30.09.2009

Schriftliche Abiturprüfung

Mathematik

Hinweise und Beispiele zu den
zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben

Teil 1: Analysis

Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung

Impressum

Herausgeber:
Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung
Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung
Hamburger Straße 31, 22083 Hamburg

Referat: Mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Unterricht
Referatsleitung: Werner Renz
Fachreferent Mathematik: Winfried Euba

Redaktion:
Waltraut Barthel, Gymnasium Tonndorf
Manfred Dabelstein, Wirtschaftsgymnasium Harburg (H 10)
Dr. Janina Fehrmann, Hansa-Gymnasium Bergedorf
Stefan Gottuk, Gymnasium Hamm
Jochen W. Griese, Wirtschaftsgymnasium Harburg (H 10)
Ulrike Gutschner, Gelehrtenschule des Johanneums
Dr. Klaus Henning, Christianeum
Thea Hufschmidt, Sophie-Barat-Schule
Reinhard Janz, Technisches Gymnasium (G 16)
Gerd Johänning, Wirtschaftsgymnasium (H 2)
Dr. Ulrich Kotzott, Gymnasium Willhöden
Dr. Wolfgang Löding, Li-Q
Antje Loose, Charlotte-Paulsen-Gymnasium
Ursula Mersiowsky, Gymnasium Oberalster
Gerd Muhra, Gesamtschule Mümmelmannsberg
Kerstin Ottenberg, Gymnasium Kirchdorf/Wilhelmsburg
Renate Otter, Peter-Petersen-Schule
Annelies Paulitsch, Li-A und Gymnasium Osdorf
Helmut Springstein, Li-F und Gymnasium Othmarschen
Monika Thomas-Tschirschnitz, Hansa-Kolleg
Dieter Stahl, Alexander-von-Humboldt-Gymnasium
Karl-Heinz Wischnewski, Technisches Gymnasium (G 17)

Internet: http://www.mint-hamburg.de/abitur/

6. überarbeitete Auflage

Hamburg 2009

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Sehr geehrte Kolleginnen und Kollegen,

mit der zum August 2003 in Kraft tretenden *Ausbildungs- und Prüfungsordnung zum Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife* (APOAH) wurden zentrale Elemente in der schriftlichen Abiturprüfung eingeführt.

Die Abituraufgaben beziehen sich im Fach Mathematik auf Schwerpunkte, die den Schulen jeweils am Ende der Vorstufe für das Abitur dieses Jahrgangs von der Behörde für Bildung und Sport in einer eigenen Verwaltungsvorschrift zur Kenntnis gegeben werden.

In der Ihnen hier vorgelegten ergänzenden Handreichung, die die entsprechende Verwaltungsvorschrift ausführt, werden Ihnen Beispiele gezeigt, wie die Aufgaben für die schriftlichen Abiturprüfungen ab dem Jahre 2007 formuliert werden.

Die Aufgabenbeispiele entsprechen in den meisten Fällen der Ihnen bekannten Hamburger *Richtlinie für die Aufgabenstellung und Bewertung der Leistungen in der Abiturprüfung*. Die Arbeitsgruppe, die die Handreichung erstellte, hatte den Auftrag, Aufgabenbeispiele auf der Grundlage des neuen Rahmenplans Mathematik für die gymnasiale Oberstufe 2004 zu formulieren.

Die Aufgaben enthalten verbindlich definierte Arbeitsaufträge („Operatoren“); in den Erwartungshorizonten werden die Kriterien und die Anforderungen u. a. für eine „gute“ und für eine „ausreichende“ Leistung beschrieben. Beides dient dem Ziel, mehr Verbindlichkeit und Vergleichbarkeit zu schaffen.

Hinzu kommt, dass die *Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung* (EPA) für alle Prüfungsfächer derzeit überarbeitet werden. Für Mathematik liegen sie bereits vor. Wenn alle neuen EPA als KMK-Beschlüsse vorliegen, wird die oben genannte Hamburger Richtlinie überarbeitet und den jeweiligen EPA angepasst werden. Erst dann wird es für die Aufgabenarten und die Anforderungen vermutlich Veränderungen geben.

In der Hoffnung, dass die vorliegende Handreichung hilfreich für Sie und Ihre Unterrichtsarbeit ist, wünsche ich Ihnen und Ihren Schülerinnen und Schülern eine erfolgreiche Vorbereitung auf das Abitur.

Den Mitgliedern der Arbeitsgruppe, die diese Handreichung erstellte, möchte ich sehr herzlich für die geleistete intensive und zeitaufwendige Arbeit danken.

Werner Renz

1 Regelungen für die schriftliche Abiturprüfung

Die Fachlehrerin, der Fachlehrer

- erhält **sechs** Aufgaben – **I.1, I.2** (Schwerpunkt Analysis) und **II.1, II.2** (Schwerpunkt Lineare Algebra / Analytische Geometrie) und **III.1, III.2** (Schwerpunkt Stochastik),
- wählt aus genau zwei Bereichen **I und II** *oder* **I und III** genau **zwei** Aufgaben aus.

Die Abiturientin, der Abiturient

- erhält **die beiden** Aufgaben und bearbeitet diese,
- vermerkt auf der Reinschrift, welche Aufgabe sie/er bearbeitet hat,
- ist verpflichtet, die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben vor Bearbeitungsbeginn zu überprüfen (Anzahl der Blätter, Anlagen usw.).

Bearbeitungszeit:	Kurs auf grundlegendem Niveau: **240** Minuten Kurs auf erhöhtem Niveau: **300** Minuten Eine Vorbereitungs-, Lese- und Auswahlzeit von maximal 30 Minuten kann der Arbeitszeit vorgeschaltet werden. In dieser Zeit darf noch nicht mit der Lösung der Aufgaben begonnen werden.
Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar und nicht grafikfähig), Formelsammlung, Rechtschreiblexikon

Die in den zentralen schriftlichen Abituraufgaben verwendeten **Operatoren** (Arbeitsaufträge) werden im Anhang genannt und erläutert.

Grundlage der schriftlichen Abiturprüfung ist der geltende Rahmenplan in der Fassung von 2009. **Der inhaltliche Rahmen für die schriftliche Abiturprüfung wird durch die *Hinweise und Beispiele zu den zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben* festgelegt und konkretisiert**. Die wechselnden curricularen Vorgaben, Konkretisierungen und Schwerpunktsetzungen werden den Schulen jeweils im zweiten Semester der Vorstufe bekannt gegeben. Für die schriftliche Abiturprüfung können sie dem Heft *Schriftliche Abiturprüfung - Regelungen für die zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben* entnommen werden.

2 Anforderungsbereiche

Die Anforderungen in der Abiturprüfung unterscheiden sich nach der Art, der Komplexität und dem Grad der Selbstständigkeit der geforderten Leistung; sie verlangen unterschiedliche Arbeitsweisen. Zur Erhöhung der Transparenz und Vergleichbarkeit lassen sich drei Anforderungsbereiche beschreiben, ohne dass in der Praxis der Aufgabenstellung die drei Anforderungsbereiche immer scharf voneinander getrennt werden können. Daher ergeben sich bei der Zuordnung der Teilaufgaben zu Anforderungsbereichen Überschneidungen.

Die zentralen Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung ermöglichen Leistungen in den folgenden drei Anforderungsbereichen mit einem Schwerpunkt im Anforderungsbereich II:

Anforderungsbereich I

Der Anforderungsbereich I umfasst die Wiedergabe von Sachverhalten und Kenntnissen im gelernten Zusammenhang sowie die Beschreibung und Anwendung geübter Arbeitstechniken und Verfahrensweisen in einem wiederholenden Zusammenhang.

Im Fach Mathematik kann zum Anforderungsbereich I gehören:

- Bereitstellen von Definitionen, Sätzen und einfachen Beweisen
- Beschreiben eines einfachen Sachverhalts, eines bekannten Verfahrens oder eines standardisierten Lösungsweges
- Anfertigen von Skizzen auf eine aus dem Unterricht bekannte Weise; Skizzieren der Graphen von Grundfunktionen
- Ausführen von geübten Algorithmen wie z.B. Ableiten und Integrieren in einfachen Fällen, Lösen von einfachen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen nach eingeübten Verfahren
- Verwenden des Rechners als Werkzeug z.B. zum Zeichnen eines geeigneten Ausschnitts des Graphen einer Funktion, beim Lösen von Gleichungssystemen, beim Berechnen von Ableitungen und von Integralen
- Bestimmen der Extremwerte einer Funktion in Fällen, in denen das eingeübte Verfahren unmittelbar zum Ziel führt
- Feststellen der Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden oder Ebenen mit Hilfe eines durch Übung vertrauten Verfahrens
- Bestimmen von Geraden- und Ebenengleichungen bei Vorgabe einfacher und gewohnter Bedingungen
- Darstellen statistischer Daten und Ermitteln statistischer Kenngrößen in einfachen Fällen
- Bestimmen und Berechnen von Wahrscheinlichkeiten in einfachen, vom Unterricht her vertrauten Zusammenhängen

Anforderungsbereich II

Der Anforderungsbereich II umfasst das selbstständige Auswählen, Anordnen, Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang und das selbstständige Übertragen und Anwenden des Gelernten auf vergleichbare neue Zusammenhänge und Sachverhalte.

Im Fach Mathematik kann zum Anforderungsbereich II gehören:

- Veranschaulichen und Beschreiben von Zusammenhängen bei bekannten Sachverhalten mit Hilfe von Bildern, Texten und Symbolen
- Dokumentieren eines Lösungsweges in sachgerechter mathematischer Form
- Verfassen eines mathematischen Kurzaufsatzes in bekannten Zusammenhängen
- Ausführen von Beweisen, deren Beweisstruktur aus dem Unterricht bekannt ist
- Anwenden von zentralen Begriffen in Beispielen, die in ihrer Struktur einfach sind
- Interpretieren charakteristischer Eigenschaften einer Funktion anhand ihres Graphen
- Übersetzen eines Schaubildes in einen Funktionsterm oder eines Funktionsterms in eine Skizze
- Anpassen von Funktionen an vorgegebene Bedingungen, wenn ähnliche Vorgehensweisen aus dem Unterricht bekannt sind
- Durchführen vollständiger Fallunterscheidungen in überschaubaren Situationen
- gezieltes Verwenden des Rechners bei der Lösung komplexerer Probleme
- Übersetzen einer Ausgangssituation in ein geeignetes mathematisches Modell (z.B. Koordinatensystem, Funktionsterm, Gleichungssystem, Wahrscheinlichkeitsverteilung), wenn ähnliche Modellierungen aus dem Unterricht bekannt sind

- sachgerechtes und begründetes Argumentieren bei der Darstellung eines Modellansatzes oder bei der Auswahl eines Lösungsweges
- verständiges Anwenden der Beziehung zwischen Änderungsrate und Gesamtänderung in bekannten Situationen
- analytisches Beschreiben von geometrischen Objekten, wobei die sie bestimmenden Parameter erst aus anderen Bedingungen erschlossen werden müssen
- Vergleichen und Bewerten verschiedener Lösungsansätze in einem durch Übung bekannten Zusammenhang
- Analysieren und Modellieren stochastischer Prozesse in aus dem Unterricht bekannter Weise
- Durchführen eines aus dem Unterricht bekannten Verfahrens der beurteilenden Statistik
- Beschaffen, Strukturieren, Auswählen und Auswerten von Informationen zu einer überschaubaren Problemstellung in einer im Unterricht vorbereiteten Vorgehensweise
- Präsentieren von Arbeitsergebnissen in übersichtlicher, gut strukturierter Form

Anforderungsbereich III

Der Anforderungsbereich III umfasst das zielgerichtete Verarbeiten komplexer Sachverhalte mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Gestaltungen oder Deutungen, Folgerungen, Begründungen und Wertungen zu gelangen. Dabei wählen die Schülerinnen und Schüler aus den gelernten Arbeitstechniken und Verfahren die zur Bewältigung der Aufgabe geeigneten selbstständig aus, wenden sie in einer neuen Problemstellung an und beurteilen das eigene Vorgehen kritisch.

