td>0,090</td> <td>0,005</td> <td>Praktisch null</td> </tr> </tbody> </table> <p>Die Wahrscheinlichkeit für „mindestens ein Tor“ beträgt also:</p> $P = 1 - P(\{T = 0\}) \approx 9,5\%.$ <p><i>Mögliche Argumente:</i></p> <p>Die Annahmen sind nicht unproblematisch: Handelt es sich um ein „normales“ Bundesligaspiel, für das der erwartete Wert 3 Tore insgesamt beträgt?</p> <p>Sicher ist die erwartete Torzahl in gleichlangen Intervallen auch nicht immer gleich, z. B. nehmen führende Mannschaften schon mal einen Gang heraus.</p> <p>Zum Spielende kann die Kondition nachlassen, andererseits fallen häufig in der letzten Spielminute noch Tore, weil die Konzentration der Verteidigung nachlässt oder weil eine Mannschaft unter Zeitdruck besonders offensiv spielt.</p> <p>Die erwartete Torausbeute kann auch zum Spielende abnehmen, weil eine Mannschaft sich schon mit einem Spielergebnis abgefunden hat oder weil eine Mannschaft unter Zeitdruck besonders offensiv spielt.</p>	K	0	1	2	3	$P(\{T = k\})$	0,905	0,090	0,005	Praktisch null		10	5
K	0	1	2	3										
$P(\{T = k\})$	0,905	0,090	0,005	Praktisch null										

Leistungskurs Mathematik

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung																																																																																																																																																																																																																		
		I	II	III																																																																																																																																																																																																																
c)	<p>Es erscheinen bei Fahrtantritt mehr als 92 Fahrgäste, wenn zu wenig Personen absagen, genauer, wenn die Anzahl der absagenden Personen kleiner als 9 ist. Die Anzahl der absagenden Personen kann als $B(101 ; 0.1)$ angenommen werden:</p> <p>Also beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit</p> $P = \sum_{k=0}^8 \binom{101}{k} \cdot 0,1^k \cdot 0,9^{101-k} \approx 31\% .$ <table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">k</th> <th colspan="13">n</th> </tr> <tr> <th>92</th><th>93</th><th>94</th><th>95</th><th>96</th><th>97</th><th>98</th><th>99</th><th>100</th><th>101</th><th>102</th><th>103</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0,0001</td><td>0,0001</td><td>0,0000</td><td>0,0000</td><td>0,0000</td><td>0,0000</td><td>0,0000</td><td>0,0000</td><td>0,0000</td><td>0,0000</td><td>0,0000</td><td>0,0000</td></tr> <tr><td>1</td><td>0,0007</td><td>0,0006</td><td>0,0006</td><td>0,0005</td><td>0,0005</td><td>0,0004</td><td>0,0004</td><td>0,0004</td><td>0,0003</td><td>0,0003</td><td>0,0003</td><td>0,0002</td></tr> <tr><td>2</td><td>0,0039</td><td>0,0036</td><td>0,0033</td><td>0,0030</td><td>0,0028</td><td>0,0025</td><td>0,0023</td><td>0,0021</td><td>0,0019</td><td>0,0018</td><td>0,0016</td><td>0,0015</td></tr> <tr><td>3</td><td>0,0145</td><td>0,0134</td><td>0,0125</td><td>0,0115</td><td>0,0107</td><td>0,0099</td><td>0,0092</td><td>0,0085</td><td>0,0078</td><td>0,0072</td><td>0,0067</td><td>0,0062</td></tr> <tr><td>4</td><td>0,0408</td><td>0,0382</td><td>0,0357</td><td>0,0334</td><td>0,0312</td><td>0,0291</td><td>0,0272</td><td>0,0254</td><td>0,0237</td><td>0,0221</td><td>0,0206</td><td>0,0192</td></tr> <tr><td>5</td><td>0,0922</td><td>0,0870</td><td>0,0821</td><td>0,0775</td><td>0,0731</td><td>0,0689</td><td>0,0649</td><td>0,0612</td><td>0,0576</td><td>0,0542</td><td>0,0510</td><td>0,0479</td></tr> <tr><td>6</td><td>0,1750</td><td>0,1667</td><td>0,1587</td><td>0,1511</td><td>0,1437</td><td>0,1366</td><td>0,1299</td><td>0,1234</td><td>0,1172</td><td>0,1112</td><td>0,1055</td><td>0,1000</td></tr> <tr><td>7</td><td>0,2880</td><td>0,2767</td><td>0,2657</td><td>0,2550</td><td>0,2446</td><td>0,2345</td><td>0,2247</td><td>0,2152</td><td>0,2061</td><td>0,1972</td><td>0,1886</td><td>0,1803</td></tr> <tr><td>8</td><td>0,4214</td><td>0,4081</td><td>0,3949</td><td>0,3820</td><td>0,3693</td><td>0,3568</td><td>0,3446</td><td>0,3326</td><td>0,3209</td><td>0,3094</td><td>0,2982</td><td>0,2872</td></tr> <tr><td>9</td><td>0,5598</td><td>0,5459</td><td>0,5321</td><td>0,5184</td><td>0,5048</td><td>0,4912</td><td>0,4778</td><td>0,4645</td><td>0,4513</td><td>0,4382</td><td>0,4254</td><td>0,4126</td></tr> <tr><td>10</td><td>0,6874</td><td>0,6746</td><td>0,6617</td><td>0,6488</td><td>0,6358</td><td>0,6227</td><td>0,6095</td><td>0,5963</td><td>0,5832</td><td>0,5700</td><td>0,5568</td><td>0,5437</td></tr> <tr><td>11</td><td>0,7931</td><td>0,7825</td><td>0,7717</td><td>0,7607</td><td>0,7495</td><td>0,7381</td><td>0,7266</td><td>0,7149</td><td>0,7030</td><td>0,6910</td><td>0,6789</td><td>0,6667</td></tr> <tr><td>12</td><td>0,8723</td><td>0,8644</td><td>0,8562</td><td>0,8478</td><td>0,8391</td><td>0,8301</td><td>0,8209</td><td>0,8115</td><td>0,8018</td><td>0,7919</td><td>0,7819</td><td>0,7716</td></tr> <tr><td>13</td><td>0,9265</td><td>0,9211</td><td>0,9154</td><td>0,9095</td><td>0,9033</td><td>0,8969</td><td>0,8902</td><td>0,8833</td><td>0,8761</td><td>0,8687</td><td>0,8610</td><td>0,8531</td></tr> </tbody> </table> <p>Das ist der fette Wert in der Tabelle bei $n = 101$.</p> <p>Wegen $n \cdot p \cdot (1 - p) = 101 \cdot 0,1 \cdot 0,9 \approx 9,1$ kann das Ergebnis auch näherungsweise mithilfe der Normalverteilung bestimmen:</p> $P(Y \leq 8) \approx \Phi\left(\frac{8,5 - 10,1}{\sqrt{9,09}}\right) \approx 0,3 .$	k	n													92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	0	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1	0,0007	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	2	0,0039	0,0036	0,0033	0,0030	0,0028	0,0025	0,0023	0,0021	0,0019	0,0018	0,0016	0,0015	3	0,0145	0,0134	0,0125	0,0115	0,0107	0,0099	0,0092	0,0085	0,0078	0,0072	0,0067	0,0062	4	0,0408	0,0382	0,0357	0,0334	0,0312	0,0291	0,0272	0,0254	0,0237	0,0221	0,0206	0,0192	5	0,0922	0,0870	0,0821	0,0775	0,0731	0,0689	0,0649	0,0612	0,0576	0,0542	0,0510	0,0479	6	0,1750	0,1667	0,1587	0,1511	0,1437	0,1366	0,1299	0,1234	0,1172	0,1112	0,1055	0,1000	7	0,2880	0,2767	0,2657	0,2550	0,2446	0,2345	0,2247	0,2152	0,2061	0,1972	0,1886	0,1803	8	0,4214	0,4081	0,3949	0,3820	0,3693	0,3568	0,3446	0,3326	0,3209	0,3094	0,2982	0,2872	9	0,5598	0,5459	0,5321	0,5184	0,5048	0,4912	0,4778	0,4645	0,4513	0,4382	0,4254	0,4126	10	0,6874	0,6746	0,6617	0,6488	0,6358	0,6227	0,6095	0,5963	0,5832	0,5700	0,5568	0,5437	11	0,7931	0,7825	0,7717	0,7607	0,7495	0,7381	0,7266	0,7149	0,7030	0,6910	0,6789	0,6667	12	0,8723	0,8644	0,8562	0,8478	0,8391	0,8301	0,8209	0,8115	0,8018	0,7919	0,7819	0,7716	13	0,9265	0,9211	0,9154	0,9095	0,9033	0,8969	0,8902	0,8833	0,8761	0,8687	0,8610	0,8531			10
k	n																																																																																																																																																																																																																			
	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103																																																																																																																																																																																																								
0	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000																																																																																																																																																																																																								
1	0,0007	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002																																																																																																																																																																																																								
2	0,0039	0,0036	0,0033	0,0030	0,0028	0,0025	0,0023	0,0021	0,0019	0,0018	0,0016	0,0015																																																																																																																																																																																																								
3	0,0145	0,0134	0,0125	0,0115	0,0107	0,0099	0,0092	0,0085	0,0078	0,0072	0,0067	0,0062																																																																																																																																																																																																								
4	0,0408	0,0382	0,0357	0,0334	0,0312	0,0291	0,0272	0,0254	0,0237	0,0221	0,0206	0,0192																																																																																																																																																																																																								
5	0,0922	0,0870	0,0821	0,0775	0,0731	0,0689	0,0649	0,0612	0,0576	0,0542	0,0510	0,0479																																																																																																																																																																																																								
6	0,1750	0,1667	0,1587	0,1511	0,1437	0,1366	0,1299	0,1234	0,1172	0,1112	0,1055	0,1000																																																																																																																																																																																																								
7	0,2880	0,2767	0,2657	0,2550	0,2446	0,2345	0,2247	0,2152	0,2061	0,1972	0,1886	0,1803																																																																																																																																																																																																								
8	0,4214	0,4081	0,3949	0,3820	0,3693	0,3568	0,3446	0,3326	0,3209	0,3094	0,2982	0,2872																																																																																																																																																																																																								
9	0,5598	0,5459	0,5321	0,5184	0,5048	0,4912	0,4778	0,4645	0,4513	0,4382	0,4254	0,4126																																																																																																																																																																																																								
10	0,6874	0,6746	0,6617	0,6488	0,6358	0,6227	0,6095	0,5963	0,5832	0,5700	0,5568	0,5437																																																																																																																																																																																																								
11	0,7931	0,7825	0,7717	0,7607	0,7495	0,7381	0,7266	0,7149	0,7030	0,6910	0,6789	0,6667																																																																																																																																																																																																								
12	0,8723	0,8644	0,8562	0,8478	0,8391	0,8301	0,8209	0,8115	0,8018	0,7919	0,7819	0,7716																																																																																																																																																																																																								
13	0,9265	0,9211	0,9154	0,9095	0,9033	0,8969	0,8902	0,8833	0,8761	0,8687	0,8610	0,8531																																																																																																																																																																																																								
d)	<p>Es wird der größte Wert für n gesucht, für den der Ausdruck</p> $\sum_{k=0}^{n-92-1} \binom{n}{k} \cdot 0,1^k \cdot 0,9^{n-k}$ <p>kleiner als 5% ist.</p> <p>Mithilfe des CAS erhält man für $n = 97$ den Wert 0,029134 und für $n = 98$ den Wert 0,064923. Man kann aber auch die fett gedruckten Werte in der obigen Tabelle nach rechts durchgehen, bis der Wert gerade noch $\leq 5\%$.Das ist für $n = 97$ der Fall.</p> <p>Will man hier wieder mit normalverteilten Näherungen arbeiten, wählt man am besten als Zufallsvariable Y die möglichen Anzahlen der n Personen, die tatsächlich an der Fahrt teilnehmen wollen. Die Frage ist für welches n der Wert $P(\{Y \leq 92\})$ noch $\geq 95\%$ ist. Die Variable Y ist n-0,9-binomialverteilt.</p>																																																																																																																																																																																																																			

Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	<p>Die Laplace-Bedingung ist ab $n = 94$ erfüllt. Man wird ein n schätzen, das größer als 93 ist. Dann gilt:</p> $P(\{Y \leq 92\}) \approx \Phi\left(\frac{92,5 - 0,9n}{\sqrt{0,9 \cdot 0,1 \cdot n}}\right).$ <p>Der rechte Wert muss also noch gerade $\geq 95\%$ sein, also muss das Argument $\geq 1,645$ sein. Mit der Substitution $m = \sqrt{n}$ und Rundungen auf vier Dezimalen folgt $n \leq 97,3\dots$</p>		15	
e)	<p>Die Frage zielt auf die Bestimmung des Ablehnungsbereichs eines einseitigen Hypothesentests über den Parameter p einer Binomialverteilung mit $H_0 : p \geq 0,1$ und $H_1 : p < 0,1$. p sei dabei die Wahrscheinlichkeit, dass eine Buchung abgesagt wird. Wenige Absagen sprechen gegen H_0.</p> <p>Die Testvariable T beschreibe die möglichen Anzahlen von Absagen. Wir nehmen auch hier an, dass T binomialverteilt ist.</p> <p>Es ist also der größte Wert K zu bestimmen für den gilt</p> $\sum_{k=0}^K B(1000; 0,1; k) \leq 5\%.$ <p>Mithilfe des CAS erhält man:</p> $\sum_{k=0}^{84} B(1000; 0,1; k) = 0,048503 \text{ und } \sum_{k=0}^{85} B(1000; 0,1; k) = 0,060694$ <p>Wenn also unter 1 000 Buchungen nur 84 oder weniger Absagen auftreten, kann man von einer auf dem 5%-Niveau signifikanten Senkung der Absagerquote ausgehen.</p>		15	
f)	<p>Es wird der Erwartungswert für die Einnahmen ausgerechnet, wobei <u>keine Überbuchungen</u> zugelassen werden: Die Einnahmen setzen sich dann zusammen aus den Anzahlungen und den Restzahlungen.</p> <p>Die Berechnung der zugehörigen Erwartungswerte ergibt: $E_1 = 92 \cdot 5\text{€} = 460\text{€}$ und $E_2 = 92 \cdot 0,94 \cdot 15\text{€} = 1297,20\text{€}$.</p> <p>Die Addition ergibt $E = 1757,20\text{€}$.</p> <p>Das Unternehmen kann mit 1757,20 € rechnen, wenn keine Überbuchungen zugelassen werden.</p>		10	

Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
g)	<ul style="list-style-type: none"> • Wenn genau 5 Personen absagen, sind die Einnahmen von $92 \cdot 20 \text{ €} + 5 \cdot 5 \text{ €} = 1865 \text{ €}$ offenbar maximal: Sagen nämlich weniger ab, entfallen für Überbuchungen die betreffenden 5 € und es fallen zusätzlich Kulanzkosten an. Sagt z. B. keiner ab, so ist die Einnahmebilanz $92 \cdot 20 \text{ €} - 5 \cdot 25 \text{ €} = 1715 \text{ €}$. Sagen mehr als 5 Personen ab, so werden bei jeder weiteren absagenden Person die Einnahmen von 20 € durch nur 5 € ersetzt. Der Extremfall, (der auch extrem unwahrscheinlich ist) besteht darin, dass alle absagen, dann gäbe es nur noch Einnahmen in Höhe von $97 \cdot 5 \text{ €} = 485 \text{ €}$. <i>Bemerkung:</i> Abgesehen davon, dass dieser Fall praktisch unmöglich ist, wäre es natürlich noch schlimmer für das Busunternehmen, wenn nur eine Person nicht absagt, weil dann ein Bus fahren müsste. Ähnliches gilt, wenn so viele Personen absagen, dass man mit dem größeren Bus nicht auskommt, aber das sind Gewinnfragen, um die es hier nicht geht. • Die Einnahmen setzen sich dann zusammen aus den Anzahlungen, den Restzahlungen und den negativ gerechneten Kulanzkosten für die abzuweisenden Kunden. Die Rechnung wird dabei einfacher, wenn man sich – wie vorgeschlagen – vorstellt, dass die abzuweisenden Kunden erst die (5+15) € zahlen und dann nicht (25+5) €, sondern 45 € zurückbekommen. $E_1 = 97 \cdot 5 \text{ €} = 485 \text{ €}$, $E_2 = 97 \cdot 0,94 \cdot 15 \text{ €} = 1367,70 \text{ €}$, $K = \left(\sum_{i=0}^4 (5-i) B(97;0,06,i) \right) \cdot 45 \text{ €} = 24,60 \text{ €}$. Die 5 Werte der Binomialverteilung können schnell aus der Tabelle für $n = 97$ entnommen werden, also $K = (5 \cdot 0,0025 + 4 \cdot 0,0153 + 3 \cdot 0,0469 + 2 \cdot 0,0949 + 1 \cdot 0,1423) \cdot 45 \text{ €} \approx 24,60 \text{ €}$. Die Addition ergibt $E = 1828,10 \text{ €}$. Der Vergleich mit f) zeigt, dass es sich für das Unternehmen finanziell lohnt, die 5 Überbuchungen zuzulassen. 			20
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25



Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport

Schriftliche Abiturprüfung
Schuljahr 2007/2008

27. März 2008, 9.00 Uhr

Leistungskurs Mathematik

CiMS – Schulen

Unterlagen für die Lehrerinnen und Lehrer – Zweittermin

Diese Unterlagen sind nicht für die Prüflinge bestimmt.

Diese Unterlagen enthalten:

- 1 Allgemeines
- 2 Rückmeldebogen
- 3 Hinweise für die Auswahl der Aufgaben
- 4 Hinweise zum Korrekturverfahren
- 5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und die Bewertung für jede Aufgabe

1 Allgemeines

- Weisen Sie bitte die Schülerinnen und Schüler auf die allgemeinen Arbeitshinweise am Anfang der Schülermaterialien hin.
- Die Schülerinnen und Schüler kennzeichnen ihre Unterlagen nur mit der Kursnummer und ihrer Schülernummer, nicht mit ihrem Namen.
- Die Arbeitszeit beträgt **300 Minuten**.
- Erlaubte Hilfsmittel: CAS-fähiger Rechner, Technische Bedienungsanleitung, Formelsammlung „Das große Tafelwerk interaktiv“, Cornelsen-Verlag, Operatorenliste, Rechtschreiblexikon.

2 Rückmeldebogen für die Zweitkorrektur

Bitte umgehend ausfüllen und an BM 3 faxen!

Institut für Bildungsmonitoring
BM 3

Schulchiffre:

Fax 42 79 67-006

Aufgabenstatistik und Information für die Zweitkorrektoren

in Fächern mit zentraler Aufgabenstellung

Fach: Mathematik, Leistungskurs

Kurs-Nummer: _____

Bearbeitet wurden die folgenden Aufgaben:

Aufgabe Nr.	Anzahl	
I.1	von	Prüflingen
I.2	von	Prüflingen
II.1	von	Prüflingen
II.2	von	Prüflingen
III.1	von	Prüflingen
III.2	von	Prüflingen

Datum: _____

Unterschrift: _____

3 Aufgabenauswahl

- Sie erhalten **sechs** Aufgaben – **I.1, I.2** (Analysis) und **II.1, II.2** (Lineare Algebra / Analytische Geometrie) und **III.1, III.2** (Stochastik).
 - Sie wählen **genau zwei Aufgaben aus genau den zwei Sachgebieten I und II** oder **I und III** aus und reichen diese an die Schülerinnen und Schüler weiter.
 - Sie überprüfen gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Vollständigkeit der Arbeitsunterlagen.
 - Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten beide Aufgaben.
 - Sie vermerken auf der Reinschrift, welche Aufgabe sie bearbeitet haben.
-

4 Korrekturverfahren

- Die Korrekturen werden gemäß der „Richtlinie für die Korrektur und Bewertung der Prüfungsleistungen im schriftlichen Teil der Abiturprüfung“ vorgenommen.
- Die Bewertung und Benotung der Arbeiten wird auf einem gesonderten Blatt vorgenommen, siehe Anlagen „Bewertungsbögen für die Erst- und die Zweitkorrektur“ (S. 4 und 5).
- Die Bewertungsbögen verbleiben in der Schule.
- Die Originale der Schülerarbeiten werden zusammen mit dem Bewertungsbogen für die Zweitkorrektur und einer Kursliste, die nur die Schülernummern enthalten darf, sowie einem Exemplar der Lehrermaterialien zu einem Päckchen gepackt.
- Zu den Zeitvorgaben, Warnmeldungen und dem weiteren Verlauf des Verfahrens siehe den „Ablaufplan für die Durchführung der schriftlichen Prüfungen“.

Bei der Korrektur der Schülerarbeiten kann es auf Grund von unterschiedlichen didaktischen Konzepten oder Verkürzungen auf Grund von Verabredungen zu unterschiedlichen Bewertungen von Schülerleistungen kommen, insbesondere im formalen Bereich. Bisher ließen sich solche unterschiedlichen Sichtweisen im Gespräch zwischen Referent und Korreferent klären.

Im Abitur mit zentralen Anteilen ist eine solche Klärung wegen des anonymisierten Korrekturverfahrens nicht möglich. Deshalb ist insbesondere auf Seiten des Korreferenten ein sensibles Vorgehen gefordert. Auch wenn der Korreferent eine andere Korrektheit von seinen Schülerinnen und Schülern fordern würde, sollte er darauf achten, ob der Referent bei seinen Korrekturen durchgängig anders verfahren ist. Es gilt der Grundsatz, dass die Schülerinnen und Schüler durch unterschiedliche Sichtweisen nicht benachteiligt werden dürfen.

Die Lösungsskizzen in den Erwartungshorizonten zu den einzelnen Aufgaben geben Hinweise auf die erwarteten Schülerleistungen. Oft sind aber Lösungsvarianten möglich, die in der Skizze nur zum Teil beschrieben werden konnten. Grundsätzlich gilt deshalb, dass alle Varianten, die zu richtigen Lösungen führen, mit voller Punktzahl bewertet werden, unabhängig davon, ob die gewählte Variante in der Lösungsskizze aufgeführt ist oder nicht.

5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und Bewertungen

Erwartungshorizont:

Kursiv gedruckte Passagen sind Hinweise an die korrigierenden Lehrkräfte. Sie sind nicht Bestandteile der erwarteten Schülerleistung.

Bewertung:

Jeder Aufgabe sind 100 Bewertungseinheiten (BWE) zugeordnet, insgesamt sind also 200 BWE erreichbar. Bei der Festlegung von Notenpunkten gilt die folgende Tabelle.

Bewertungseinheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 190	$\geq 95\%$	15
≥ 180	$\geq 90\%$	14
≥ 170	$\geq 85\%$	13
≥ 160	$\geq 80\%$	12
≥ 150	$\geq 75\%$	11
≥ 140	$\geq 70\%$	10
≥ 130	$\geq 65\%$	9
≥ 120	$\geq 60\%$	8

Bewertungseinheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 110	$\geq 55\%$	7
≥ 100	$\geq 50\%$	6
≥ 90	$\geq 45\%$	5
≥ 80	$\geq 40\%$	4
≥ 66	$\geq 33\%$	3
≥ 52	$\geq 26\%$	2
≥ 38	$\geq 19\%$	1
< 38	$< 19\%$	0

Die Note „ausreichend“ (5 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet worden sein.

Die Note „gut“ (11 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden sind. Dabei muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut“ beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht worden sind.

Bei erheblichen Mängeln in der sprachlichen Richtigkeit sind bei der Bewertung der schriftlichen Prüfungsleistung je nach Schwere und Häufigkeit der Verstöße bis zu drei Notenpunkte abzuziehen. Dazu gehören auch Mängel in der Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen sowie falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text.

Schulchiffre		BeBo EKo M	
Fach	Mathematik	Schüler- Nummer	
Kurstyp	LK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.2) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)							BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
Summe der BWE →								
Bewertungstext								
Notenpunkte →								

Schulchiffre		BeBo ZKo M	
Fach	Mathematik	Schüler- Nummer	
Kurstyp	LK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.2) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)							BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
Summe der BWE →								
Bewertungstext								
Notenpunkte →								

ANALYSIS 1

I.1 Kettenlinie

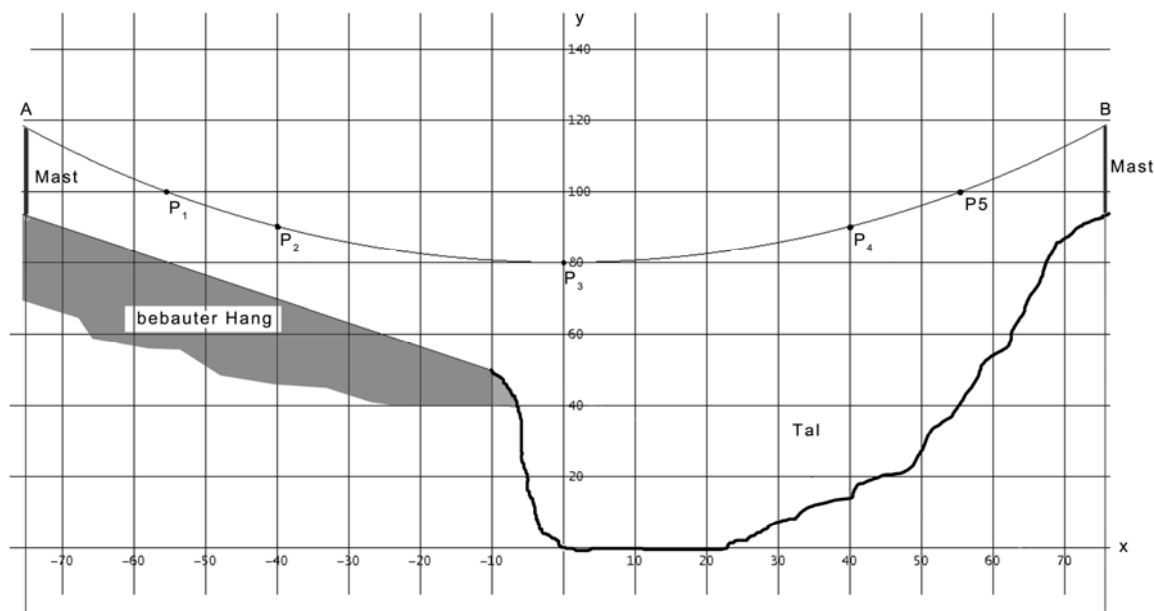
Bei vielen technischen Problemen treten Kombinationen von Exponentialfunktionen auf. Eine von ihnen, die einen besonderen Namen trägt, soll hier näher betrachtet werden.

Cosinus hyperbolicus:
$$\cosh(x) := \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})$$

- a) Untersuchen Sie die Funktion \cosh auf Nullstellen, Symmetrien und Asymptoten.
Skizzieren Sie den Graphen in ein Koordinatensystem mit $-3 \leq x \leq 3$.

10 P

Über einem Tal ist eine elektrische Leitung zwischen zwei Masten jeweils in 117,8 m Höhe aufgehängt (Punkte A und B). Die Masten sind 150 m voneinander entfernt. Die Leitung befindet sich in der Mitte auf einer Höhe von 80 m. Siehe Skizze.



In den folgenden beiden Aufgabenteilen wird der Verlauf der elektrischen Leitung mit unterschiedlichen Funktionen modelliert werden. Die einzelnen Modellierungen werden zum Teil miteinander verglichen.

- b) Die elektrische Leitung soll durch eine Funktion k der Form $k(x) = a \cdot \cosh(b \cdot x)$ mit $a, b > 0$ beschrieben werden.

- Begründen Sie, dass a dabei die Höhe des tiefsten Seilpunktes über der Grundebene ist.
- Untersuchen Sie, wie sich die Funktionswerte ändern, wenn sich bei festgehaltenem a der Parameter b vergrößert.
- Weisen Sie nach, dass die Funktion $kett$ mit $kett(x) = 80 \cdot \cosh(0,0125 \cdot x)$ in etwa durch die Punkte A, B und P_3 verläuft.

15 P

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

- c) • Berechnen Sie mithilfe der Regression eine ganzrationale Funktion p von möglichst niedrigem Grad, die den Verlauf der Leitung annähernd beschreibt **und** sodass gleichzeitig die Differenz von $p(x)$ und $kett(x)$ nicht mehr als einen halben Meter beträgt.
- Die Bezeichnung Cosinus hyperbolicus legt den Gedanken nahe, für die Beschreibung einer durchhängenden Leitung eine Funktion q mit der Gleichung $q(x) = r \cdot \cos(s \cdot x) + t$ zu verwenden.
Bestimmen Sie die Parameter r , s und t ohne Hilfe der Regression so, dass q den Verlauf der elektrischen Leitung möglichst gut beschreibt.
 - Vergleichen Sie die gefundenen Näherungsfunktionen p und q jeweils bezüglich der Annäherung an die Funktion $kett$.

Hinweis: Sollten Sie für p oder q kein Ergebnis herausbekommen haben, so können Sie die Ersatzfunktionen mit den Gleichungen $p(x) = 6 \cdot 10^{-8} x^4 + 6,3 \cdot 10^{-3} x^2 + 80$ bzw.