Im Fach Mathematik kann zum Anforderungsbereich III gehören:

- kreatives Übersetzen einer komplexeren Ausgangssituation in ein geeignetes mathematisches Modell, ohne dass dies in vergleichbaren Zusammenhängen geübt wurde
- planvolles, begründetes Nutzen und Bewerten von Informationen bei komplexeren oder offeneren Problemstellungen
- Auffinden eines Lösungsansatzes für Probleme, bei denen Kenntnisse aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik verbunden werden müssen, ohne dass dies in vergleichbaren Zusammenhängen geübt wurde
- Überprüfen und Bewerten der Vorgehensweise sowie Interpretieren und Beurteilen der Ergebnisse z.B. bei einer Modellierung oder beim Umgang mit Informationen
- Anwenden zentraler Begriffe und Vorgehensweisen in komplexeren Zusammenhängen
- Verallgemeinern eines Sachverhalts, der nur von Beispielen her bekannt ist
- Ausführen eines Beweises, zu dem eigenständige Beweisgedanken erforderlich sind

3 Liste der Operatoren

Mehr noch als bei dezentralen Aufgaben, die immer im Kontext gemeinsamer Erfahrungen der Lehrkräfte und Schüler mit vorherigen Klausuren stehen, müssen zentrale Prüfungsaufgaben für die Abiturientinnen und Abiturienten eindeutig hinsichtlich des Arbeitsauftrages und der erwarteten Leistung formuliert sein. Die in den zentralen schriftlichen Abituraufgaben verwendeten Operatoren (Arbeitsaufträge) werden in der folgenden Tabelle definiert und inhaltlich gefüllt. Entsprechende Formulierungen in den Klausuren der Studienstufe sind ein wichtiger Teil der Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler auf das Abitur.

Neben Definitionen und Beispielen enthält die Tabelle auch Zuordnungen zu den Anforderungsbereichen **I**, **II** und **III** (vgl. die *Richtlinie für die Aufgabenstellung und Bewertung der Leistungen in der Abiturprüfung*), wobei die konkrete Zuordnung auch vom Kontext der Aufgabenstellung abhängen kann und eine scharfe Trennung der Anforderungsbereiche nicht immer möglich ist.

Operatoren	Definitionen	Beispiele
Angeben, nennen **I**	Ohne nähere Erläuterungen und Begründungen, ohne Lösungsweg aufzählen	Geben Sie drei Punkte an, die in der Ebene liegen. Nennen Sie drei weitere Beispiele zu ...
Anwenden **I – II**	Einen bekannten Sachverhalt oder eine Handlungsanweisung, Formel, Vorschrift auf Elemente ihres jeweiligen Definitionsbereichs anwenden.	Wenden Sie das in Matrix L gegebene Populationsmodell auch auf den Bestand B an. Wenden Sie die Funktionsgleichung auch auf die gegebenen Zahlen an.
Begründen **II–III**	Einen angegebenen Sachverhalt auf Gesetzmäßigkeiten bzw. kausale Zusammenhänge zurückführen. Hierbei sind Regeln und mathematische Beziehungen zu nutzen.	Begründen Sie, dass die Funktion nicht mehr als drei Wendestellen aufweisen kann. Begründen Sie die Zurückweisung der Hypothese.
Berechnen **I**	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses.
Beschreiben **I–II**	Sachverhalt oder Verfahren in Textform unter Verwendung der Fachsprache in vollständigen Sätzen darstellen (hier sind auch Einschränkungen möglich: „Beschreiben Sie in Stichworten“)	Beschreiben Sie den Bereich möglicher Ergebnisse. Beschreiben Sie, wie Sie dieses Problem lösen wollen, und führen Sie danach Ihre Lösung durch.
Bestätigen **I–II**	Eine Aussage oder einen Sachverhalt durch Anwendung einfacher Mittel (rechnerischer wie argumentativer) sichern. Der Anspruch liegt deswegen unterhalb von „Zeigen“ oder „Beweisen“.	Bestätigen Sie, dass die gegebene Funktion eine Stammfunktion zur Ursprungsfunktion ist. Bestätigen Sie die Parallelität der beiden Ebenen. Bestätigen Sie, dass in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit unter 0,1 liegt.
Bestimmen, ermitteln **II–III**	Einen Lösungsweg darstellen und das Ergebnis formulieren (die Wahl der Mittel kann unter Umständen eingeschränkt sein)	Ermitteln Sie grafisch den Schnittpunkt. Bestimmen Sie aus diesen Werten die Koordinaten der beiden Punkte.
Beurteilen **III**	Zu einem Sachverhalt ein selbstständiges Urteil unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren	Beurteilen Sie, welche der beiden vorgeschlagenen modellierenden Funktionen das ursprüngliche Problem besser darstellt.
Beweisen, widerlegen **III**	Beweisführung im mathematischen Sinne unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischer Schlüsse und Äquivalenzumformungen, ggf. unter Verwendung von Gegenbeispielen	Beweisen Sie, dass die Gerade auf sich selbst abgebildet wird.
Entscheiden **II**	Bei Alternativen sich begründet und eindeutig auf eine Möglichkeit festlegen	Entscheiden Sie, für welchen der beiden Beobachter der Aufschlagpunkt näher ist. Entscheiden Sie, welche der Ihnen bekannten Verteilungen auf die Problemstellung passt.

Operatoren	**Definitionen**	**Beispiele**
Ergänzen, vervollständigen **I**	Tabellen, Ausdrücke oder Aussagen nach bereits vorliegenden Kriterien, Formeln oder Mustern füllen.	Ergänzen Sie die Tabelle der Funktionswerte. Vervollständigen Sie die Zeichnung mit den in der Aufgabestellung gegebenen Punkten.
Erstellen **I**	Einen Sachverhalt in übersichtlicher, meist fachlich üblicher oder vorgegebener Form darstellen	Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Funktion.
Herleiten **II**	Die Entstehung oder Ableitung eines gegebenen oder beschriebenen Sachverhalts oder einer Gleichung aus anderen oder aus allgemeineren Sachverhalten darstellen	Leiten Sie die gegebene Formel für die Stammfunktion her.
(Re-) Interpretieren **II–III**	Die Ergebnisse einer mathematischen Überlegung rückübersetzen auf das ursprüngliche Problem	Interpretieren Sie: Was bedeutet Ihre Lösung für die ursprüngliche Frage?
Skizzieren **I–II**	Die wesentlichen Eigenschaften eines Objektes grafisch darstellen (auch Freihandskizze möglich)	Skizzieren Sie die gegenseitige Lage der drei Körper.
Untersuchen **II**	Sachverhalte nach bestimmten, fachlich üblichen bzw. sinnvollen Kriterien darstellen	Untersuchen Sie die Funktion … Untersuchen Sie, ob die Verbindungskurve ohne Knick in die Gerade einmündet.
Vergleichen **II–III**	Nach vorgegebenen oder selbst gewählten Gesichtspunkten Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede ermitteln und darstellen	Vergleichen Sie die beiden Vorschläge … nach der von den Kurven eingeschlossenen Fläche.
Zeichnen, grafisch darstellen **I–II**	Eine hinreichend exakte grafische Darstellung anfertigen	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion. Stellen Sie die Punkte und Geraden im Koordinatensystem mit den gegebenen Achsen dar.
Zeigen, nachweisen **II–III**	Eine Aussage, einen Sachverhalt nach gültigen Schlussregeln, Berechnungen, Herleitungen oder logischen Begründungen bestätigen	Zeigen Sie, dass das betrachtete Viereck ein Drachenviereck ist.
Zuordnen **I–II**	Ohne tiefer gehende Erläuterung eine Verbindung zwischen zwei Listen herstellen	Ordnen Sie die Graphen den gegebenen Gleichungen zu.

4 Aufgaben

Die folgenden Aufgaben sind Beispiele für zentrale schriftliche Abiturprüfungen im Fach Mathematik zu den oben genannten curricularen Vorgaben, Konkretisierungen und Schwerpunktsetzungen.

Außer der Aufgabenstellung enthalten die Beispiele den Erwartungshorizont, Hinweise zu den Operatoren mit Bezug zu den drei Anforderungsbereichen und Bewertungshinweise:

Für die Bewertung der Gesamtleistung der schriftlichen Abiturprüfung gilt die folgende Zuordnungstabelle:

Erreichte Gesamtpunktzahl	Erreichte Gesamtleitung in Prozent	Bewertung in Punkten
≥ 190 BWE	≥ 95 %	15
≥ 180 BWE	≥ 90 %	14
≥ 170 BWE	≥ 85 %	13
≥ 160 BWE	≥ 80 %	12
≥ 150 BWE	≥ 75 %	11
≥ 140 BWE	≥ 70 %	10
≥ 130 BWE	≥ 65 %	9
≥ 120 BWE	≥ 60 %	8
≥ 110 BWE	≥ 55 %	7
≥ 100 BWE	≥ 50 %	6
≥ 90 BWE	≥ 45 %	5
≥ 80 BWE	≥ 40 %	4
≥ 66 BWE	≥ 33 %	3
≥ 52 BWE	≥ 26 %	2
≥ 38 BWE	≥ 19 %	1
< 38 BWE	< 19 %	0

Bewertungskriterien für die Noten „gut“ und „ausreichend“

Die Note „gut“ (11 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75%) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut“ beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht wurden.

Die Note „ausreichend“ (5 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet worden sein.

4.1 Kurs auf grundlegendem Niveau

Aufgabe 1 Pflanzschalen

Aufgabe aus der schriftlichen Prüfung 2008.

Eine Glashütte stellt eine Serie hochwertiger großer farbiger Pflanzschalen her, die in der Form alle ähnlich sind, etwa so wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt.

Die einzelnen Modelle der Serie unterscheiden sich aber in der Breite ihrer Silhouette (Seitenansicht).

Diese Seitenansichten lassen sich gut beschreiben durch Funktionen f_a mit

$$f_a(x) = a - \frac{15}{x^2}, \quad a > 0.$$

Für verschiedene Werte von a ergeben sich unterschiedlich breite Schalen.
Dabei ist der Boden immer **bei $y = 0$**, und der obere Rand ist **bei $y = 5$** .
Eine Einheit entspricht dabei 10 cm in der Realität.

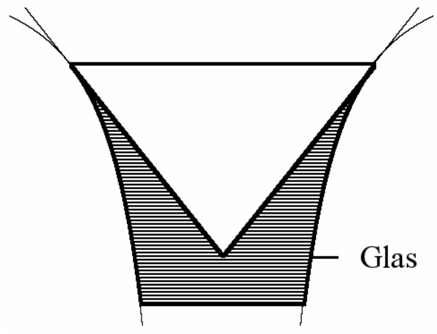
Drehen Sie das Blatt „Anlage 1“ um 90° im Uhrzeigersinn. Sie sehen nun für drei verschiedene a die Seitenansichten mit in x- und in y-Richtung gleich langen Einheiten. Die waagerechten Linien in der Zeichnung markieren die Werte $y = 0$ und $y = 5$.

a) In der Anlage 1 sind die Graphen für $a = \frac{11}{2}$, $a = \frac{20}{3}$ und $a = 8$ eingezeichnet.
Ergänzen Sie eine passende Achsenbeschriftung und ordnen Sie den drei Graphen die zugehörigen Werte von a begründet zu. **15 P**

b) Berechnen Sie den Wert für a, bei dem der Durchmesser der Schale am oberen Rand genau 4 Einheiten beträgt. **10 P**

c) Begründen Sie, dass die Beschreibung der Pflanzschalen für $a < 5$ nicht sinnvoll ist.
Hinweis: Überlegen Sie, wie groß der Radius der Schale am oberen Rand sein kann. **10 P**

d) Die Pflanzschalen werden draußen vor öffentlichen Gebäuden aufgestellt und müssen besonders standfest sein. Deshalb sollen sie aus massivem Glas hergestellt werden, und der Innenraum soll kegelförmig sein.
Die nebenstehende Abbildung zeigt das Prinzip.
Die eingezeichneten geraden Mantellinien des Innenkegels (Begrenzung des Innenkegels) verlaufen am oberen Rand tangential zur Randkurve.
Bestätigen Sie, dass das Volumen des Innenkegels für $a = 7$ etwa 31 Liter beträgt. **25 P**



e) Für $a = 7$ kann das Gesamtvolumen (Glas + Innenkegel) berechnet werden durch $15\pi\int_0^5 \frac{1}{7-x}\,dx$.

Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich für $a = 7$ durch das massive Glas das Innenvolumen der Pflanzschale etwa auf die Hälfte reduziert.

Hinweise:
Zeigen Sie dazu zuerst, dass $G(x) = -\ln(7-x)$ im abgeschlossenen Intervall zwischen 0 und 5 eine Stammfunktion von $g(x) = \frac{1}{7-x}$ ist.

Dabei darf als bekannt vorausgesetzt werden, dass $\frac{1}{x}$ die Ableitung von $\ln x$ ist. **15 P**

f) Begründen Sie, dass die in d) beschriebene Pflanzschalenkonstruktion mit dem massiven Glaskörper nicht mehr sinnvoll ist, wenn a zu groß wird. **10 P**

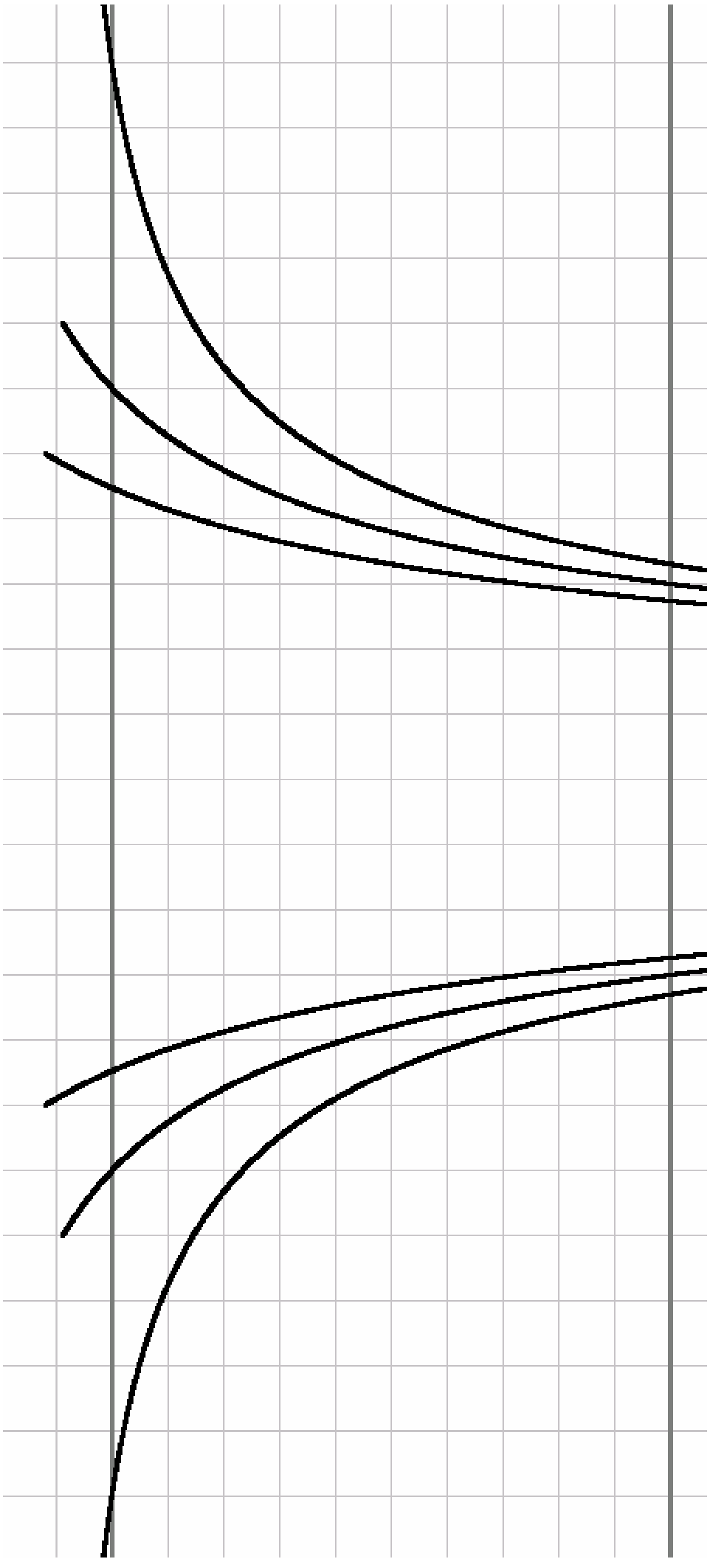
g) Die Pflanzschalen sollen zum Verkauf auf den Markt gebracht werden. Für eine bestimmte Ausführung der Pflanzschalen lassen sich die Produktionskosten K (in €) in Abhängigkeit von der Stückzahl x durch folgende Gleichung beschreiben:

$$K(x) = 0{,}05x^3 - 1{,}5x^2 + 25x + 200\,, \quad x > 0\,.$$

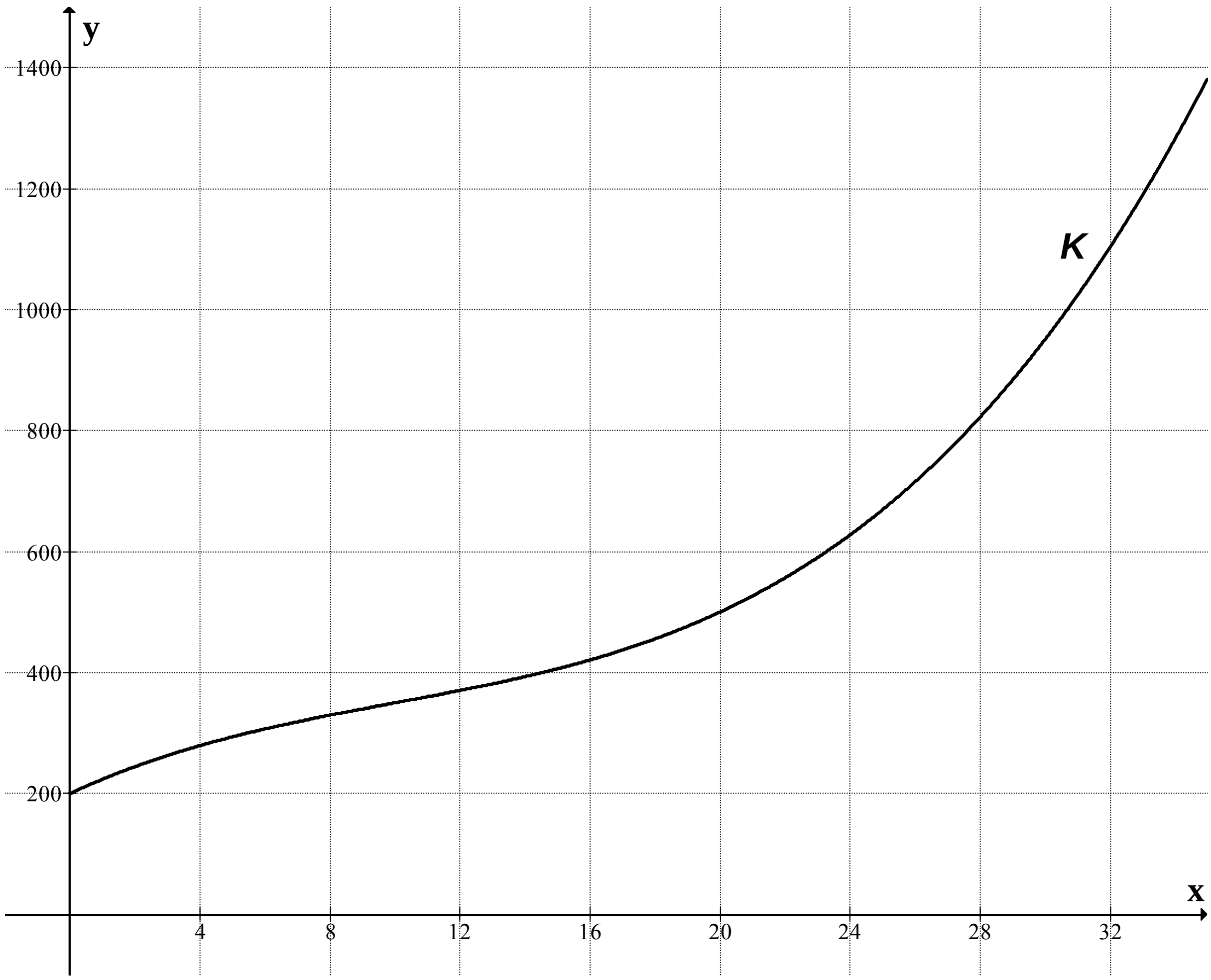
Der Graph der Funktion K ist in Anlage 2 dargestellt.