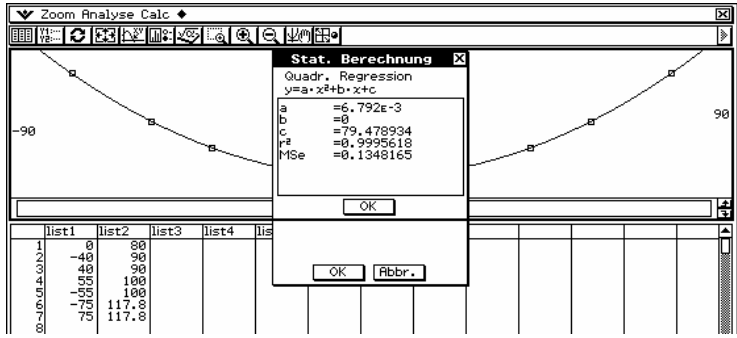
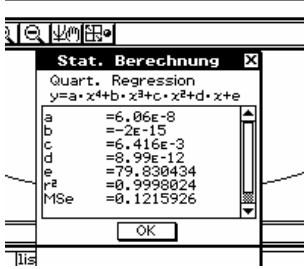
$$q(x) = -38 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{150} \cdot x\right) + 117,8 \text{ verwenden.} \quad \mathbf{25 P}$$

Weiterführende Untersuchungen führen zu dem Ergebnis, dass die Funktionen der Form $k(x) = a \cdot \cosh(b \cdot x)$ mit $a, b > 0$ am besten für die Beschreibung von hängenden Leitungen geeignet sind. Sie heißen auch Kettenlinienfunktionen. Im Folgenden wird deshalb nur noch die Funktion $kett$ mit $kett(x) = 80 \cdot \cosh(0,0125 \cdot x)$ verwendet werden.

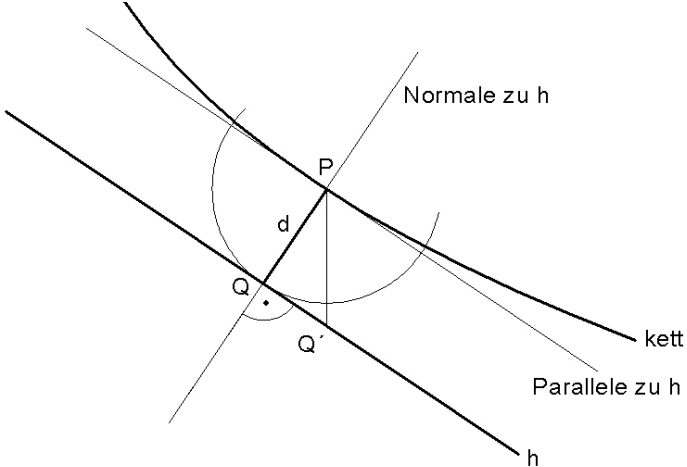
- d) • Bestimmen Sie für die Funktion $kett$ den Winkel zwischen Leitung und dem Mast an einem Befestigungspunkt.
- Untersuchen Sie allgemein, wie sich bei $y = k(x) = a \cdot \cosh(b \cdot x)$ die Parameter a und b sowie der eben berechnete Winkel ändern, wenn man die Leitung straffer spannt. **15 P**
- e) Unter der Leitung befindet sich ein bebauter Hang, dessen Bebauung im Intervall $[-75; -10]$ nach oben durch die Gerade h mit $h(x) = -0,67 \cdot x + 43$ begrenzt wird (siehe Skizze auf der ersten Seite).
- Begründen Sie, dass der Abstand zwischen der Leitung und der Begrenzungslinie h dort am geringsten ist, wo die Steigungen von $kett$ und h übereinstimmen.
 - Weisen Sie nach, dass zwischen der Leitung und der Begrenzungslinie h der Bebauung stets ein Sicherheitsabstand von mindestens 15 m gewahrt ist. **20 P**
- f) • Bestimmen Sie eine Schätzung für die Länge der Leitung, indem Sie anstelle der Funktion nur geradlinige Strecken zwischen den Punkte $A, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ und B verwenden.
- Für eine im Intervall $[c; d]$ stetig differenzierbare Funktion f berechnet sich die (Bogen-)Länge l des Graphen von f über $[c; d]$ durch $l = \int_c^d \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.
- Berechnen Sie die Länge der Leitung zwischen A und B mit der Formel und vergleichen Sie diese mit Ihrem Ergebnis von ersten Spiegelpunkt. **15 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	<p><u>Cosinus hyperbolicus:</u></p> <p>Keine Nullstelle, da der Term in der Klammer als Summe zweier positiver Zahlen immer positiv ist.</p> <p>Da $\cosh(-x) = 0,5 \cdot (e^{-x} + e^x) = \cosh(x)$, ist der Cosinus hyperbolicus eine gerade Funktion und sein Graph damit zur y-Achse spiegelsymmetrisch.</p> <p>Mit $x \rightarrow \infty$ geht $e^{-x} \rightarrow 0$, und damit gilt $\cosh(x) \rightarrow 0,5 \cdot e^x$. Aufgrund der Geradheit des cosh ist dies auch die Asymptote für $x \rightarrow -\infty$.</p> <p><u>Graph der Funktion:</u></p>	5	5	
b)	<ul style="list-style-type: none"> Mit der Beachtung der Symmetrie der Kettenlinie und der Tatsache, dass das Seil in der Mitte am tiefsten hängt: $k(0) = a \cdot \cosh(b \cdot 0) = a \cdot 0,5 \cdot (2e^0) = a \cdot 0,5 \cdot 2 = a$. Dies ist das gewünschte Resultat. Wenn bei festgehaltenem a der Parameter b vergrößert wird, so ändert sich bei $x = 0$ nichts. Der Tiefpunkt der Funktion bleibt also erhalten. Für größere x-Werte vergrößern sich der Betrag der Argumente in der Exponentialfunktion. Da e^x im Wesentlichen den Funktionswert bestimmt, weil e^{-x} für große x-Werte sehr klein ist, wird auch der Funktionswert größer: Der Graph wird bei gleichem Minimum nach beiden Seiten steiler; er erreicht bei festgehaltenem x größere Höhen. Mit dem gegebenen Bodenabstand in der Mitte ergibt sich sofort $a = 80$. Einsetzen liefert: $80 \cdot 0,5 \cdot (e^{0,0125 \cdot 75} + e^{-0,0125 \cdot 75}) \approx 117,808$. Da vorausgesetzt war, dass es sich um eine Funktion der Form $k(x) = a \cdot \cosh(b \cdot x)$ mit $a, b > 0$ handelt, ist damit alles gezeigt. 		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	<p>• Aus Symmetriegründen kommen nur ganzrationale Funktionen von geradzahligem Grad in Frage. Unter Verwendung der eingezeichneten Punkte wird z. B. mit dem ClassPad eine quadratische Funktion gefunden:</p>  <p>Es ist z. B. an c zu erkennen, dass bei der gefundenen quadratischen Funktion für $x=0$ die Abweichung $80\text{ m} - 79,479\text{ m} = 0,521\text{ m}$ größer als $0,5\text{ m}$ ist.</p> <p>Wird $p(x) = 6 \cdot 10^{-8} x^4 + 6,4 \cdot 10^{-3} x^2 + 79,83$ als Näherungsfunktion gewählt, dann liegt die Abweichung im fraglichen Intervall überall unter $0,2\text{ m}$. Das kann man z. B. durch „plotten“ der Differenzfunktion von $p(x)$ und $kett(x)$ sehen.</p>  <p>• Der Graph der Funktion q mit $q(x) = r \cdot \cos(s \cdot x) + t$ soll durch den Punkt $(0 ; 80)$ laufen, außerdem sollen bei $x = -75$ bzw. bei $x = 75$ Wendepunkte liegen. Daraus ergeben sich die folgenden Gleichungen:</p> <p>(0.1) $q(0) = r \cdot \cos(s \cdot 0) + t = r + t = 80$</p> <p>(0.2) $q''(75) = -r \cdot s^2 \cdot \cos(s \cdot 75) = 0$</p> <p>(0.3) $q(75) = r \cdot \cos(s \cdot 75) + t = 117,8$</p> <p>Als Lösung erhält man die Parameter $r = -37,8$, $s = \frac{\pi}{150}$ und $t = 117,8$.</p> <p>• Die größte Abweichung zwischen $kett$ und q beträgt $2,79\text{ m}$. Damit beschreibt p den Verlauf deutlich besser, da dort die Abweichung unterhalb von $0,2\text{ m}$ liegt. Das kann man z. B. durch „Plotten“ der Differenzfunktion von $p(x)$ und $kett(x)$ sehen.</p>			
		10	15	

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	<ul style="list-style-type: none"> Der Winkel ergibt sich aus der Steigung der Kettenlinie an der Stelle $x = 75$: $k'(75) = 80 \cdot \sinh(0,0125 \cdot 75) \cdot 0,0125 \approx 1,08099$. Damit ergibt sich das Winkelmaß zu $\alpha = 90^\circ - \arctan(k'(75)) \approx 42,77^\circ$. Wenn das Seil straffer gespannt wird, so hängt es in der Mitte höher. Also wächst der Parameter a. da zugleich das Höhenwachstum zwischen Mitte und Türmen abnimmt, muss (mit dem Ergebnis von c) oder z. B. durch Nachrechnen an einem Beispiel) der Parameter b abnehmen. Da das Seil „waagerechter“ in den Aufhängungspunkten ankommt, wird der Winkel größer, bleibt aber unter 90°. 		15	
e)	 <p>Der Graph von <i>kett</i> ist eine Linkskurve. Aus der Abbildung ergibt sich, dass der Abstand der Leitung von der Linie h mit $h(x) = -0,67 \cdot x + 43$ im Intervall $[-75 ; -10]$ dort am geringsten ist, wo die Steigung von h und <i>kett</i> übereinstimmen.</p> <ul style="list-style-type: none"> Dort muss also $kett'(x) = \sinh(0,0125 \cdot x) = -0,67$ sein. Daraus ergibt sich $x \approx -50,23$. Die Normale zu <i>kett</i> an dieser Stelle hat die Gleichung $n(x) \approx \frac{1}{0,67} \cdot x + 171,27$. <p>$h$ und n haben den Schnittpunkt $H(-59,31 ; 82,74)$. Der Schnittpunkt der Kettenlinie mit n ist $K(-50,23 ; 96,30)$. Nach Pythagoras ergibt sich als Abstand zwischen H und K $\sqrt{(96,30 - 82,74)^2 + (-50,23 + 59,31)^2} \approx 16,3$. Dieser Wert liegt oberhalb des geforderten Sicherheitsabstandes von 15 m.</p>		10	10

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	<ul style="list-style-type: none"> Die Länge der Leitung lässt sich nach dem Satz von Pythagoras und unter Ausnutzung der Symmetrie wie folgt berechnen: $l = 2 \cdot \left[\overline{AP_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} \right]$ $= 2 \cdot \left[\sqrt{(117,8 - 100)^2 + (-75 + 55)^2} + \sqrt{(100 - 90)^2 + (-55 + 40)^2} + \sqrt{(90 - 80)^2 + (-40 - 0)^2} \right]$ $\approx 2 \cdot [26,8 + 18,0 + 41,2] = 172,0$ Die Leitung ist nach dieser Näherung also ungefähr 172 m lang. $l = \int_{-75}^{75} \sqrt{1 + \left(\text{kett}'_{80;0,0125}(x) \right)^2} dx = \int_{-75}^{75} \sqrt{1 + \left(\sinh(0,0125 \cdot x) \right)^2} dx$ $= \int_{-75}^{75} \cosh(0,0125 \cdot x) dx$ $= 2 \cdot 80 \cdot \sinh(0,0125 \cdot 75) \approx 172,96$ Demnach ist die Leitung ungefähr 173 m lang. Die Näherung kommt der tatsächlichen Länge schon recht nahe. 			
	Insgesamt 100 BWE	5	10	
		20	60	20

ANALYSIS 2

I.2 Nutzhölzer

Ein Forstwirt plant Nutzhölzer anzubauen. Zur Auswahl stehen die Sorten mit den Namen **Fichtelbaum** und **Grünbuche**. Zu beiden Sorten gibt es Informationen, die auf langjährigen Studien beruhen. Zur Vereinfachung wird im Weiteren nur das Längenwachstum dieser Bäume betrachtet.

a) Für die Sorte **Fichtelbaum** liegt folgende Tabelle des Längenwachstums vor:

x	Jahre nach der Pflanzung	0	2	4	6	8	10
$F(x)$	Höhe in Dezimetern	4	18,5	37,0	42,9	43,8	44,0

- Berechnen Sie mithilfe einer quadratischen und einer logistischen Regression jeweils eine Funktion für die Höhe der Sorte Fichtelbaum in Abhängigkeit von der Wachstumszeit x nach der Pflanzung.
- Begründen Sie, warum hier die logistische Regression besser geeignet ist.

Für die **Grünbuche** findet der Forstwirt die Funktion G zur Ermittlung der Baumhöhe ab Pflanzung:

$$G : x \rightarrow a - b \cdot e^{-x}, a, b \in \mathbb{R} \text{ und } a, b > 0 .$$

Er möchte aus dieser Familie ebenfalls Setzlinge wählen, die mit einer Höhe von 4 Dezimetern gepflanzt werden. Erfahrungsgemäß sind diese Setzlinge nach 2 Jahren auf eine Höhe von 38,6 dm angewachsen.

- Bestimmen Sie die zugehörigen Werte für a und b und geben Sie den Funktionsterm für G an.
- Skizzieren Sie die Graphen von F und G in das beigefügte Koordinatensystem.

Hinweis: Sollten Sie die vorher gehenden Aufgaben nicht gelöst haben, verwenden Sie hier bitte F^ und G^* aus Aufgabenteil b).*

- Vergleichen Sie das Wachstumsverhalten beider Sorten. Gehen Sie dabei sowohl auf die Höhenentwicklung, als auch auf die Wachstumsgeschwindigkeit ein. **40 P**

b) Arbeiten Sie in diesem Aufgabenteil bitte mit den vereinfachten (jedoch vom Aufgabenteil a) etwas abweichenden) Funktionen

$$F^* : x \rightarrow \frac{44}{10 \cdot e^{-x} + 1} \text{ und } G^* : x \rightarrow 45 - 47,3 \cdot e^{-x}$$

- Weisen Sie mithilfe dieser beiden Funktionen nach, dass $x_1 \approx 1,6$ Jahre der einzige Zeitpunkt ist, bei dem beide Nutzhölzer gleich schnell wachsen.
- Weisen Sie nach, dass die beiden Nutzhölzer zum Zeitpunkt x_1 den größten Höhenunterschied aufweisen.
Berechnen Sie diesen Höhenunterschied.
- Berechnen Sie für beide Nutzhölzer, wie hoch sie gemäß dem jeweiligen Modell höchstens wachsen können.
- Berechnen Sie jeweils die Wachstumsdauer, nach der jedes der beiden Nutzhölzer gemäß des Modells 75 % der Gesamthöhe erreicht hat. **30 P**

- c) Im Aufgabenteil b) wurde ausgehend von Funktionen, die die Höhe eines Baumes beschreiben, Wachstumsgeschwindigkeiten betrachtet.