Begründen Sie, warum ein (konstanter) Mindestpreis von 25 € pro Stück nicht unterschritten werden darf, da sonst nur mit Verlust produziert werden kann. **15 P**

Anlage 1 **zur Aufgabe „Pflanzschale“, Aufgabenteil a).**



Anlage 2 zur Aufgabe „Pflanzschale“, Aufgabenteil g).



Aufgabe 2 Medikation

Aufgabe aus der schriftlichen Prüfung 2008.

Nach Einnahme eines Medikamentes kann man dessen Konzentration im Blut eines Patienten messen. Für die ersten 6 Stunden beschreibt die Funktion f mit der Gleichung $f(t) = 10t \cdot e^{-0,5t}$ die im Blut vorhandene Menge des Medikamentes in Milligramm pro Liter in Abhängigkeit von der Zeit *t*. Nach 6 Stunden erfolgt der Abbau näherungsweise linear (siehe Anlage).

a) Berechnen Sie die maximale Konzentration im Blut und den Zeitpunkt, zu dem sie vorhanden ist. **20 P**

b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament am stärksten abgebaut wird. **10 P**

c) Der lineare Abbau nach 6 Stunden wird näherungsweise durch die Tangente *k* am Graphen von *f* im Punkt $(6 \mid f(6))$ beschrieben. Bestimmen Sie die Geradengleichung der Tangente und damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament unter dieser Annahme vollständig abgebaut ist. **15 P**

d) Beschreiben Sie, wie Sie die mittlere Konzentration des Medikamentes bis zum vollständigen Abbau berechnen würden. Bestimmen Sie eine grobe Abschätzung dieser mittleren Konzentration, z. B. mithilfe der Grafik in der Anlage. **15 P**

e) Ein Patient nimmt das Medikament 4 Stunden nach der ersten Einnahme in gleicher Dosierung ein weiteres Mal ein. Nehmen Sie in einem vereinfachenden Modell an, dass sich die Konzentrationen im Blut dieses Patienten addieren und dass der Abbau (und damit auch der Übergang in die „lineare Zone“) für beide Medikationen unabhängig voneinander erfolgt.

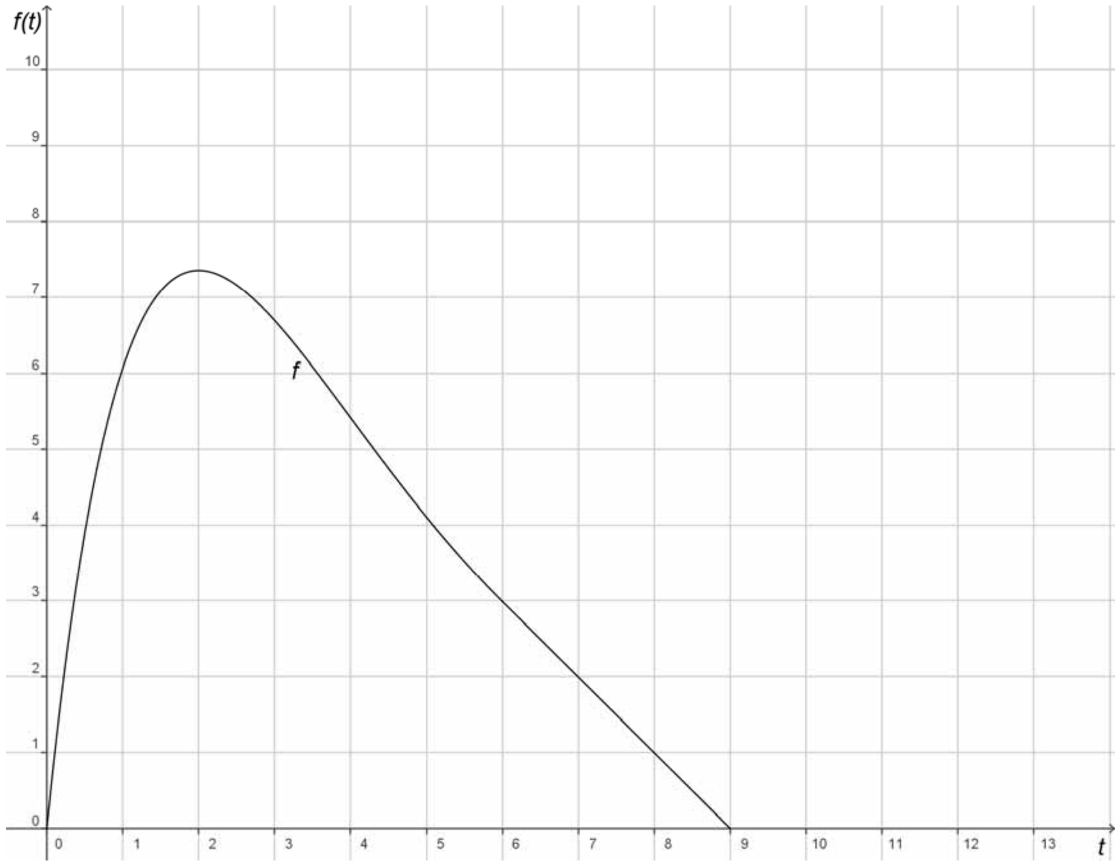
Skizzieren Sie zur Grafik in der Anlage die Darstellung der Gesamtkonzentration bis zum vollständigen Abbau nach dem eben beschriebenen Modell. **15 P**

f) Ein Patient muss mit starken Nebenwirkungen rechnen, wenn die Konzentration des Medikamentes im Blut 10 Milligramm pro Liter übersteigt.
Entscheiden Sie, ob der Patient aus Aufgabenteil e) gefährdet ist. **10 P**

Um das Medikament in seiner Wirksamkeit zu verbessern, verändert der Hersteller seine Zusammensetzung. Die Konzentration des Medikamentes im Blut wird wieder durch eine Funktion der Form $g(t) = a \cdot t \cdot e^{-b \cdot t}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ beschrieben. *t* ist wiederum die Zeit in Stunden nach der Einnahme und $g(t)$ wird in der Einheit $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ (Milligramm pro Liter) gemessen.

g) Bestimmen Sie die Konstanten *a* und *b*, wenn die Konzentration genau vier Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert von 10 $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ erreichen soll. **15 P**

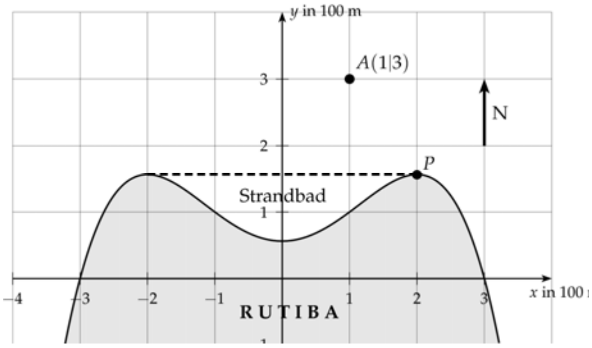
Anlage zur Aufgabe „Medikation“



Aufgabe 3 Seebad Rutiba

Aufgabe aus der schriftlichen Prüfung 2009.

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Nordküste der künstlich angelegten Insel Rutiba (1 LE entspricht 100 m). Direkt am Strand führt eine Uferstraße (durchgezogene Linie) entlang.



Rutiba hat ein Strandbad, das durch eine Absperrkette von der offenen See getrennt ist (gestrichelte Linie).

Die Uferstraße ist durch die Funktion f mit

$$f(x) = -\frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{2} + \frac{9}{16}, \quad x \in [-4;4],$$

gegeben.

Der Nordküste vorgelagert ist ein Felsen A, der als Anlegestelle für Ausflugsdampfer dient. Diese Anlegestelle ist bisher nur durch eine Bootsverbindung von der östlichen Spitze der Insel (Punkt P) zu erreichen.

a) Bestätigen Sie: P ist ein Maximum der Funktion f mit den Koordinaten $P\left(2\left|\frac{25}{16}\right.\right)$.

Berechnen Sie die Länge der Absperrkette und die breiteste Stelle des Strandbades in Nord-Süd-Richtung. **(15P)**

b) Bestimmen Sie die Entfernung, die ein Boot zwischen der Insel (P) und der Anlegestelle (A) zurücklegen muss und den Winkel, unter dem es (gegen die Nordrichtung) fahren muss. **(10P)**

Da das Strandbad aufgrund gefährlicher Strömungen häufig für den Badebetrieb gesperrt werden musste, soll es nun zu einem neuen geschützten Badesee umgebaut werden. Dazu liegen der Planungskommission zwei Entwürfe vor (siehe Anlage).
Bei beiden Entwürfen wird die bisherige Uferstraße über einen Damm umgeleitet. Dadurch entsteht jeweils ein großer Badesee.

Im ersten Entwurf (**Plan 1**) soll der Dammverlauf die Form einer quadratischen Parabel mit folgender Gleichung haben:

$$h(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{45}{16}.$$

c) Bestimmen Sie die Punkte, bei denen die alte Uferstraße nach **Plan 1** in den neuen Damm übergeht und die Fläche des dadurch entstehenden Badesees. **(25P)**

Im zweiten Entwurf (**Plan 2**) kann der Verlauf des Damms durch eine trigonometrische Funktion g beschrieben werden, die zwei Tiefpunkte genau an den Hochpunkten der Funktion f hat.
Der Badesee wird mit dieser Funktion an der breitesten Stelle (in Nord-Süd-Richtung) genau doppelt so breit.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion g und begründen Sie, dass der Straßenverlauf knickfrei verlegt werden kann. **(25P)**

Kontrollergebnis: $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + \frac{33}{16}$.

Der Bürgermeister von Rutiba fordert für die Fläche des neuen Badesees eine Mindestgröße von 45 000 m^2.

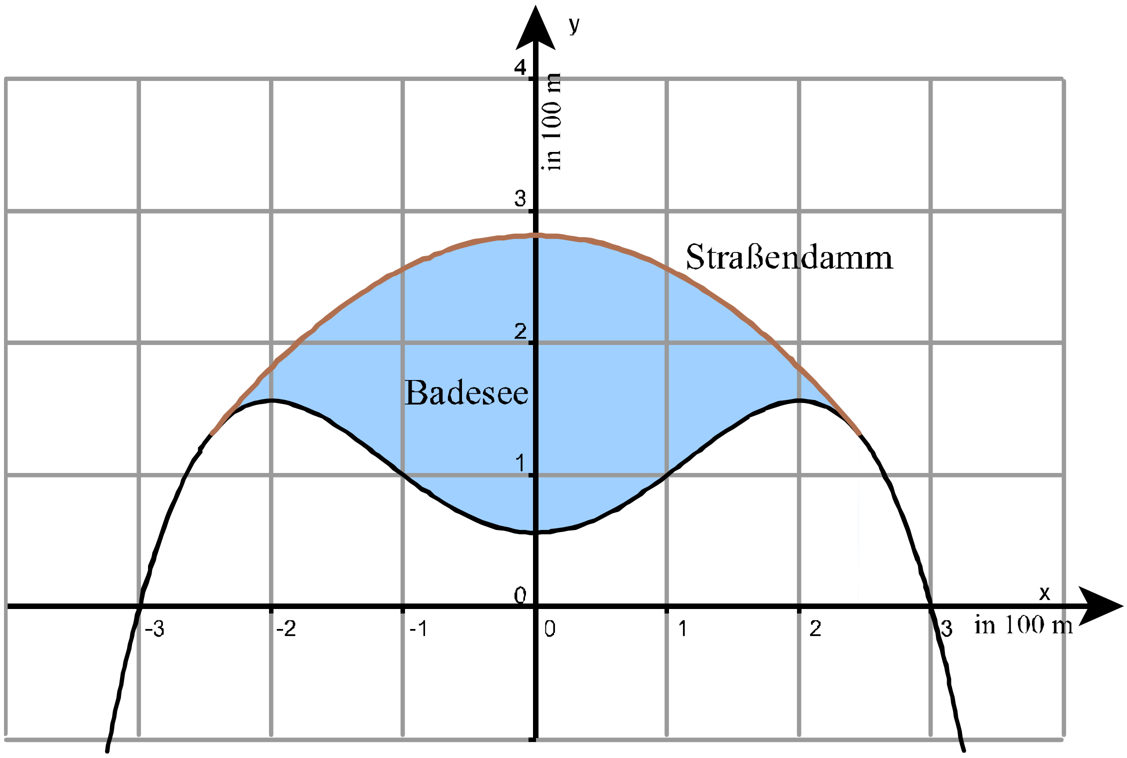
e) Zeigen Sie, dass G mit $G(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + \frac{33}{16}x$ eine Stammfunktion von g ist und untersuchen Sie, ob die Fläche des Badesees nach **Plan 2** die Forderung des Bürgermeisters erfüllt. **(10P)**

In dem Entwurf nach **Plan 1** soll eine Seebrücke von der Anlegestelle (A) zum neuen Damm gebaut werden. Aus Kostengründen soll die Seebrücke möglichst kurz sein.

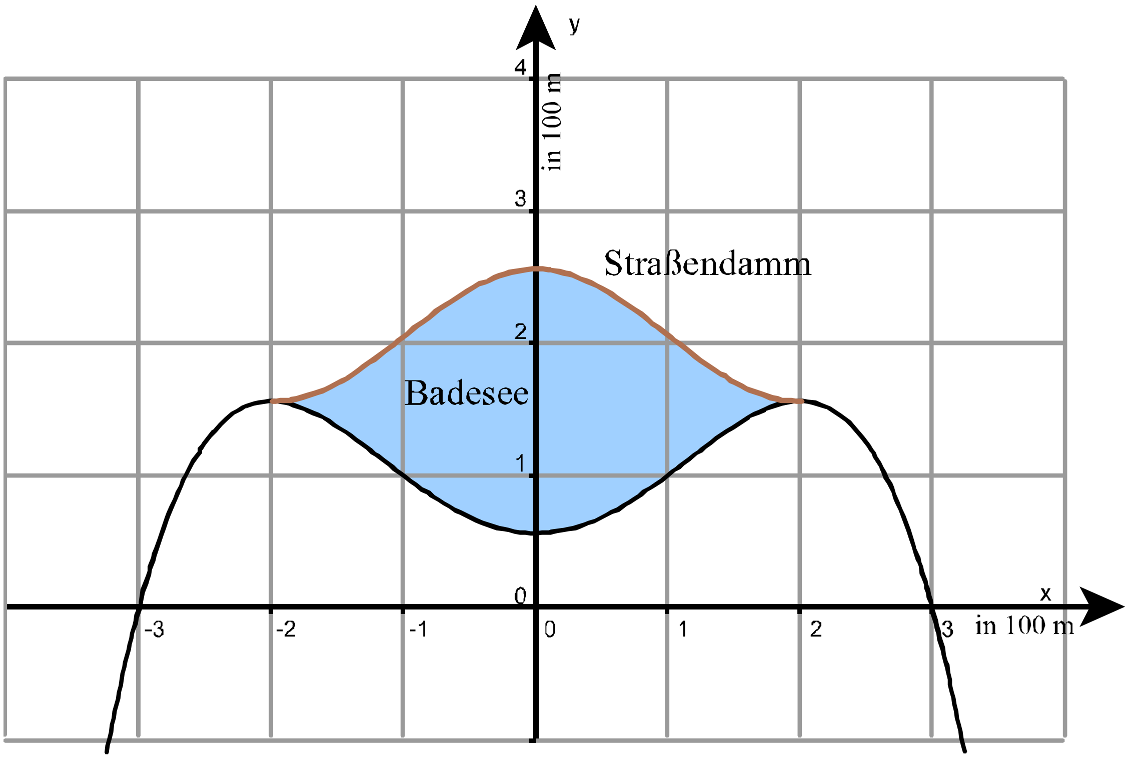
f) Nach ersten Berechnungen soll die Brücke vom Punkt A aus etwa im Punkt $Q(0{,}845 \mid 2{,}634)$ (die Koordinaten von Q sind auf drei Nachkommastellen gerundet!) auf den Damm treffen.
Bestätigen Sie, dass der Punkt Q auf dem Graphen von h liegt.
Zeigen Sie, dass der Damm im Punkt Q am dichtesten zur Anlegestelle A liegt. **(15P)**

Anlage zur Aufgabe „Rutiba“

Plan 1:



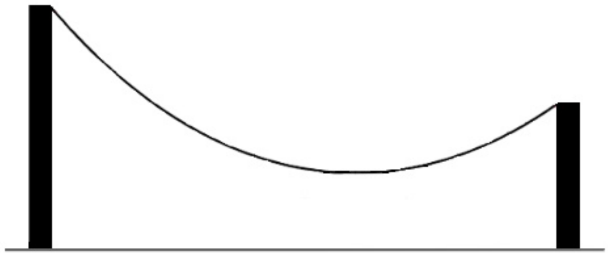
Plan 2:



Aufgabe 4 Seilbahn

Aufgabe aus der schriftlichen Prüfung 2009.

In einem Freizeitpark soll auf dem Abenteuerspielplatz eine Seilbahn gebaut werden. Der Freizeitparkbetreiber übergibt diese Aufgabe einem Architektenbüro seines Vertrauens.



Das Seil soll zwischen zwei Pfeilern gespannt werden, die einen Abstand von 50 m haben. Wenn sich ein Mensch an das Seil hängt, darf er den Boden nicht berühren.

Der Architekt geht davon aus, dass für diese Seilbahn das durchhängende Seil (ohne Belastung) durch die Funktion f mit folgender Gleichung beschrieben werden kann:

$$f(x) = 15 \cdot e^{\frac{1}{30}x-1} + 15 \cdot e^{-\frac{1}{30}x+1} - 25\,,\ x \in [0;50].$$

Das Seil verläuft in Richtung der positiven x-Achse, die im ebenen Erdboden unter der Seilbahn liegt.

a) Der erste Pfeiler steht mit seinem Fuß an dem Punkt $(0\,|\,0)$. Im Abstand von 50 m soll der zweite Pfeiler aufgestellt werden. Berechnen Sie die notwendige Höhe der zwei Pfeiler. **(10P)**
Bemerkung: beide Pfeiler liegen im Koordinatensystem parallel zur y-Achse.

b) Berechnen Sie die Steigung des Seiles in den beiden Aufhängepunkten. **(10P)**

c) Bei Belastung hängt das Seil höchstens 1 m durch. Bestätigen Sie, dass dann ein Mensch von 2 m Länge an jeder Stelle des Seils hängen kann, ohne den Boden zu berühren. **(15P)**
Hinweis: Eine Überprüfung mit der zweiten Ableitung ist nicht notwendig.

d) Zeichnen Sie den Graphen von f und die beiden Pfeiler in das beigefügte Koordinatensystem ein. **(10P)**

Der Assistent des Architekten überlegt sich, dass der Verlauf des Seiles näherungsweise auch durch eine quadratische Funktion p beschrieben werden kann. Diese Funktion p muss natürlich dieselben Aufhängepunkte wie die Funktion f haben und soll auch durch den Punkt $(30\,|\,5)$ verlaufen.

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel p. Benutzen Sie dazu die Aufhängepunkte $(0\,|\,21{,}3)$ und $(50\,|\,11{,}9)$. **(20P)**

Zur Kontrolle: $p(x) = \frac{533}{30000}x^2 - \frac{3229}{3000}x + 21{,}3 = 0{,}0177\overline{6}x^2 - 1{,}076\overline{3}x + 21{,}3$.

Der Assistent behauptet, dass sich die beiden Graphen praktisch kaum unterscheiden. Das soll überprüft werden.