Verallgemeinert haben entsprechende **Wachstumsgeschwindigkeiten** das folgende Aussehen:

$$f_{b,c}: x \rightarrow \frac{c \cdot e^x}{(e^x + b)^2} \quad b, c \in \mathbb{R}$$

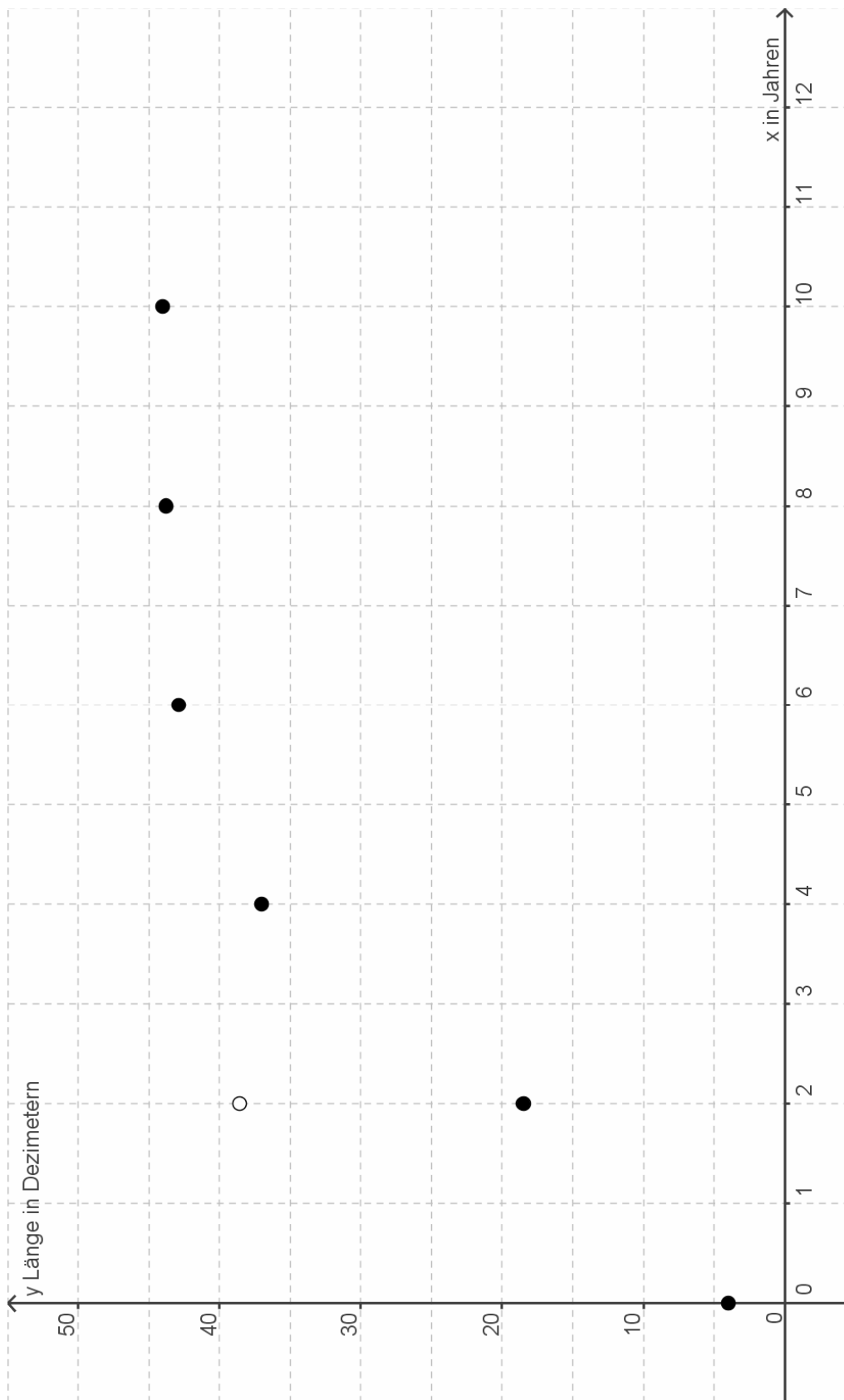
Diese Funktionen werden im Folgenden genauer betrachtet:

- Untersuchen Sie den Einfluss des Parameters c auf die Wachstumsgeschwindigkeit. Begründen Sie, warum im Sachkontext $c > 0$ gefordert werden muss.

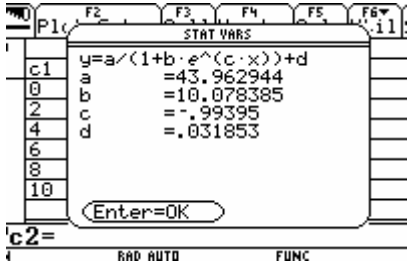
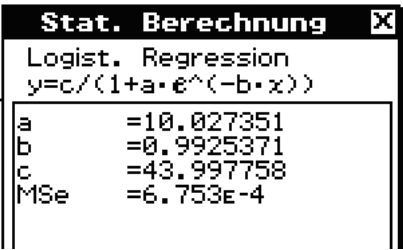
In den folgenden Teilen soll der Einfluss von b erforscht werden. Gehen Sie hierfür von $c = 100$ aus.

- Ermitteln Sie drei grundsätzlich unterschiedliche Verläufe der Graphen. Skizzieren Sie dafür jeweils ein Beispiel und geben Sie den jeweils gewählten Wert für b an. Untersuchen Sie nun, welchen Bedingung der Parameter b genügen muss, damit das Modell reale Vorgänge beschreiben kann. Vergleichen Sie die reale Vorgänge beschreibenden Wachstumsfunktionen mit Ihnen bekannten Wachstumsvorgängen
- Betrachten Sie auf Ihrem Bildschirm Graphen von $f_{b,100}$ mit ansteigenden Werten für b . Beginnen Sie bei $b = 10$. Interpretieren Sie - ausgehend vom unterschiedlichen Verlauf der Graphen - den Einfluss des Parameters b auf die **Baumhöhe**. **30 P**

Anlage zur Aufgabe „Nutzhölzer“



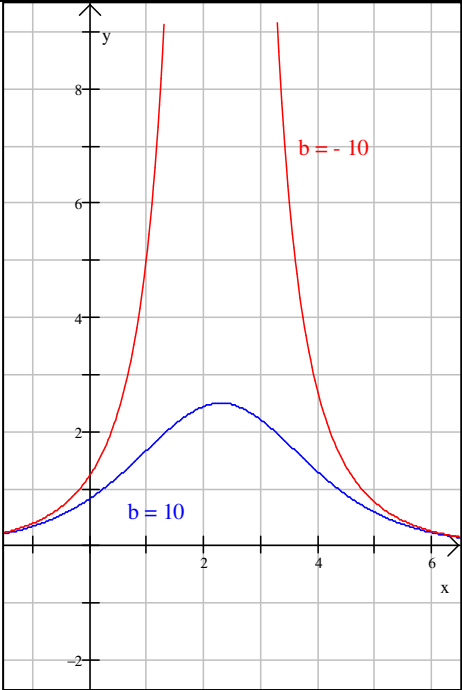
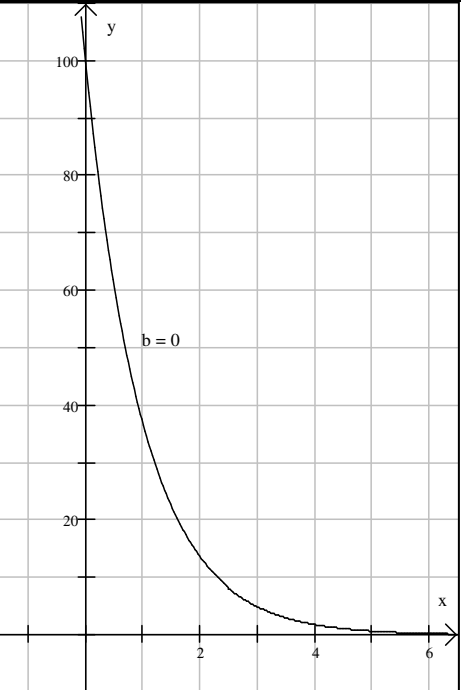
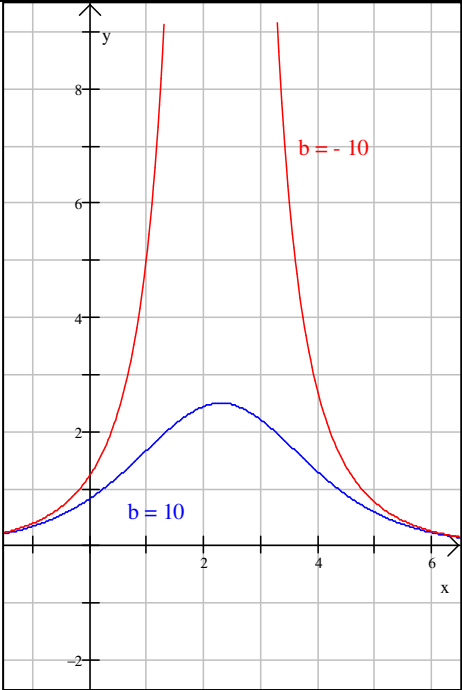
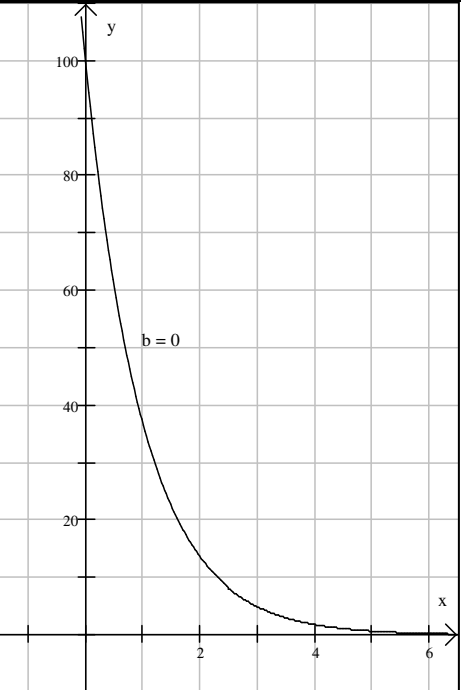
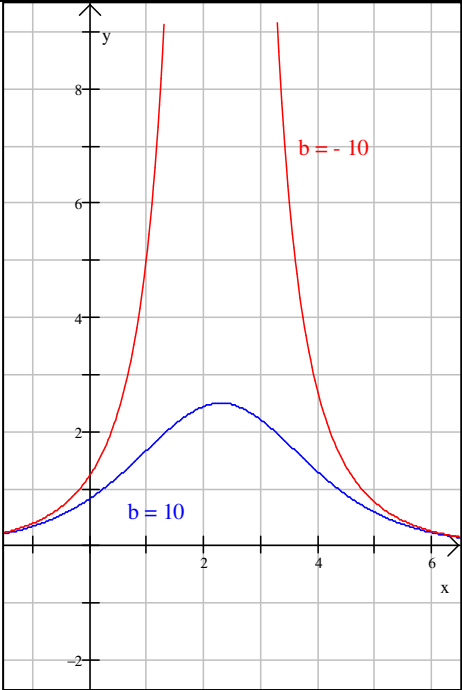
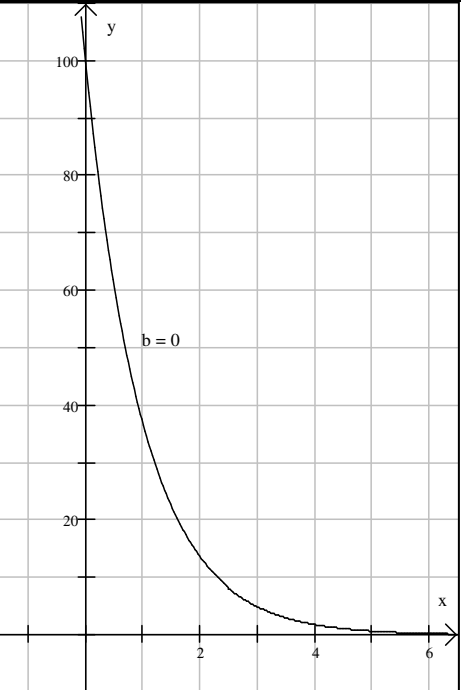
Erwartungshorizont:

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>• Die quadratische Regression liefert: $F_{quad}(x) = -0.6334x^2 + 10,3605x + 3.125$</p> <p>Die logistische Regression liefert</p> <p>mit DERIVE $F_{log}(x) = \frac{9,45 \cdot 10^6 \cdot e^{0,9925x}}{2,15 \cdot 10^5 \cdot e^{0,9925x} + 2,15 \cdot 10^6}$</p> <p>mit dem Ti  mit dem ClassPad </p> <p>• Gemäß der quadratischen Regression müsste die Höhe des Baumes nach Erreichen eines Hochpunktes wieder abnehmen. Dies ist unrealistisch. Außerdem lässt sich aus den Tabellenwerten vermuten, dass die Höhe des Nutzholzes einen Sättigungswert erreicht. Also bietet sich eine logistische Regression an.</p> <p>• Aus den Bedingungen $G(0) = 4$ und $G(2) = 38,6$ ergeben sich die Gleichungen: I $a - b = 4$ II $a - b \cdot e^{-2} = 38,6$ Mit dem solve-Befehl folgt $a = 44,0155$ und $b = 40,0155$, also $G(x) = 40,0155 - 40,0155 \cdot e^{-x}$.</p>	10	5	10

		Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
				I	II	III
		<p>Von den Schülerinnen und Schüler wird nur eine Skizze im vorbereiteten Koordinatenkreuz erwartet.</p> <ul style="list-style-type: none"> Die Nutzhölzer haben bei Pflanzung dieselbe Höhe. Etwa in den ersten fünf Jahren erreicht Nutzholz G aber eine deutlich größere Höhe als Nutzholz F. Sorte G wächst also erheblich schneller als Sorte F. Sorte G wächst zu Anfang am schnellsten, Sorte F beim Wendepunkt (etwa nach zwei Jahren). Beide Wachstumsgeschwindigkeiten verringern sich deutlich etwa ab dem fünften Jahr. Beide Hölzer streben derselben Sättigungshöhe von etwa 44 Dezimetern zu. 	5			
b)	<ul style="list-style-type: none"> Die Wachstumsraten f^* und g^* werden durch die ersten Ableitungen von F^* und von G^* angegeben. Über den Differenzierbefehl des CAS (bzw. Handrechnung bei G^*) ermittelt man: $f^*(x) = \frac{440 \cdot e^x}{(e^x + 10)^2}$ und $g^*(x) = -47,3 \cdot e^{-x}$. Für den Zeitpunkt gleicher Wachstumsgeschwindigkeit muss die Gleichung $f^*(x) = g^*(x)$ gelöst werden. Mithilfe des solve-Befehls erhält man die einzige Lösung $x_1 \approx 1,585$. Nach ungefähr 1,6 Jahren wachsen beide Holzarten gleich schnell. 			10		