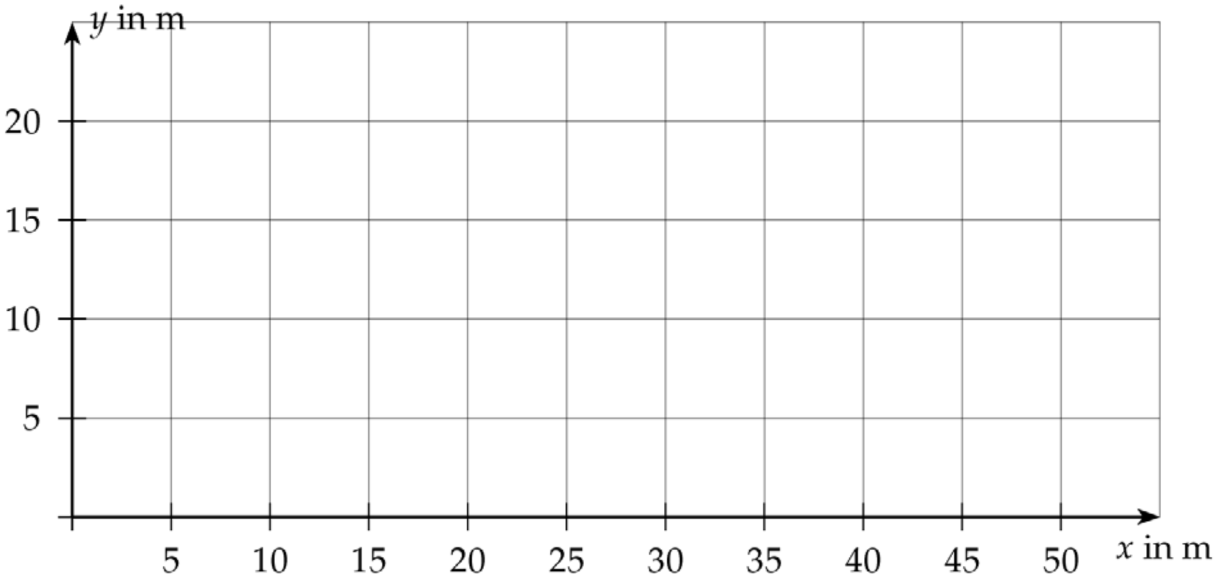
f) • Zeigen Sie zunächst, dass F mit $F(x) = 450 \cdot e^{\frac{1}{30}x-1} - 450 \cdot e^{-\frac{1}{30}x+1} - 25 \cdot x$ eine Stammfunktion von f ist, und bestimmen Sie eine Stammfunktion von p.

Hinweis: Sie können voraussetzen, dass die beiden Graphen außer den Aufhängepunkten und $(30|5)$ keine weiteren Punkte gemeinsam haben.

• Bestimmen Sie den **durchschnittlichen** Unterschied der beiden Funktionen in den Teilbereichen vom Start bis 30 m und für den zweiten Teil der Seilbahn von 30 m bis 50 m. **(25P)**

g) Vergleichen Sie nun den durchschnittlichen Unterschied zwischen f und p getrennt für die beiden oben genannten Bereiche und beurteilen Sie die Behauptung des Assistenten. **(10P)**

Anlage zur Aufgabe „Seilbahn“



Aufgabe 5 Farbenproduktion

Aufgabe aus der schriftlichen Abiturprüfung Hamburg 2005.

Ein kleines Unternehmen produziert Farben für die Bauindustrie. Alle in der Aufgabe genannten Daten beziehen sich auf einen Produktionszeitraum von einem Monat.

a) Aus den Daten einer Marktanalyse ist bekannt, dass der erzielbare Preis in Abhängigkeit von der zu verkaufenden Menge *x* durch die folgende Funktion *p* beschrieben werden kann:

$$p: x \to -62 \cdot x + 4092 \quad \text{bzw.} \quad p: x \to -62 \cdot (x-66) \text{ mit } x \in [0;66].$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Erlösfunktion *E* und zeigen Sie, dass *E* ein Maximum annimmt, wenn die produzierte Menge 33 Mengeneinheiten beträgt.

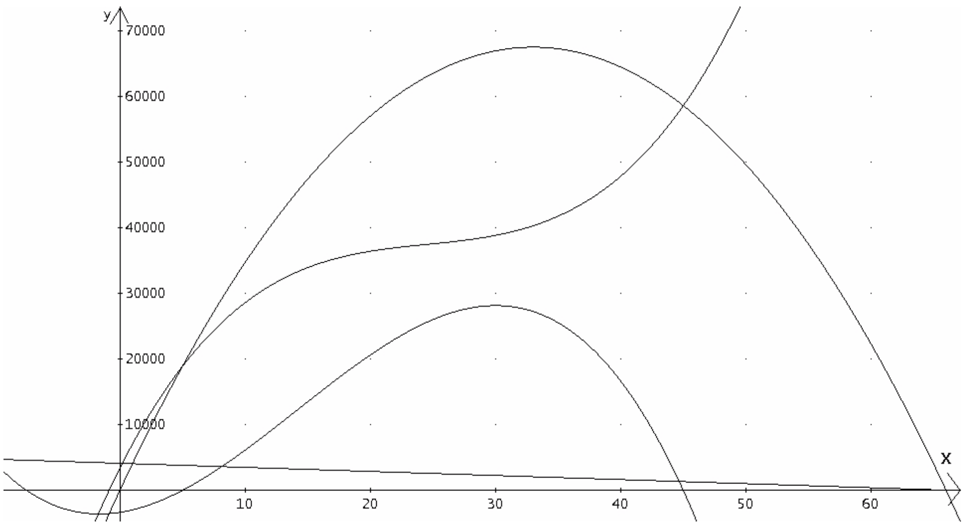
b) Die Gesamtkosten für die Herstellung der Farben hängen von der zu produzierenden Menge *x* ab und werden beschrieben durch eine Kostenfunktion *K*. *K* lässt sich mit hinreichender Genauigkeit angeben durch:

$$K: x \to 2x^3 - 147x^2 + 3792x + 3375$$

Zeigen Sie, dass *K* keine Extremstellen besitzt.
Erläutern Sie die Bedeutung dieser Aussage für den Verlauf des Graphen von *K*.
Interpretieren Sie dies im Sachkontext.

Der Gewinn *G* in Abhängigkeit von der abgesetzten Menge *x* ist die Differenz aus dem Erlös *E* und den entstandenen Gesamtkosten *K*. Die möglichen Produktionsmengen, bei denen das Unternehmen keinen Verlust macht, für die der Gewinn also nicht negativ ist, bilden die so genannte **Gewinnzone**.

c) Die nachfolgende Darstellung zeigt die vier Graphen der Funktionen *p, E, K* und *G.* Schreiben Sie die zugehörigen Funktionsnamen an die einzelnen Graphen.



d) Aufgrund verschiedener Produktionsmengen aus der Vergangenheit ist der Unternehmensleitung bekannt, dass mit Gewinn produziert wird, wenn die hergestellten Mengen zwischen 5 und 45 Mengeneinheiten liegen. Ferner ist bekannt, dass der Gewinn bei einer Produktion von 30 Mengeneinheiten maximal ist.
Aus der Abbildung kann man erkennen, dass diese Aussagen grob zutreffen.
Zeigen Sie, dass für die Gleichung der Gewinnfunktion *G* gilt:

$$G(x) = -2x^3 + 85x^2 + 300x - 3375\,.$$

Zeigen Sie durch Rechnungen, dass die beiden Aussagen für die Funktion *G* genau zutreffen, und berechnen Sie den maximalen Gewinn.

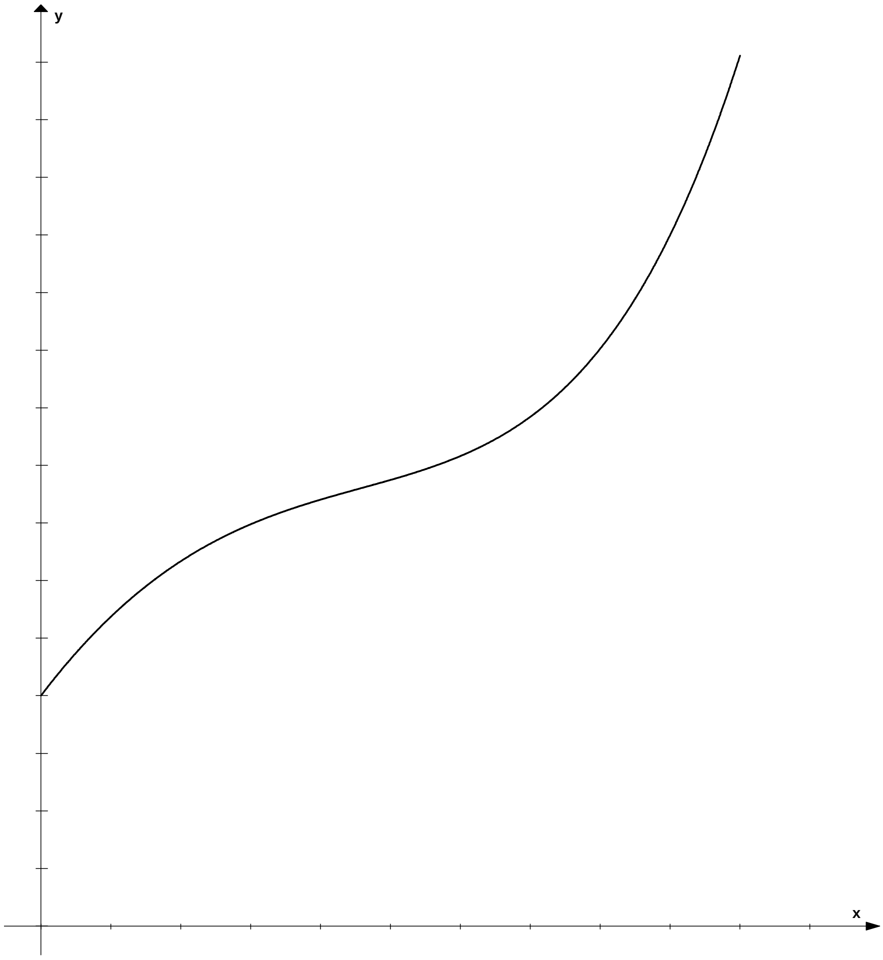
e) Den Wert $K(0)$ bezeichnet man als **Fixkosten**. Auf Grund eines neuen Pachtvertrages für das Firmengrundstück steigen die Fixkosten des Unternehmens von 3375 Geldeinheiten auf 4000 Geldeinheiten. In der Firmenleitung entsteht eine Diskussion über die Auswirkungen dieser Veränderung.
Ein Firmenmitglied behauptet, dass man nach wie vor 30 Mengeneinheiten produzieren sollte, um den Gewinn zu maximieren. Ist diese Aussage richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 Wetterstation

Aufgabe aus der schriftlichen Abiturprüfung Hamburg 2005.

In einer Wetterstation wird die Aufzeichnung eines Niederschlagmessgeräts vom Vortag (im Zeitraum von 0 Uhr bis 20 Uhr) ausgewertet. Das Regenmessgerät besteht aus einem nach oben offenen zylinderförmigen Gefäß mit einer Grundfläche von 1 m^2. Die Wassermenge wird vom Gerät automatisch aufgezeichnet.

Es folgt eine Aufzeichnungsskizze der Wetterstation. Der Graph zeigt die Wassermenge im Gefäß in Abhängigkeit von der Zeit in Stunden (x-Achse: 1 Einheit entspricht 2 Stunden).



a) Interpretieren Sie den Graphen im Hinblick auf folgende Fragen für den Zeitraum von 0 bis 20 Uhr:
Wann hat es geregnet?
In welchem Zeitraum hat es stark, in welchem Zeitraum schwach geregnet?

Die Niederschlagsmenge wird in Millimetern oder aber in Litern pro Quadratmeter angegeben.

b) Zeigen Sie, dass die aufgefangene Niederschlagsmenge von 1 Liter Wasser ein Ansteigen des Wasserstands im Gefäß von 1mm bedeutet.
(Dieses Messgerät ermöglicht also beide Angaben für die Niederschlagsmenge.)

Die Kurve in der Aufzeichnungsskizze der Wetterstation entspricht dem Graphen der Funktion *f* mit

$$f(x)=80e^{0,1x}-x^2-40\text{, für } x\in[0;20].$$

c) Tragen Sie die fehlenden Skalen auf den Achsen ein.
Berechnen Sie, wie viele Liter Wasser zwischen 0 und 20 Uhr in das Gefäß gefallen sind.
Zeichnen Sie die Gerade durch den Anfangs- und Endpunkt der Kurve und interpretieren Sie die Bedeutung dieser Geraden im Sachzusammenhang der Aufgabe.

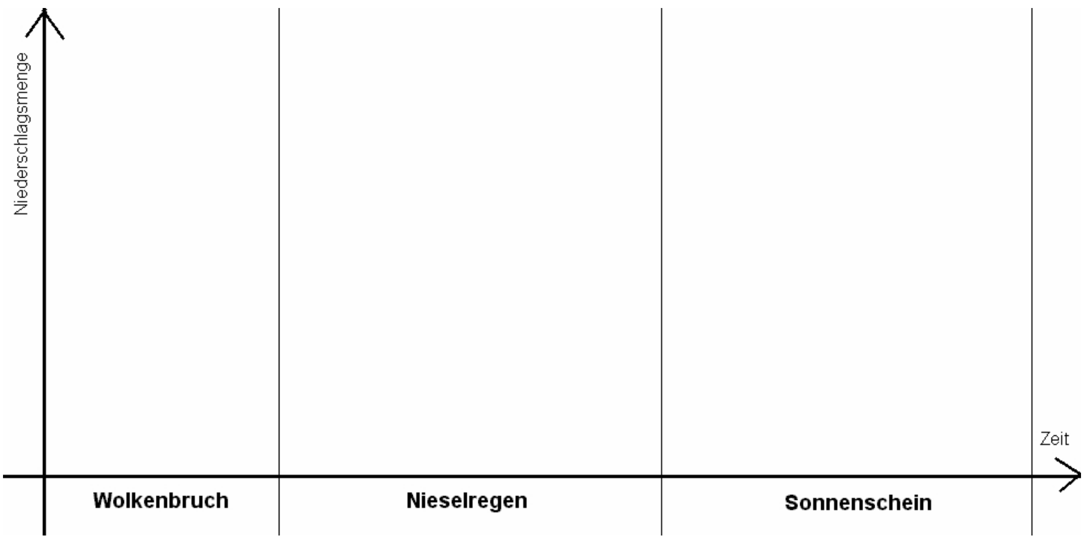
d) Untersuchen Sie *f* auf Wendestellen im betrachteten Intervall.

e) Interpretieren Sie die Bedeutung der 1. Ableitung und die Bedeutung der Wendestelle im Sachkontext der Aufgabe.

f) Wie könnte man den Begriff „momentane Regenstärke“ definieren. Wie stark hat es nach ihrer Definition um 18 Uhr geregnet? Wie groß war die minimale momentane Regenstärke? Geben Sie dazu auch eine sinnvolle Maßeinheit an.
Berechnen Sie auch mit Hilfe der Integralrechnung die mittlere Regenstärke in dem betrachteten Zeitintervall von 0 bis 20 Uhr. Beachten Sie, dass man dabei nicht ernsthaft rechnen muss.

g) Skizzieren Sie in der nachfolgenden Darstellung den prinzipiellen Verlauf des Graphen für die Aufzeichnung eines Niederschlagsmessgerätes, der folgende Wettersituation hinsichtlich der Niederschlagsmenge beschreibt:

Wolkenbruch – Nieselregen – Sonnenschein bei wolkenlosem Himmel.
(Ablauf in der angegebenen Reihenfolge und ohne zeitliche Unterbrechungen)

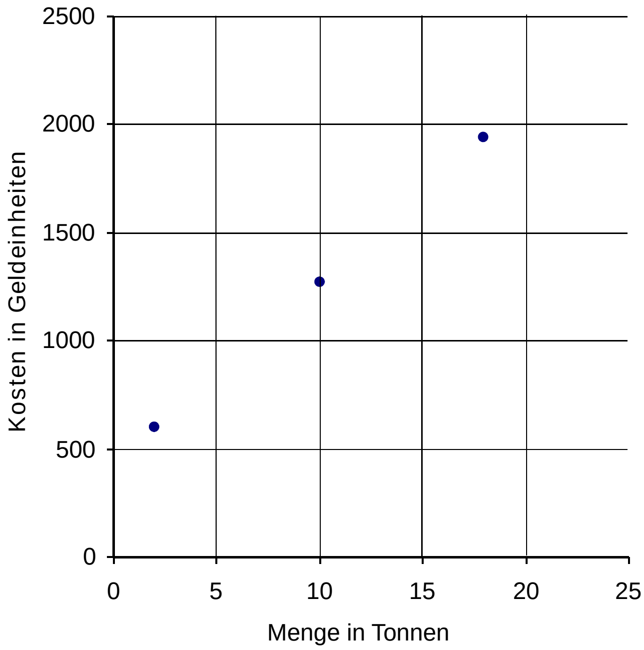


Aufgabe 7 Chemieunternehmen

Aufgabe aus der schriftlichen Abiturprüfung Hamburg 2005.

In einem Chemieunternehmen wird die Leitung einer Abteilung von einem neuen Mitarbeiter übernommen. Die Abteilung produziert flüssige Waschmittel. Die Produktion liegt derzeit bei täglich 10 Tonnen und sollte nach Ansicht des neuen Abteilungsleiters erhöht werden. Die Firmenleitung wünscht von ihm eine Auskunft über die zu erwartenden Produktionskosten und Gewinne. Der Abteilungsleiter wirft einen Blick in die Produktionsunterlagen und findet nebenstehende Daten, die bereits in das nachfolgende Koordinatensystem eingetragen sind.

produzierte Menge in Tonnen	verursachte Kosten in GE (Geldeinheiten)
2	600
10	1272
18	1944



a) Der neue Abteilungsleiter sieht hier einen linearen Zusammenhang. Bestätigen Sie diesen Zusammenhang, indem Sie durch eine Rechnung zeigen, dass die drei Punkte auf einer Geraden liegen.

b) Bei einem genaueren Blick in die Unterlagen findet der Abteilungsleiter zusätzliche Daten (siehe nebenstehende Tabelle.

Zeichnen Sie diese beiden zusätzlichen Daten in das beigefügte Koordinatensystem ein.

produzierte Menge in Tonnen	verursachte Kosten in GE (Geldeinheiten)
5	1047
20	2472

Man sieht „mit bloßem Auge“, dass der lineare Ansatz aus Aufgabenteil a) jetzt offenbar nicht zutrifft. Skizzieren Sie nun einen möglichen und sinnvollen Graphen durch diese 5 Punkte.

Dieser Graph beschreibt den Zusammenhang „produzierte Menge in Tonnen → verursachte Kosten in Geldeinheiten“, die so genannte **Kostenfunktion**.

c) Der Abteilungsleiter findet in den Unterlagen seines Vorgängers den Funktionsterm für die Kostenfunktion K und stellt fest, dass alle fünf Wertepaare zum Graphen von K gehören:

$$K:\ x \to x^3 - 30x^2 + 320x + 72\,.$$

Zeigen Sie, dass K keine Extremstellen besitzt und erläutern Sie, warum diese Eigenschaft für eine Kostenfunktion typisch ist.

d) Aus einer Marktanalyse weiß die Firmenleitung, dass der erzielbare Preis pro Tonne für das Waschmittel in Abhängigkeit von der absetzbaren Menge x durch die folgende Funktion p beschrieben werden kann: $p:\ x \to -5x + 330$ bzw. $p:\ x \to -5 \cdot (x - 66)$

Bestimmen Sie die Gleichung der Erlösfunktion E und zeigen Sie, dass E ein Maximum annimmt, wenn die produzierte Menge 33 Tonnen beträgt.

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Gewinnfunktion G.

Bestimmen Sie, bei welcher produzierten Menge der Gewinn G maximal wird, und berechnen Sie den maximalen Gewinn. Beide Angaben sollen in der Antwort auf 2 Nachkommastellen gerundet werden.

f) Beurteilen Sie vor dem Hintergrund Ihrer Ergebnisse aus den vorangegangenen Aufgabenteilen das Vorhaben des Abteilungsleiters, die bisherige Produktion von täglich 10 Tonnen deutlich zu erhöhen.