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	<ul style="list-style-type: none"> Für den Höhenunterschied kann man eine Differenzfunktion $D = G^* - F^*$ definieren. Für den Zeitpunkt des Maximums von D muss $D'(x) = 0$ gelten. Da $D'(x) = g^*(x) - f^*(x)$ und $f^*(x) = g^*(x)$ für das x_1 aus dem vorigen Spiegelstrich, folgt dass auch nur für $x_1 \approx 1,6$ gilt $D'(x_1) = 0$. Die Existenz eines Maximums ist aufgrund der angefertigten Grafik ersichtlich. Nach etwas über anderthalb Jahren ist der Höhenunterschied der Hölzer also am größten. Die Größe des Höhenunterschieds bestimmt man aus $G^*(1,585) - F^*(1,585) \approx 35,31 - 14,43 = 20,88$. Der größte Höhenunterschied beträgt rund 21 dm. Die erreichbare Höhe der Bäume lässt sich über Grenzwerte für „x gegen unendlich“ bestimmen: Sorte F: $\lim_{x \rightarrow \infty} F^*(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{44}{10 \cdot e^{-x} + 1} = 44$ (da $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$) Die Sorte F wächst bis zu einer Höhe von 44 dm. Sorte G: $\lim_{x \rightarrow \infty} G^*(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (45 - 47,3 \cdot e^{-x}) = 45$ (da $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$) Die Sorte G wächst bis zu einer Höhe von 45 dm. Sorte F: Die Lösung der Gleichung $F^*(x) = 33$ ist gesucht. Der solve-Befehl liefert: $x = \ln(30) \approx 3,40$. Nach etwa 3,4 Jahren hat der Baum 75 % seiner Gesamthöhe erreicht. Sorte G: Die Lösung der Gleichung $G^*(x) = 33,75$ ist gesucht. Der solve-Befehl liefert: $x = \ln(946) + 2 \cdot \ln(\frac{1}{15}) \approx 1,44$. Dieser Baum hat 75 % seiner Gesamthöhe bereits nach rund anderthalb Jahren erreicht. 	5	5	
c)	<ul style="list-style-type: none"> Die Wachstumsgeschwindigkeit vergrößert sich proportional zum Parameter c. Für $c < 0$ wäre die Wachstumsgeschwindigkeit negativ, was ein Schrumpfen des Baumes bedeuten würde. Für $c = 0$ gäbe es gar kein Wachstum. Da Beides unrealistisch ist, muss $c > 0$ gefordert werden. 		5	

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung						
		I	II	III				
<p>• Für $b < 0$, $b = 0$ und $b > 0$ entstehen grundsätzlich unterschiedliche Graphen.</p>								
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%;">Beispiel für $b < 0$ und $b > 0$</th> <th style="width: 50%;">Beispiel für $b = 0$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">  </td> <td style="text-align: center;">  </td> </tr> </tbody> </table>		Beispiel für $b < 0$ und $b > 0$	Beispiel für $b = 0$					
Beispiel für $b < 0$ und $b > 0$	Beispiel für $b = 0$							
								
<p>Wird $b < 0$ gewählt, so entsteht eine Polstelle. Die Wachstumsgeschwindigkeit müsste demnach für eine bestimmte Zeit unendlich groß werden. Das ist nicht realistisch.</p> <p>Für $b = 0$ ist die Wachstumsgeschwindigkeit zu Beginn am größten, nimmt dann ständig ab und nähert sich null. Diese Entwicklung ist möglich. Damit weist diese Funktion das gleiche Wachstumsverhalten wie ein beschränktes Wachstum auf.</p> <p>Für $b > 0$ ist die Wachstumsgeschwindigkeit zu Anfang sehr klein, sie wächst dann bis zu einem maximalen Wert. Dann nimmt sie ähnlich wie bei $b = 0$ ab. Auch diese Entwicklung ist realistisch und hat das gleiche Wachstumsverhalten wie das logistische Wachstum.</p>								
				15				

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
<ul style="list-style-type: none"> Die Schüler erzeugen eine entsprechende Grafik auf ihrem Bildschirm, die sie möglicherweise auch skizzieren. Dies ist aber nicht verlangt. 			5	5
Insgesamt 100 BWE		25	55	20

II.1 Flugbahnen

Vom Tower eines Flughafens aus wird ein Flugzeug $F1$ beobachtet, welches sich in einem Beobachtungszeitraum von 2 Minuten, beginnend mit dem Zeitpunkt $t_0 = 0$ s, mit einer konstanten Geschwindigkeit auf einer gradlinigen Bahn bewegt. Alle Angaben sind in Kilometern.

Nehmen Sie außerdem an, dass die Erdoberfläche eine Ebene ist.

Die Aufgabenteile a), b) und c) beziehen sich auf den oben beschriebenen Beobachtungszeitraum.

a) Das Flugzeug $F1$ wird zunächst zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ s im Punkt $F1_1(-11|2|0,4)$ geortet. 15 Sekunden später wird es im Punkt $F1_1(0,5|1|0,7)$ geortet.

- Berechnen Sie eine Geradengleichung, die die Flugbahn von $F1$ beschreibt.
- Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeuges und geben Sie Ihr Ergebnis in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und in $\frac{\text{km}}{\text{min}}$ an.
- Berechnen Sie den Punkt, indem das Flugzeug $F1$ eine Flughöhe von 2,5 km erreicht hat.
- Bestimmen Sie den Winkel der Flugbahn gegenüber der Horizontalen. **20 P**

Ein zweites Flugzeug $F2$ bewegt sich im Beobachtungszeitraum ebenfalls auf einer gradlinigen Bahn.

b) Das Flugzeug $F2$ wird auch zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ s beobachtet. Es befindet sich im Punkt

$F2_1(-3|-1|3,7)$ und fliegt mit der Geschwindigkeit von $5 \frac{\text{km}}{\text{min}}$ in Richtung $\vec{f}2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Erläutern sie ohne eine weitere Rechnung, warum die Funktion, die den Abstand der beiden Flugzeuge beschreibt, genau ein Minimum hat.
 - Bestimmen sie im Beobachtungszeitraum die kleinste und die größte Entfernung der beiden Flugzeuge. Berechnen Sie die jeweiligen Abstände. **20 P**
- c) • Bestätigen Sie, dass die beiden Flugbahnen sich nicht schneiden.
- Es gibt einen Punkt auf der Flugbahn von $F1$, der genau senkrecht unter einem Punkt der Flugbahn von $F2$ liegt. Bestimmen Sie die beiden Punkte sowie deren Abstand.
 - Entscheiden Sie, ob dieser Abstand mit dem Abstand der beiden Flugbahnen übereinstimmt. **20 P**
- d) Nahe der Startbahn befindet sich im Punkt $R(-3|1,5|0)$ eine Radarstation mit einem halbkugelförmigen Überwachungsbereich von 90 km. Ermitteln Sie unter der Annahme, dass sich das Flugzeug $F1$ auch außerhalb des Beobachtungszeitraumes gradlinig weiterbewegt, wie viele km das Flugzeug im Überwachungsbereich des Radars fliegt. **15 P**

- e) Im Anschluss an den Beobachtungszeitraum von 2 Minuten fliegt das Flugzeug $F2$ nicht mehr gradlinig weiter. Es wird von zwei Radarstationen $R1$ und $R2$ erfasst. $R1$ befindet sich in dem Punkt $(-5|7|0)$ und $R2$ im Punkt $(12|-4|0)$.

Von $R1$ ist das Flugzeug $F2$ 47 km entfernt und von $R2$ ist das Flugzeug 35 km entfernt.

- Bestätigen Sie, dass alle infrage kommenden Punkte sich auf einem Halbkreis befinden.
- Bestimmen Sie den Radius und den Mittelpunkt des Halbkreises.
- Bestimmen Sie die Ebene, in der dieser Halbkreis liegt.

25 P

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Die Geradengleichung ergibt sich aus $\overline{f_1} + k(\overline{F_1} \ \overline{F_2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0,4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ 0,3 \end{pmatrix}$,</p> <p>wobei $\overline{f_1}$ der zu F_1 gehörende Vektor ist.</p> <p>Es wird nun die Länge der Strecke von F_1 nach F_2 bestimmt und mit 4 malgenommen. Das ist die Strecke, die das Flugzeug in einer Minute zurücklegt. Durch Multiplikation dieses Ergebnisses mit 60 erhält man die in einer Stunde zurückgelegte Strecke.</p> $ \overline{F_1} \ \overline{F_2} = \left \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ 0,3 \end{pmatrix} \right = \frac{\sqrt{334}}{10} \approx 1,83$ $\frac{\sqrt{334}}{10} \cdot 4 \approx 7,3 \text{ und } \frac{\sqrt{334}}{10} \cdot 4 \cdot 60 \approx 438,62$ <p>Das Flugzeug F_1 liegt mit einer Geschwindigkeit von ungefähr $7,3 \frac{\text{km}}{\text{min}}$</p> <p>bzw. ungefähr $439 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.</p> <p>Für die x_3-Komponente der Flugbahn muss 2,5 ergeben $x_3 = 0,4 + k \cdot 0,3 = 2,5$. Z. B. mithilfe des solve-Befehls erhält man $k = 7$. Dieses Ergebnis wird in die Geradengleichung eingesetzt:</p> $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0,4 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,5 \\ 9 \\ 2,5 \end{pmatrix}$ <p>Daraus ergibt sich der gesuchte Punkt zu $(9,5 9 2,5)$.</p> <p>Es ist der Winkel zwischen dem Richtungsvektor der Flugbahn $\overline{f_1}$ und der Horizontalen zu bestimmen. In der entsprechenden Formelsammlung findet man die Formel $\sin(\alpha) = \frac{ \vec{n} \cdot \overline{f_1} }{ \vec{n} \cdot \overline{f_1} }$, wobei \vec{n} der Richtungsvektor der Ebene ist.</p> <p>In diesem Fall ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, also folgt $\sin(\alpha) = \frac{3 \cdot \sqrt{334}}{334} \approx 0,16$, sodass z. B. mithilfe des solve-Befehls $\alpha \approx 9,4^\circ$ folgt.</p> <p><i>Hinweis: Ebenso ist u. a. eine elementargeometrische Lösung über die Länge des Richtungsvektors und dessen x_3-Komponente möglich.</i></p>	15	5	

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
b)	<p>• Die beiden Flugbahnen werden als Funktionen f_1 und f_2 in Abhängigkeit von der Zeit t aufgefasst. Der Abstand der beiden Flugzeuge zum Zeitpunkt t wird durch $f_1(t) - f_2(t)$ beschrieben. Nach Definition des Abstandes als Wurzel aus der Summe der Quadrate der Komponenten hat die Abstandsfunktion genau dann einen Extremwert, wenn der Radikand extremal wird. Da der Radikand eine quadratische Funktion in t ist, hat er nur ein Extremwert. Aufgrund des Kontextes der Aufgabe kann es nur ein Minimum sein, denn die Flugzeuge bewegen sich während ihres Fluges voneinander weg. Liegt die Extremstelle nicht im Beobachtungszeitraum, so gibt es ein eindeutig bestimmtes (Rand-) Minimum – einer der beiden Randwerte. <i>Hinweis: Auch ohne Erwähnung des Randminimums sollte volle Punktzahl gegeben werden. Um die Formulierung nicht zu kompliziert zu machen, wurde die Aufgabenstellung nicht präzisiert.</i></p> <p>• Setzt man in der Geradengleichung von $F1$ aus dem Aufgabenteil a) $k = 4$, so erhält man den Punkt $F1_3(5 6 1,6)$, an dem das Flugzeug nach einer Minute ist. Damit lässt sich die Geradengleichung auf die Form</p> $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0,4 \end{pmatrix} + k \overrightarrow{(F1_1 F1_3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0,4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1,2 \end{pmatrix}, \text{ wobei } k \text{ in Minuten angegeben wird.}$ <p>Eine Geradengleichung für die Flugbahn des zweiten Flugzeugs ist</p> $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3,7 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ wobei } l \text{ (noch) nicht in Minuten angegeben wird. Dazu wird}$ <p>ein Richtungsvektor gesucht, der die gleiche Richtung wie der Ursprüngliche aufweist, aber die Länge 5 (km) hat. $\vec{f2} = \sqrt{41}$, also hat $\frac{5}{\sqrt{41}} \vec{f2} = \frac{5\sqrt{41}}{42} \vec{f2}$</p> <p>die Länge 5 und man erhält $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3,7 \end{pmatrix} + l \frac{5}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Geradengleichung, wobei l</p> <p>in Minuten angegeben wird.</p> <p>Durch $f1(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0,4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1,6 \end{pmatrix}$ und $f2(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3,7 \end{pmatrix} + t \frac{5}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhält man zwei</p> <p>Funktionen, die jeweils den Ort der Flugzeuge zum Zeitpunkt t ausgeben, wobei t in Minuten angegeben wird. $ab(t) := f1(t) - f2(t)$ gibt den Abstand der beiden Flugzeuge zum Zeitpunkt t an. Zur Bestimmung des minimalen Abstandes wird die erste Ableitung davon gebildet und gleich null gesetzt. Man erhält als Nullstelle der ersten Ableitung $t \approx -0,2673$</p>			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	<p>Das Minimum liegt außerhalb des Beobachtungszeitraumes, sodass die gesuchten Werte am Rand des Beobachtungszeitraumes liegen. Für $t = 0$ erhält man das Minimum mit $ab(0) \approx 4,9$ und für $t = 2$ erhält man ein Maximum mit $ab(2) \approx 11,3$:</p> <p>Der kleinste Abstand der beiden Flugzeuge beträgt etwa 4,9 km und größte Abstand im Beobachtungszeitraum beträgt etwa 11,3 km.</p>		20	
c)	<p>• Es ist $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0,4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3,7 \end{pmatrix} + l \frac{5}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu lösen. Diese Gleichung hat aber keine Lösung, sodass die beiden Flugbahnen sich nicht schneiden.</p> <p>• Wenn die beiden Punkte genau senkrecht übereinander liegen, so müssen die x_1- und die x_2-Komponente übereinstimmen. Es ist also das Gleichungssystem $-1 + 6k = -3 + 2l$ $2 + 4k = -1 + 6l$ zu lösen. Als Lösung erhält man $k = -\frac{3}{14}$ und $l = \frac{5}{14}$, so dass der Punkt P_1 auf der Flugbahn F_1 die Koordinaten $\left(-\frac{16}{7} \mid \frac{8}{7} \mid \frac{1}{7}\right)$ und der Punkt P_2 auf der Flugbahn F_2 die Koordinaten $\left(-\frac{16}{7} \mid \frac{8}{7} \mid \frac{142}{35}\right)$ hat.</p> <p>Der Abstand beträgt $\frac{142}{35} - \frac{1}{7} = \frac{137}{35} \approx 3,9$.</p> <p>Die beiden Punkte haben einen Abstand von ungefähr 3,9 km.</p> <p>• Es ist zu untersuchen, ob der Verbindungsvektor $\overline{P_1P_2}$ senkrecht auf den Flugbahnen von F_1 und F_2 steht.</p> <p>Z. B. ist das Skalarprodukt $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1,6 \end{pmatrix} \cdot \overline{P_1P_2} = -\frac{822}{175} \neq 0$, also stehen die beiden Vektoren nicht senkrecht aufeinander.</p>	5	15	

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	<p>Es ist er Schnittpunkt der Flugbahn mit der (Halb-)Kugel zu bestimmen: In die Kugelgleichung $(x_1 - (-3))^2 + (x_2 - 1,5)^2 + (x_3 - 0)^2 = 90^2$ werden die Koordinaten der Flugbahn von $F1$ eingesetzt:</p> $\left(\frac{3}{2}k - 1 + 3\right)^2 + ((k + 2) - 1,5)^2 + \left(\frac{3}{10}k\right)^2 = 90^2.$ <p>Mithilfe des solve-Befehls erhält man die beiden Lösungen $k \approx 48,16$ oder $k \approx -50,33$. Die negative Lösung kommt nicht in Frage, da der Punkt unter der Erdoberfläche liegt. Die positive Lösung eingesetzt ergibt ungefähr den Punkt $(71,2 50,2 14,8)$.</p> <p>Geht man von einer gradlinigen Flugbewegung aus, so ist der „Startpunkt“ zu bestimmen. In der Geradengleichung für die Flugbahn aus dem Aufgabenteil b) ist k so zu bestimmen, dass die x_3-Koordinate null wird. Z. B. mithilfe des solve-Befehls erhält man aus $0,4 + k \cdot 1,2 = 0$ die Lösung $k = -\frac{1}{3}$. Dieses wird in f_1 eingesetzt und man erhält $\left(-3 \frac{2}{3} 10\right)$ als Startpunkt. Mithilfe der Betragsfunktion erhält man $\left (71,2 50,2 14,8) - \left(-3 \frac{2}{3} 10\right)\right \approx 90,45327673$.</p> <p>Das Flugzeug $F1$ fliegt also etwa 90,5 km im Überwachungsbereich des Radars.</p>			15
e)	<ul style="list-style-type: none"> Das Flugzeug befindet sich irgendwo auf der (Halb-) Kugel um $R1$ mit dem Radius 47 und gleichzeitig irgendwo auf dem auf der (Halb-) Kugel um $R2$ mit dem Radius 35. Halbkugeln deshalb, weil die Erdoberfläche eine natürliche Grenze bildet. Das Schnittgebilde beider Kugeln ist nicht leer, da der Abstand beider Kugelmittelpunkte voneinander mit ungefähr 20,2 km geringer als der kleinste Kugelradius ist. Das Schnittgebilde zweier Kugeln ist normalerweise ein Kreis, aufgrund der Gegebenheiten ist es ein Halbkreis. Die entsprechenden Kugelgleichungen sind: $k_1 = (x_1 + 5)^2 + (x_2 - 7)^2 + (x_3 - 0)^2 = 47^2$ $k_2 = (x_1 - 12)^2 + (x_2 + 4)^2 + (x_3 - 0)^2 = 35^2$ Löst man $k_1 - k_2$, so erhält man: $x_1^2 - 7x_1 + x_2^2 - 3x_2 + x_3^2 = 1600$. Setzt man $x_3 = 0$, so bekommt man eine Bedingung für die beiden Punkte des Halbkreises auf der Erdoberfläche $x_1^2 - 7x_1 + x_2^2 - 3x_2 = 1600$ (I) Aus $k_1 - k_2$ folgt $34x_1 - 22x_2 - 86 = 984$. Umgeformt nach x_1 ergibt sich: $x_1 = \frac{11x_2 + 535}{17}$. Dieses Ergebnis wird in (I) eingesetzt und man erhält nach einer entsprechenden Vereinfachung eine Gleichung nur in Abhängigkeit von x_2. 			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	<p>Diese Gleichung wird nach x_2 aufgelöst und man erhält die beiden Lösungen</p> $x_{21} = \frac{119 \cdot \sqrt{8569}}{410} - \frac{117}{10} \text{ und } x_{22} = -\frac{119 \cdot \sqrt{8569}}{410} - \frac{117}{10}$ $x_{21} \approx 15,16755682 \text{ und } x_{22} \approx -38,56755682$ <p>Damit erhält man die beiden entsprechenden x_1-Koordinaten</p> $x_{11} = \frac{239}{10} + \frac{\sqrt{8569}}{410} \text{ und } x_{12} = \frac{239}{10} - \frac{\sqrt{8569}}{410}$ $x_{11} \approx 41,28488971 \text{ und } x_{12} \approx 6,515110289$ <p>Insgesamt erhält man die beiden Punkte $H_1(41,28488971 15,16755682 0)$ und $H_2(6,515110289 -38,56755682 0)$</p> <p>Der Abstand beider Punkte berechnet man mittels der Abstandsfunktion zu $64,00312492 \approx 64,0$, sodass der Radius des Halbreises etwa 32 km beträgt. Der Mittelpunkt des Halbkreises liegt in der Mitte beider Punkte, also bei $M(23,9 -11,7 0)$.</p> <ul style="list-style-type: none"> Die Ebene bestimmt sich aus dem Mittelpunkt M, dem Richtungsvektor $\overline{MH_1}$ und dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, denn die Kugelmittelpunkte liegen beide auf der Ebene der Erdoberfläche. So ist der Halbkreis auch senkrecht zur Erdoberfläche. Insgesamt ergibt sich die Ebene zu $\begin{pmatrix} 23,9 \\ -11,7 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 17,4 \\ 26,9 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 			
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

II.2 Mietwagenfirma

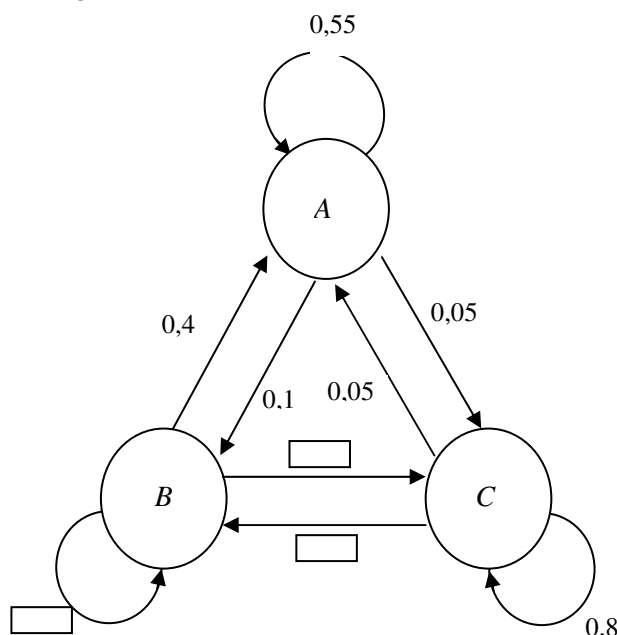
Die Mietwagenfirma „Klapperkiste“ betreibt Filialen an den drei verschiedenen Standorten Astadt (A), Benest (B) und Cedorf (C). Bislang mussten die Wagen immer dort abgegeben werden, wo sie ausgeliehen wurden. Aus ökonomischen Gründen möchte die Firmenleitung die Rückgabe der ausgeliehenen Wagen an einer beliebigen Firmenfiliale zulassen.

Mithilfe einer repräsentativen Kundenumfrage möchte man klären, ob dieses Angebot angenommen werden würde. Die Befragungsergebnisse sind teilweise in dem Übergangsgraphen festgehalten. Der Pfeil gibt für jede Filiale an, wie hoch der Anteil der Fahrzeuge dieser Filiale ist, die abends an ihrem Ausleih-Ort zurückgegeben bzw. an einen der beiden anderen Standorte wechseln würden. (Vereinfachend wird angenommen, dass alle ausgeliehenen Wagen abends zurückgebracht werden.)

a) Zum Übergangsgraphen gehört die Übergangsmatrix M .

- Ergänzen Sie die fehlenden Werte im Graphen mithilfe der Übergangsmatrix M .
- Beschreiben und interpretieren Sie die Bedeutung der fehlenden Werte im Kontext der Aufgabenstellung.
- Begründen Sie aus dem Kontext der Aufgabe, dass die Summe der Werte einer Spalte immer 1 ergeben muss.

15 P



$$M = \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Bisher befinden sich 10 % aller Firmenwagen in Astadt (A), 60 % der Wagen in Benest (B) und die restlichen Autos in Cedorf (C). Die Firma besitzt insgesamt 4200 Leihwagen.

b) Geben Sie die Wagenverteilung $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} p_A \\ p_B \\ p_C \end{pmatrix}$ für den Tag vor der möglichen Einführung des neuen Angebots an.

5 P

c) Ermitteln Sie die Wagenverteilung \vec{p}_1 , die nach dem Modell für den folgenden Tag zu erwarten wäre.

10 P

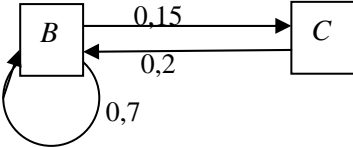
Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

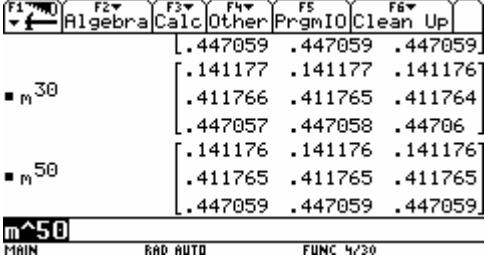
- d) Bestätigen Sie, dass nach den Umfrageergebnissen am Einführungstag mehr als ein Viertel der Wagen in einer anderen Filiale abgegeben werden würden. **10 P**
- e) Eine Filiale wird geschlossen, wenn sich in ihr dauerhaft weniger als 300 Wagen befinden. Untersuchen und beurteilen Sie, ob es nach diesem Modell zur Schließung einer der Filialen kommt. (Probieren kann hilfreich sein, ist aber nicht ausreichend.) **15 P**
- f) Die Firmenleitung erwartet nach Einführung der neuen Rückgabebedingungen eine gesteigerte Nachfrage der Leihwagen. Für diesen Fall plant sie, im kommenden Jahr weitere 300 Wagen zuzukaufen. Um eine optimale Ausnutzung der Stellflächen in den Filialen zu gewährleisten, untersucht man mithilfe des Modells, ob bei einer bestimmten Ausgangsverteilung bei gleichem Wechselverhalten der Kunden der Wagenbestand in den Filialen annähernd stabil bleiben würde.
- Begründen Sie, dass dies erreicht werden kann.
 - Ermitteln Sie einen geeigneten Startvektor \vec{p}_s .
 - Vergleichen mit der Lösung aus Teil e) und interpretieren Sie Ihr Ergebnis. **20 P**
- g) Am Abend nach der Einführung des neuen Rückgabemodells stellt man fest, dass sich in der Filiale A nur 400 der 4200 Firmenwagen befinden, während die Anzahl der in B abgestellten Wagen genau mit der vorher berechneten Anzahl im Aufgabenteil c) übereinstimmt. Man geht deshalb von einer leicht veränderten Wechselmatrix M_{neu} aus.

$$M_{neu} = \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{c} \\ \end{array} \right] & 0,1 & 0,05 \\ 0,4 & 0,7 & 0,15 \\ \left[\begin{array}{c} \\ \end{array} \right] & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie die fehlenden Matrixwerte.
- Bestätigen Sie mithilfe der Übergangsmatrix M_{neu} , dass sich die Anzahl der am ersten Abend erwarteten Wagen in Filiale B im Vergleich zum ersten Modell M nicht verändert.
- Untersuchen Sie, ob es nach diesem veränderten Modell zu einer Filialenschließung kommt. **25 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	 <p>(Auszug des Graphen)</p> <p>15 % der in C befindlichen Wagen wechseln nach B 20 % der in B befindlichen Wagen wechseln nach C 70 % der in B befindlichen Wagen bleiben bzw. kommen wieder nach B</p> <p>Die Spaltenkomponenten der Matrix beschreiben das Bleiben oder Wechseln der Wagen der jeweiligen Filiale. Da jeder Wagen abends in einer der Filialen steht, müssen alle Wagen (100%) „verteilt“ werden.</p>	5	10	
b)	<p>4200 Wagen werden anteilig auf die Filialen verteilt, damit ergibt sich:</p> $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix}$	5		
c)	$\vec{p}_1 = M \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,1 & 0,05 \\ 0,4 & 0,7 & 0,15 \\ 0,05 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 546 \\ 2121 \\ 1533 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{A,1} \\ p_{B,1} \\ p_{C,1} \end{pmatrix}$	10		
d)	<p>Man berechnet z. B. den Anteil der Nichtwechsler</p> $n_w = \frac{M[1,1] \cdot p_A + M[2,2] \cdot p_B + M[3,3] \cdot p_C}{4200} = \frac{3003}{4200} = 71,5\%$ <p>Die Differenz zu 100% ergibt dann 28,5% als Anteil der Wechsler.</p>		10	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	<p>Beim Bilden hoher Potenzen M^n für $n \approx 50$ erkennt man das sich die Matrixwerte kaum noch verändern, d. h., es stellt sich ein stabiler Zustand ein.</p>  <p>Durch Ausmultiplizieren ergibt sich als Autoverteilung $\vec{p}_{50} = M^{50} \cdot \vec{p}_0 \approx \begin{pmatrix} 593 \\ 1729 \\ 1878 \end{pmatrix}$.</p> <p>Die Vermutung liegt also nahe, dass keine Filiale weniger als 300 Wagen beherbergen wird. Bestätigt werden kann dies durch die Bestimmung der Eigenwerte mithilfe geeigneter CAS-Operationen oder als Lösung des charakteristischen Polynoms:</p> <p>$M \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$. Als Eigenwerte ergeben sich $\lambda \in \{0,4104; 0,6396; 1\}$ alle drei (hier gerundeten) Eigenwerte sind reell. Einer ist gleich 1 die anderen sind betragsmäßig kleiner als 1, d. h. die Autoverteilung konvergiert gegen einen Wert ungleich null.</p> <p>Ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist $\vec{v}_{eig} \approx \begin{pmatrix} 0,2263 \\ 0,6599 \\ 0,7165 \end{pmatrix}$ Ein dazu kollinearer</p> <p>Vektor mit der Komponentensumme 1 wäre ungefähr $\begin{pmatrix} 0,1412 \\ 0,4118 \\ 0,4471 \end{pmatrix}$, daraus ergeben sich dieselben prozentualen Anteile wie oben.</p>			
			10	5

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	<p>Gelöst werden soll: $\vec{p}_S = M \cdot \vec{p}_S = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,1 & 0,05 \\ 0,4 & 0,7 & 0,15 \\ 0,05 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3158 \cdot t \\ 0,9210 \cdot t \\ t \end{pmatrix}$</p> <p>Eine Lösung dieses Problems ist also möglich.</p> <p>Da insgesamt 4500 Wagen verteilt werden sollen, ergibt sich mit $t \approx 2011,76$ eine Autoverteilung (gerundet auf ganze Wagen!) $\vec{p}_S \approx \begin{pmatrix} 635 \\ 1853 \\ 2012 \end{pmatrix}$.</p> <p>Rechnet man diese Autoverteilung auf ihre prozentualen Anteile der Firmenwagen um, ergibt sich (natürlich, da sich die Matrix – also das Wechselverhalten der Kunden nicht verändert hat) derselbe Vektor wie in Aufgabe (e).</p>		15	5
g)	<p>Aus dem Ansatz: $M \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} a & 0,1 & 0,05 \\ 0,4 & 0,7 & 0,15 \\ 0,6-a & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ergeben sich die folgenden Werte: $a \approx 0,2024$, $y = 2121$ und $z = 1679$.</p> <p>Die fehlenden Matrixkomponenten sind also $M_{1,1} \approx 0,2024$ bzw. $M_{3,1} \approx 0,3976$.</p> <p>Da sich die mittlere Zeile der Matrix und der Startvektor nicht verändert haben, muss die Anzahl der in der Filiale B abgegebenen Wagen gleich dem in Teil (c) berechneten Wert sein.</p> <p>Für große $n \approx 50$ verändern sich die Potenzen M^n kaum noch. Es ergibt sich $M_{neu}^{50} \cdot \vec{p}_0 \approx \begin{pmatrix} 341 \\ 1590 \\ 2269 \end{pmatrix}$. Auch hier kommt es nicht zur Firmenschließung, denn mit ungefähr 341 Wagen liegt die „schwächste“ Filiale A noch über der gesetzten Grenze.</p>	5	10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

STOCHASTIK 1

III.1 „Handygefahren“

Um die Unfallgefahr zu verringern, ist in Deutschland die Benutzung eines Handys im Auto durch den Fahrer nur mit einer Freisprecheinrichtung erlaubt. Weil eine gut funktionierende Freisprecheinrichtung aber relativ teuer ist, telefonieren viele Fahrer trotzdem unerlaubt während der Fahrt mit dem Handy.

Im Folgenden soll stets unter „Ein Fahrer telefoniert“ verstanden werden: Dieser Fahrer telefoniert während der Fahrt mit seinem Handy, ohne eine Freisprechanlage zu verwenden (er begeht also eine Ordnungswidrigkeit).

Auf einer belebten Straße soll der Anteil p der Autofahrer untersucht werden, die zum Zeitpunkt einer Kontrolle telefonieren. Der Anteil p hängt von Ort und Zeitpunkt der Kontrolle ab. Dabei wird angenommen, dass die Fahrer sich in ihrem Telefonierverhalten gegenseitig nicht beeinflussen.

- a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
- A : Bei 10 vorbeifahrenden Autos telefonieren genau die Fahrer des 3. und des 5. Autos.
 - B : Bei 10 vorbeifahrenden Autos telefonieren die Fahrer der ersten vier Autos nicht, aber trotzdem telefonieren genau zwei Fahrer. **10 P**
- b) • Berechnen Sie, wie groß der Anteil p der telefonierenden Fahrer an einer bestimmten Kontrollstelle mindestens sein muss, wenn unter 100 vorbeifahrenden Autos mit mehr als 95% Wahrscheinlichkeit mindestens eines von einem telefonierenden Fahrer gelenkt wird.
- Auf der Schlossallee wird an einem Mittwoch zwischen 15 Uhr und 16 Uhr eine Kontrolle durchgeführt. Während dieser Zeit gelte für den Anteil p jener Fahrer, die zu einem beliebigen Zeitpunkt während dieser Zeitspanne gerade telefonieren, $p = 3\%$.
Bestimmen Sie die Anzahl der Autos, die mindestens kontrolliert werden müssen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80 % mindestens einen telefonierenden Fahrer erwischt. **20 P**
- c) Nun kontrolliert man auf einer Zufahrt zu einer beliebigen Diskothek zwischen 21 Uhr und 23 Uhr. Hier ist die Telefonierwahrscheinlichkeit außergewöhnlich hoch, nämlich $p = 20\%$. Die Polizisten wetten untereinander, beim wievielten Auto sie erstmals einen Telefonierer erwischen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass dieses
- beim sechsten,
 - beim zehnten,
 - nach dem zehnten Auto passiert.
- Einer der Polizisten behauptet, dass im Mittel beim fünften Auto der erste Telefonierer zu erwarten ist.
- Beschreiben Sie diese Behauptung mit Begriffen der Stochastik und begründen Sie diese:
- (1) entweder unter Verwendung der Formel $1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.
- (2) oder indem Sie erkennen, dass nach dem ersten Auto entweder der erste Telefonierer aufgetreten ist oder die erwartete Anzahl der Autos bis zum ersten Telefonierer sich gegenüber der Situation am Anfang um 1 erhöht hat. **25 P**

- d) Nach einigen Unfällen, bei denen Autofahrer telefoniert hatten, will die örtliche Polizei in ihrer Stadt verstärkte Kontrollen durchführen, wenn der Anteil der telefonierenden Autofahrer mehr als 15 % beträgt. Dazu überprüft sie in der Stadt 1000 fahrende Autos.

Bestimmen Sie mithilfe Ihres Rechners oder der Normalverteilung die Anzahl der telefonierenden Fahrer, die die Kontrolle mindestens passieren müssen, um auf einem Signifikanzniveau von 5 % gute Argumente für verstärkte Kontrollen zu haben. **20 P**

- e) Wenn bei einer Umfrage 20 % der Befragten angeben, beim Fahren zu telefonieren, so ergeben sich bei einer Kontrolle dennoch viel geringere Anteile. Dieses liegt daran, dass die Telefonierer nicht ständig telefonieren. Um zu einem differenzierteren Bild zu gelangen, ist es erforderlich, Klasseneinteilungen nach der durchschnittlichen (nach wie vor illegalen) Telefonierdauer pro Stunde vorzunehmen. In sehr starker Vereinfachung ergibt sich bei einer Befragung von Autofahrern das folgende Bild, das als repräsentativ gelten möge:

	Wenig	Normal	Viel	Dauernd
Durchschnittliche Telefonierzeit pro Stunde [in Minuten]	5	10	15	30
Anteil der Autofahrer	7 %	10 %	2 %	1%

Ein Autofahrer passiert eine Kontrolle.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er bei der Kontrolle erwischt wird, wenn man weiß, dass er ein Wenigtelefonierer ist.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er gerade telefoniert, wenn man gar nichts über ihn weiß.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er gerade telefoniert, wenn man weiß, dass er ein Telefonierer ist (die Frage also nach der Wahrscheinlichkeit, ob ein Telefonierer erwischt wird).
- Der Autofahrer telefoniert gerade bei der Kontrolle. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei ihm um einen Wenigtelefonierer handelt. **25 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung														
		I	II	III												
a)	<ul style="list-style-type: none"> $P(A) = p^2 \cdot (1-p)^8$, da die Einzelereignisse unabhängig sind. Es gibt $\binom{6}{2}$ Möglichkeiten für die telefonierenden Fahrer. Daher gilt: $P(B) = \binom{6}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^8 = 15 \cdot p^2 \cdot (1-p)^8$ bzw. $P(B) = (1-p)^4 \cdot B(6, p, 2).$ 	10														
b)	<ul style="list-style-type: none"> Es ist die Gleichung $(1-p)^{100} = 0,05$ zu lösen, also $p \approx 0,0295 \approx 3\%$ Der Anteil der telefonierenden Fahrer muss über 3% liegen. Man kann den Lösungsweg auch formaler beschreiben: Ist X die Zufallsgröße „Anzahl der telefonierenden Fahrer“, so ist X binomialverteilt. Daher gilt: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^{100} > 0,95 \Leftrightarrow (1-p)^{100} < 0,05 \Leftrightarrow$ $(1-p) < \sqrt[100]{0,05} \Leftrightarrow p > 1 - \sqrt[100]{0,05} \approx 0,0295$ Im ersten Fall muss der Anteil der telefonierenden Fahrer über 3% liegen. Es ist die Gleichung $0,97^n = 0,2$ ($0 < p < 1$) zu lösen, also $n = \frac{\ln 0,2}{\ln 0,97} \approx 52,8$ Es müssen also mindestens 53 Autos kontrolliert werden. 	5	15													
c)	<ul style="list-style-type: none"> $P(\text{"beim sechsten Auto"}) = 0,8^5 \cdot 0,2 \approx 6,55\%$, $P(\text{"beim zehnten Auto"}) = 0,8^9 \cdot 0,2 \approx 2,68\%$, $P(\text{"nach dem zehnten Auto"}) = 0,8^{10} \approx 10,74\%$, Es ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung: <table border="1" style="margin-left: 40px;"> <thead> <tr> <th>k</th> <th>$P(X = k)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0,2</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>$0,2 \cdot 0,8$</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>$0,2 \cdot 0,8^2$</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>$0,2 \cdot 0,8^3$</td> </tr> <tr> <td>\vdots</td> <td>\vdots</td> </tr> </tbody> </table>	k	$P(X = k)$	1	0,2	2	$0,2 \cdot 0,8$	3	$0,2 \cdot 0,8^2$	4	$0,2 \cdot 0,8^3$	\vdots	\vdots			
k	$P(X = k)$															
1	0,2															
2	$0,2 \cdot 0,8$															
3	$0,2 \cdot 0,8^2$															
4	$0,2 \cdot 0,8^3$															
\vdots	\vdots															

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	<p>Die Anzahl N der Kontrollen, bis die Polizisten zum ersten Mal einen Telefonierer erwischen, ist eine Zufallsvariable. Die Behauptung des Polizisten kann dann präzisiert werden zu $E(N) = 5$.</p> <p><u>Weg (1):</u> $E(N) =$</p> $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0,2 \cdot 0,8^{k-1} = 0,2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0,8^{k-1} = 0,2 \cdot \frac{1}{(1-0,8)^2} = 5$ <p>Der Erwartungswert für die Anzahl der zu kontrollierenden Autos, bis man erstmals einen Telefonierer erwischt, beträgt also tatsächlich 5.</p> <p><u>Weg (2):</u> Es sei $e = E(N)$ der zu berechnende Erwartungswert. Die gemachte Beobachtung kann wie folgt in eine lineare Gleichung übersetzt werden: $e = 1 \cdot 0,2 + (1 + e) \cdot 0,8$ mit der Lösung $e = 5$</p>	10	10	5
d)	<p>Es sei X die Anzahl der Telefonierer, die die Kontrolle passieren.</p> <p>Nullhypothese H_0: „Der Anteil der Telefonierer beträgt höchstens 15%“. Fehler 1. Art: H_0 wird verworfen, obwohl richtig. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler soll höchstens 5% betragen. Ist k die Anzahl der telefonierenden Fahrer, die man mindestens beobachten muss, so soll also gelten</p> <p>$P(X \geq k H_0) \leq 5\%$ und $P(X \geq k - 1 H_0) > 5\%$. Dies ist äquivalent zu:</p> <p>$P(X \leq k - 1 H_0) \geq 95\%$ und $P(X \leq k - 2 H_0) < 95\%$.</p> <p>Durch Ausprobieren erhält man :</p> <p>$P(X \leq 168 H_0) \approx 0,948 \leq 95\%$ und $P(X \leq 169 H_0) \approx 0,956 \geq 95\%$.</p> <p>Also ist $k = 170$.</p> <p>Die Polizisten müssen im Rahmen der hier entwickelten Logik also mindestens 170 Telefonierer beobachten, um (bei Signifikanzniveau von 5 %) gute Argumente für verstärkte Kontrollen zu haben.</p> <p>Über den Weg mit der Approximation durch die Normalverteilung löst man die Gleichung $\Phi\left(\frac{k - 149,5}{\sqrt{127,5}}\right) = 0,95$. Es folgt: $\frac{k - 149,5}{\sqrt{127,5}} = 1,645$</p> <p>$\Leftrightarrow k \approx 169$.</p>		15	5

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	<p>Es sei T das Ereignis: „Der Autofahrer telefoniert zum Zeitpunkt der Kontrolle“ W das Ereignis „Der Autofahrer ist Wenigtelefonierer“. $P(W) = 7\%$ N das Ereignis „Der Autofahrer ist Normaltelefonierer“. $P(N) = 10\%$ V das Ereignis „Der Autofahrer ist Vieltelefonierer“. $P(V) = 2\%$ D das Ereignis „Der Autofahrer ist Dauertelefonierer“. $P(D) = 1\%$ H das Ereignis „Der Autofahrer ist Telefonierer“. $P(H) = 20\%$</p> <ul style="list-style-type: none"> Da der Autofahrer als Wenigtelefonierer durchschnittlich 5 Minuten pro Stunde telefoniert, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass er gerade zum Zeitpunkt der Kontrolle telefoniert: $P(T W) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \approx 8,33\%$. Mit dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit oder mit Hilfe eines Baumdiagramms erhält man: $P(T) = P(W) \cdot P(T W) + P(N) \cdot P(T N) + P(V) \cdot P(T V) + P(D) \cdot P(T D)$ $= \frac{7}{100} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{400} \approx 3,3\%$ <p>Die Wahrscheinlichkeit, dass der Autofahrer gerade telefoniert, beträgt ungefähr 3 %.</p> Gesucht ist $P(T H)$. Es gilt: $P(T H) = \frac{P(T \cap H)}{P(H)} = \frac{P(T)}{P(H)} = \frac{\frac{13}{400}}{\frac{1}{5}} = \frac{13}{80} \approx 16\%$ <p>Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Telefonierer erwischt wird, beträgt also ca. 16 %.</p> Es ist $P(W T)$ zu bestimmen. Dies kann entweder mit dem Satz von Bayes geschehen oder unter Verwendung des vorvorigen Ergebnisses (, das gerade der „Bayes-Nenner“ ist): $P(W T) = \frac{P(W) \cdot P(T W)}{P(T)} = \frac{\frac{7}{100} \cdot \frac{1}{12}}{\frac{13}{400}} = \frac{7}{39} \approx 18\%$ <p>Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei einer erwischten Person um einen Wenigtelefonierer handelt, liegt bei 18 %.</p> 			
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

STOCHASTIK 2

III.2 Lübecker Verkehrsbetriebe

Öffentliche Verkehrsbetriebe sind in der Regel hoch defizitär. Daran haben auch Schwarzfahrer ihren Anteil. So ist es erfreulich, dass der Anteil der Schwarzfahrer im Busverkehr der Lübecker Verkehrsbetriebe auf 8 % gesenkt werden konnte, weil alle Fahrgäste vorn beim Fahrer einsteigen müssen. Ein Kontrolleurteam kann pro Tag etwa 800 Fahrgäste überprüfen, die Personalien der entdeckten Schwarzfahrer aufnehmen und die Strafgebühr in Höhe von 40 € kassieren.

- a) • Beschreiben Sie, unter welchen Umständen es sinnvoll ist, unter 800 kontrollierten Fahrgästen die Anzahl X der Fahrgäste ohne gültigen Fahrschein als binomialverteilt anzunehmen.
• Geben Sie eine Situation an, in der diese Voraussetzungen für eine Binomialverteilung nicht erfüllt sind. **10 P**

In den Aufgabenteilen b) bis d) sei die in a) genannte Zufallsvariable X binomialverteilt mit $p = 0,08$.

- b) • Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei von 50 Fahrgästen keinen Fahrschein besitzen.
• Bestimmen Sie die Gruppengröße, ab der die Wahrscheinlichkeit, dass kein Schwarzfahrer dabei ist, unter 10 % sinkt. **20 P**

- c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 800 kontrollierten Fahrgästen höchstens 50 Schwarzfahrer befinden. Bestimmen Sie diese Wahrscheinlichkeit zusätzlich näherungsweise mithilfe der Annäherung durch die Normalverteilung und vergleichen Sie beide Ergebnisse. **15 P**

- d) Es werden nun die zwei Personengruppen betrachtet: Fahrgäste ohne Fahrschein (S) und Fahrgäste mit gültigem Fahrschein (F). Dabei gilt nach wie vor die vor Schwarzfahrerquote von $p = 8\%$. Von den Schwarzfahrern sind 60 % unter 30 Jahren (Ereignis U) und von den Fahrgästen mit gültigem Fahrschein sind 50 % unter 30 Jahren.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass
- ein unter 30-Jähriger ein Schwarzfahrer ist,
 - ein über 30-Jähriger ein Schwarzfahrer ist,
 - ein über 30-Jähriger kein Schwarzfahrer ist.
- 25 P**

- e) Durch die Möglichkeit, einen Fahrschein mit dem Handy zu kaufen, soll der Anteil der Schwarzfahrer weiter gesenkt werden (fehlendes Kleingeld fällt als Grund zum Schwarzfahren weg). Dieses mit hohem Verwaltungsaufwand verbundene Angebot wird realisiert und von vielen Kunden gern angenommen. Es lohnt sich für die Stadtwerke Lübeck aber finanziell nur dann, wenn sich der Anteil der Schwarzfahrer dadurch auf unter 6 % reduziert. Dazu soll eine Untersuchung von 2000 Fahrgästen durchgeführt werden.

Verwenden Sie für alle drei Punkte dieses Aufgabenteils das übliche Signifikanzniveau 5%:

- Ein Mitarbeiter der Lübecker Verkehrsbetriebe möchte zeigen, dass das Angebot sich lohnt. Untersuchen Sie für einen geplanten Hypothesentest, wie viele Personen ohne Fahrschein bei der Kontrolle höchstens entdeckt werden dürfen, damit der Mitarbeiter begründet behaupten kann, dass sich das Angebot lohnt.
- Ein anderer, eher skeptischer Mitarbeiter ist überzeugt, dass das Handy-Angebot nicht einmal zu irgendeiner Senkung der Schwarzfahrerquote geführt hat. Beurteilen Sie, wie er die Daten auswerten würde.
- Tatsächlich werden 139 Schwarzfahrer bei der Kontrolle entdeckt. Eigentlich müssten nun beide Mitarbeiter frustriert auf einen neuen Test mit einer größeren Stichprobe drängen. Aber es ist in der Statistik nicht unüblich – wenn auch logisch nicht ganz korrekt, im Nachhinein das Testdesign zu ändern, um doch noch zu schwächeren signifikanten Aussagen zu kommen (dabei wird so getan, als ob man das Ergebnis noch nicht kennen würde). Beurteilen Sie, welche Aussagen die beiden Mitarbeiter – entsprechend ihrem Erkenntnisinteresse – noch begründet treffen könnten.

30 P

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Es wird nur zwischen zwei möglichen Ergebnissen unterschieden werden. Entweder hat ein Fahrgast einen gültigen Fahrschein oder nicht. Die Frage, ob ein Fahrgast einen gültigen Fahrschein hat, muss stochastisch unabhängig von dem Verhalten der (dem Wissen über die) anderen Fahrgäste sein. Unter dieser Voraussetzung ist es sinnvoll X ist als binomialverteilt anzunehmen.</p> <p>Eine Situation, in der diese Verteilung nicht gilt, ist z. B. das Auftreten von Fahrgästen in sozialen Gruppen, bei denen alle keinen Fahrschein haben.</p>	10		
b)	$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \left(0,92^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0,08 \cdot 0,92^{49} \right)$ $\approx 1 - 0,01547 - 0,06725 = 0,9173.$ <p>Gesucht wird die kleinste natürliche Zahl n, für die gilt: $0,92^n < 0,1$. Mithilfe des solve-Befehls folgt: $n > 27,6$.</p> <p>Bei einer Gruppe von 28 Personen ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Schwarzfahrer dabei ist, gerade noch unter 10%, bei kleineren Gruppen ist die Wahrscheinlichkeit größer.</p>	10	10	
c)	<p>Direkt mit dem Rechner erhält man $P(X \leq 50) \approx 0,0357$.</p> <p>Die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 800 kontrollierten Fahrgästen nicht mehr als 50 Schwarzfahrer befinden, beträgt weniger als 4%.</p> <p>Für die Approximation mit der Normalverteilung berechnet man:</p> $\sigma = \sqrt{800 \cdot 0,08 \cdot 0,92} = \sqrt{58,88} \approx 7,673 (>3) \quad \mu = np = 64$ <p>Also</p> $P(X \leq 50) \approx \Phi\left(\frac{50,5 - 64}{\sqrt{58,88}}\right) \approx \Phi(-1,7593) = 1 - \Phi(1,7593) \approx 1 - 0,961 = 0,039$ <p>Die Ergebnisse stimmen annähernd überein.</p>			15

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung																		
		I	II	III																
d)	<p><u>1. Weg:</u> Man übersetzt die Informationen in eine Vierfeldertafel:</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td></td> <td>unter 30</td> <td>über 29</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Schwarzfahrer</td> <td><u>4,8 %</u></td> <td>3,2 %</td> <td><u>8 %</u></td> </tr> <tr> <td>keine Schwarzfahrer</td> <td><u>46 %</u></td> <td>46 %</td> <td>92 %</td> </tr> <tr> <td></td> <td>50,8 %</td> <td>49,2 %</td> <td>100 %</td> </tr> </table> <p>Dabei sind die fett unterstrichenen Daten direkt aus den gegebenen Informationen abzuleiten. Daraus ergeben sich dann die anderen Werte in den Feldern.</p> <p>Es sei U das Ereignis „unter 30 zu sein“ (der Gesamtanteil der unter 30 Jährigen) und S das Ereignis “Schwarzfahrer zu sein“ (der Gesamtanteil der Schwarzfahrer). Mit der Vierfeldertafel kann man die drei Fragen sofort beantworten:</p> $P(S U) = \frac{0,048}{0,508} \approx 9,4\% ; \quad P(S \bar{U}) = \frac{0,032}{0,492} \approx 6,5\%$ $P(S \bar{U}) = \frac{0,46}{0,492} \approx 93,5\%$ <p><u>2. Weg:</u> Folgende Daten sind bekannt: $P(S) = 0,08$, $P(U S) = 60\%$, $P(U \bar{S}) = 50\%$</p> <p>Mit dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit oder einem Baumdiagramm erhält man: $P(U) = P(S) \cdot P(U S) + P(\bar{S}) \cdot P(U \bar{S}) = 0,08 \cdot 0,6 + 0,92 \cdot 0,5 = 0,508$.</p> <p>Damit ergeben sich die gesuchten Wahrscheinlichkeiten zu</p> <ul style="list-style-type: none"> • $P(S U) = \frac{P(S) \cdot P(U S)}{P(U)} = \frac{0,08 \cdot 0,6}{0,508} = \frac{0,048}{0,508} \approx 9,4\%$ • $P(S \bar{U}) = \frac{P(S) \cdot P(\bar{U} S)}{P(\bar{U})} = \frac{P(S) \cdot (1 - P(U S))}{1 - P(U)}$ $= \frac{0,08 \cdot 0,4}{0,492} = \frac{0,032}{0,492} \approx 6,5\%$ <p>oder auch</p> $P(S \bar{U}) = 1 - P(\bar{S} \bar{U}) = 1 - \frac{P(\bar{S}) \cdot P(\bar{U} \bar{S})}{P(\bar{U})} = 1 - \frac{P(\bar{S}) \cdot (1 - P(U \bar{S}))}{1 - P(U)}$ $= 1 - \frac{0,92 \cdot 0,5}{0,492} = 1 - \frac{0,46}{0,492} \approx 6,5\%$ <ul style="list-style-type: none"> • $P(\bar{S} \bar{U}) = 1 - P(S \bar{U}) \approx \frac{0,46}{0,492} \approx 93,5\%$ 		unter 30	über 29		Schwarzfahrer	<u>4,8 %</u>	3,2 %	<u>8 %</u>	keine Schwarzfahrer	<u>46 %</u>	46 %	92 %		50,8 %	49,2 %	100 %			
	unter 30	über 29																		
Schwarzfahrer	<u>4,8 %</u>	3,2 %	<u>8 %</u>																	
keine Schwarzfahrer	<u>46 %</u>	46 %	92 %																	
	50,8 %	49,2 %	100 %																	
			25																	

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	<p>Der <u>erste Mitarbeiter</u> will begründen, dass p unter 0,06 gesunken ist, er wird deshalb versuchen, $H_0 : p \geq 0,06$ zu verwerfen durch einen einseitigen Test: X sei die Anzahl der Schwarzfahrer unter den 2000 zu kontrollierenden Fahrgästen. Kleine Werte von X sprechen gegen die Nullhypothese, deshalb suchen wir den größten Wert von k, für den gilt: $P(X \leq k H_0) \leq 5\%$. Wir betrachten die 2000-0,06-Binomialverteilung, mit deren Hilfe wir diese bedingte Wahrscheinlichkeit nach oben abschätzen können: Durch Ausprobieren erhält man : $P(X \leq 102 H_0) \approx 0,047 \leq 5\%$ und $P(X \leq 103 H_0) \approx 0,058 \geq 5\%$.</p> <p>Wenn $X \leq 102$ könnte der erste Mitarbeiter von Signifikanz (auf dem 5%-Niveau) sprechen, deshalb die Nullhypothese ablehnen und damit begründet behaupten, dass der Schwarzfahreranteil auf unter 6 % gesunken sei. Alternativ können wir die Binomialverteilung durch eine passende Normalverteilung approximieren, denn es gilt $\mu = np = 2000 \cdot 0,06 = 120$ $\sigma = \sqrt{112,8} \approx 10,62$. Weil $\sigma > 3$ ist, ist die Laplace-Bedingung erfüllt: $P(X \leq k) = P\left(\frac{X - \mu + 0,5}{\sigma} \leq \frac{k - \mu + 0,5}{\sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{k - \mu + 0,5}{\sigma}\right)$</p> <p>Wir suchen also den größten Wert von $k \in \mathbb{N}$, für den $\frac{k - \mu + 0,5}{\sigma} \leq -1,64$, das ist $k = 102$.</p> <p>Der <u>zweite Mitarbeiter</u> will zeigen, dass das Handy nicht einmal zu irgendeiner Senkung der Schwarzfahrerquote geführt hat, er müsste versuchen, $H_0 : p < 0,08$ in einen ebenfalls einseitigen Test zu verwerfen: Große Werte von X sprechen gegen die Nullhypothese, deshalb suchen wir den kleinsten Wert von k für den gilt: $P(X > k H_0) \leq 5\%$. Wir betrachten die 2000-0,08-Binomialverteilung, mit deren Hilfe wir diese bedingte Wahrscheinlichkeit nach oben abschätzen können. Wieder durch Ausprobieren erhält man : $P(X > 180 H_0) = 1 - P(X \leq 180 H_0) \approx 0,047 \leq 5\%$ und $P(X > 179 H_0) = 1 - P(X \leq 179 H_0) \approx 0,056 \geq 5\%$.</p> <p>Falls $X > 180$, könnte der zweite Mitarbeiter von Signifikanz (auf dem 5%-Niveau) sprechen, deshalb die Nullhypothese ablehnen und damit begründet behaupten, dass der Schwarzfahreranteil nicht einmal unter 8 % gesunken sei. Falls $102 < X \leq 180$ – also insbesondere bei den tatsächlich ermittelten 139 Schwarzfahrern – hätte keiner der beiden Kontrahenten ein signifikantes Ergebnis, und das Testergebnis ließe keine aus den Daten begründeten neuen Schlüsse zu. Alternativ ist wieder der Weg über die Annäherung mit der Normalverteilung möglich:</p>			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	<p>Es gilt $\mu = np = 2000 \cdot 0,08 = 160$ und $\sigma = \sqrt{147,2} \approx 12,13$.</p> <p>Weil auch hier $\sigma > 3$ (Laplace-Bedingung), können wir wieder die Binomialverteilung durch eine passende Normalverteilung approximieren:</p> $P(X > k) = 1 - P\left(\frac{X - \mu + 0,5}{\sigma} \leq \frac{k - \mu + 0,5}{\sigma}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{k - \mu + 0,5}{\sigma}\right).$ <p>Wir suchen den kleinsten Wert von $k \in \mathbb{N}$, für den $1 - \Phi\left(\frac{k - \mu + 0,5}{\sigma}\right) \leq 5\%$,</p> <p>d.h. den kleinsten Wert von k, für den $\Phi\left(\frac{k - \mu + 0,5}{\sigma}\right) \geq 95\%$, also</p> $\frac{k - \mu + 0,5}{\sigma} \geq 1,64, \text{ das ist } k = 180.$ <p>Beide könnten aber ihre Behauptungen abschwächen: Der erste, indem er behauptet, dass immerhin die Quote der Schwarzfahrer überhaupt gesunken sei und der andere, indem er behauptet, dass die Schwarzfahrerquote zumindest nicht kleiner als 0,06 sei. Es müssen dazu alle Argumentationen und Berechnungen wiederholt werden nur mit vertauschten Rollen von $p = 0,06$ und $p = 0,08$. (Praktisch heißt das lediglich, dass noch zweimal in der Tabelle nachgesehen werden muss, und dass zwei Ungleichungen nochmals umgestellt werden müssen).</p> <p>Man erhält:</p> <p>Falls $X \leq 140$ könnte nun der erste Mitarbeiter von Signifikanz (auf dem 5%-Niveau) sprechen, deshalb die Nullhypothese ablehnen und damit begründet behaupten, dass der Schwarzfahreranteil auf unter 8 % gesunken sei.</p> <p>Falls $X > 137$, könnte der zweite Mitarbeiter von Signifikanz (auf dem 5%-Niveau) sprechen, deshalb die Nullhypothese ablehnen und damit begründet behaupten, dass der Schwarzfahreranteil aber nicht unter 6 % gesunken sei.</p> <p>Das tatsächlich eingetretene Untersuchungsergebnis $X = 139$ bestätigt in diesem Sinne beide Mitarbeiter, und man kann mit guten Gründen annehmen, dass der tatsächliche Anteil an Schwarzfahrern tatsächlich irgendwo zwischen 6 % und 8 % liegt.</p>			
	Insgesamt 100 BWE	20	65	15