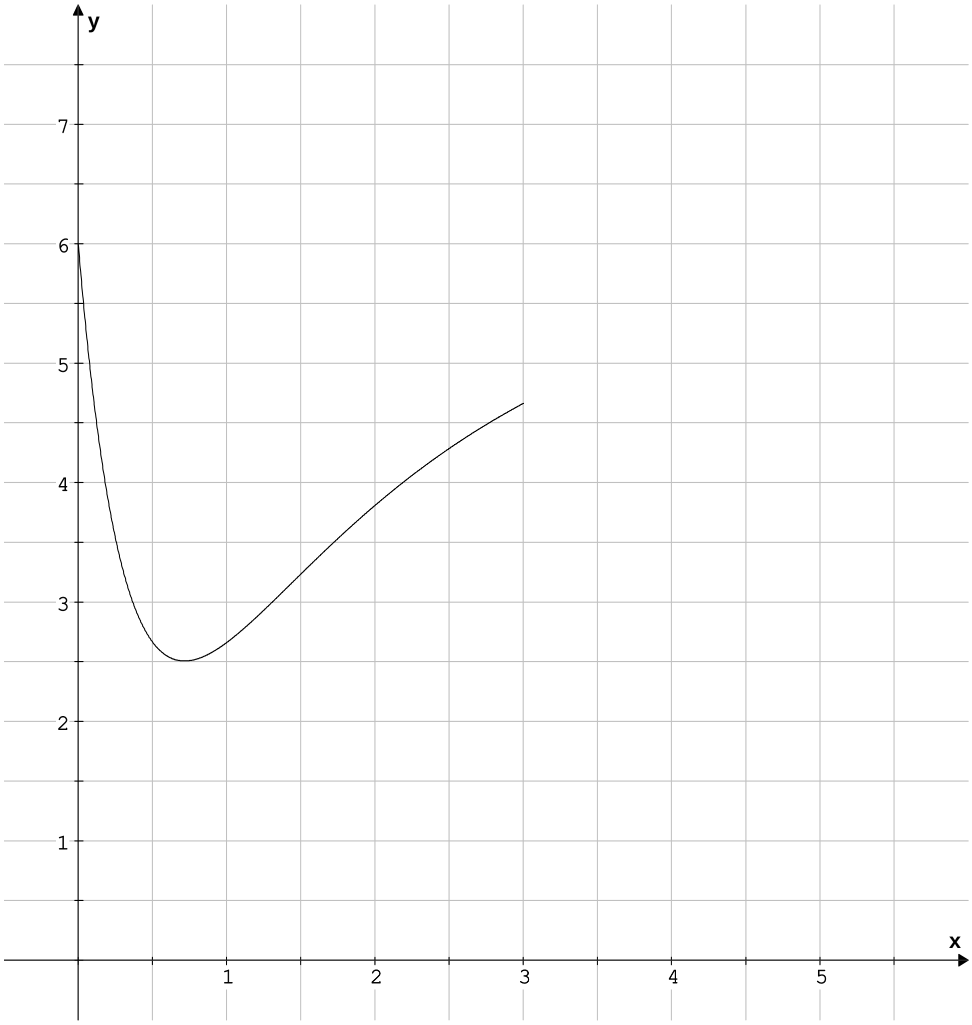
Aufgabe 8 Bevölkerungsentwicklung

In dieser Aufgabe, die sich an eine Aufgabe aus der schriftlichen Abiturprüfung Hamburg 2005 anlehnt, geht es um eine allgemeine Exponentialfunktion und um die Frage, wie gut diese Funktion die Entwicklung einer Population darstellt.

Die Funktion f hat die Funktionsgleichung

$$f(x) = -6e^{-0.5x} + 6e^{-3x} + 6 = 6 \cdot (1 - e^{-0,5x} + e^{-3x})\ .$$

Für einen Teil des Definitionsbereichs ist der Graph der Funktion gegeben:



a) Der Funktionsterm ist die Summe von drei Termen, zwei mit positivem Vorzeichen, einem mit negativem Vorzeichen.
Beschreiben Sie, ausgehend vom Graphen, das Verhalten der Funktion im Hinblick auf folgende Fragen:

Wie arbeiten die drei Terme für den Funktionswert bei $x = 0$ zusammen?

Warum fällt die Funktion für kleine x?

Warum steigt die Funktion wieder?

Warum bestimmt der Term 6 das Verhalten der Funktion für große x?

b) Die Gleichung $f'(x) = 0$ ist äquivalent zu der Gleichung $e^{-0.5x} = 6 \cdot e^{-3x}$ und damit auch äquivalent zu der Gleichung $-0,5x = \ln(6) - 3x$.
Untersuchen Sie unter Verwendung dieses Hinweises die Funktion *f* auf Extrempunkte.

c) Untersuchen Sie die Funktion *f* auf Wendestellen.
(Verwenden *Sie zur Berechnung die in b) vorgestellte Methode).*

Eine Situation, für die diese Funktion ein Modell liefern könnte, ist folgende:
In einer Kleinstadt hat der einzige große industrielle Arbeitgeber sein Werk geschlossen. Daraufhin ziehen viele qualifizierte Arbeitskräfte mit ihren Familien aus dieser Kleinstadt weg. Die Politiker versuchen durch Schaffung von Arbeitsplätzen in anderen Bereichen langfristig neue Bewohner zu gewinnen. Es dauert allerdings eine gewisse Zeit, bis diese Maßnahme erste Erfolge zeigt.

Die Statistiker tragen die Einwohnerzahl regelmäßig in eine Grafik ein, wobei die Einteilung der x-Achse in Jahrzehnten erfolgt und die der y-Achse in zehntausend Einwohner.

d) Interpretieren Sie die Bedeutung des Extremwertes und die Bedeutung der Wendestelle im Sachzusammenhang der Aufgabe.

e) Begründen Sie, warum die angegebene Funktion *f* zur Modellierung der beschriebenen Situation zumindest nicht ganz fern liegt.

f) Bestimmen Sie k so, dass F mit

$$F(x) = 12 \cdot e^{-0,5x} + k \cdot e^{-3x} + 6x$$

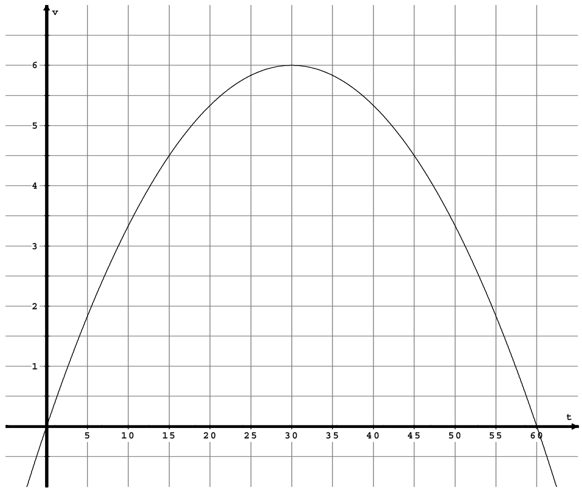
eine Stammfunktion von f ist.
Bestimmen Sie das Integral von f über dem Intervall [0; 1,5].
Mit diesem Wert sollen Sie folgende Aufgabe bearbeiten:
15 Jahre nach der Werkschließung konnte die Stadt Fördergelder beantragen. Diese richteten sich nach der durchschnittlichen Einwohnerzahl (auf Tausend gerundet) der Stadt in diesen 15 Jahren.
Bestimmen Sie die Höhe der Fördermittel, die die Stadt damals erhielt, wenn es für jeden Einwohner 1000 DM an Fördergeldern gab.

g) Skizzieren Sie den weiteren Verlauf des Graphen von *f* (s. Skizze) und geben Sie unter der Bedingung, dass sie weiterhin der Funktion *f* genügt, eine begründete Prognose über die weitere Entwicklung der Einwohnerzahl ab.

Ermitteln Sie die größtmögliche Einwohnerzahl, mit der unter diesen Bedingungen die Stadtentwickler rechnen müssten.
Beschreiben Sie Gründe, warum sich die Einwohnerzahl vermutlich anders entwickeln wird.

Aufgabe 9 Helikopter

In der Abbildung ist ein Ausschnitt des Graphen einer quadratischen Funktion zu sehen, der im Zeitintervall von 0 bis 60 s die Geschwindigkeit eines Helikopters in senkrechter Richtung v_{vertikal} (also sein Steigen bzw. Sinken) beschreibt.
Die waagerechte Achse stellt damit die Zeit *t* in *s* dar, die senkrechte Achse die Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit in m/s.



a) Zeigen Sie anhand der Informationen aus dem gegebenen Diagramm, dass der gezeigte Graph zur Funktion $v_{vertikal}(t) = -\frac{1}{150}t^2 + \frac{2}{5}t$ gehört.
Beschreiben Sie das Flugverhalten in der Zeit von 0 s bis 60 s. Gehen Sie dabei auf die Nullstellen und den Hochpunkt von $v_{vertikal}$ ein.

b) Begründen Sie, dass im gegebenen Diagramm die Fläche zwischen der *t*-Achse und dem Graphen der Funktion die Dimension einer Länge darstellt.
Skizzieren Sie die Form eines zu diesem Steigvorgang passenden **Höhe-Zeit-Diagramms**. Sie brauchen dabei die genaue Einteilung der senkrechten Achse (also der Höhe) nicht durchzuführen.
Die von Ihnen skizzierte Funktion und die Funktion $v_{vertikal}$ stehen in einem mathematischen Zusammenhang. Geben Sie diesen Zusammenhang an.

c) Das abgebildete Steiggeschwindigkeit-Zeit-Diagramm kann zu vielen Flugmanövern gehören. Nennen Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Flugbahnen (also der Höhe-Zeit-Diagramme).

d) Berechnen Sie für die Zeit von 0 s bis 60 s den Gesamthöhenunterschied, den der Helikopter durchfliegt und seine durchschnittliche Steiggeschwindigkeit.

Nehmen Sie jetzt an, der Helikopter startet im Zeitpunkt $t = 0$ s vom Flugfeld (also $h(0) = 0$).
Ein kleines motorisiertes Flugobjekt (eine so genannte Drohne), die eine Kamera trägt, steigt ebenfalls vom Flugfeld nach folgender Funktionsgleichung auf:

$$h_v(t) = v \cdot (t - 30) + 120 \ ,$$

wobei wiederum *t* die Zeit in Sekunden beschreibt, $h_v(t)$ die Flughöhe in Metern angibt und die Steiggeschwindigkeit *v* verschiedene Werte (jeweils in m/s) annehmen kann. Diese Aufsteig-Funktion ist so gewählt, dass die Drohne bei $t = 30$ s eine Höhe von 120 m erreicht; Drohne und Helikopter starten nicht unbedingt gleichzeitig.

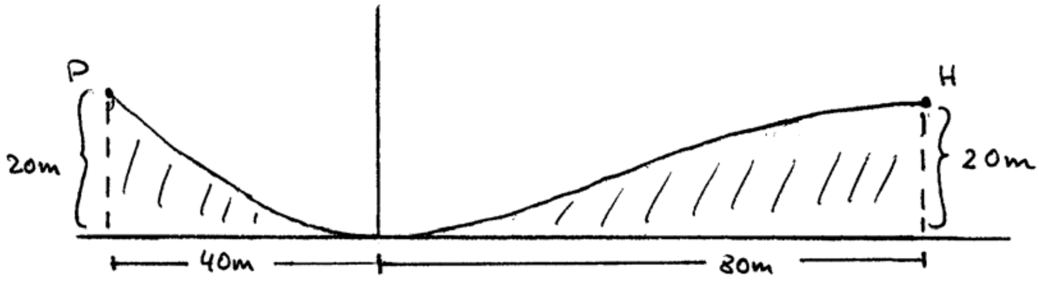
e) Beschreiben Sie die möglichen Flugbahnen der Drohne im Vergleich / im Unterschied zum Helikopter.
Interpretieren Sie die Bedeutung des Parameters v.
Zeichnen Sie in Ihr Höhe-Zeit-Diagramm mindestens zwei mögliche Höhe-Zeit-Funktionen für die Drohne.
Zeigen Sie, dass Helikopter und Drohne sich unabhängig von v zum Zeitpunkt $t = 30$ s auf gleicher Höhe befinden.

f) Geben Sie die Steiggeschwindigkeit v der Drohne an, sodass Drohne und Helikopter zu genau einem Zeitpunkt die gleiche Steiggeschwindigkeit aufweisen.
Können die Flugobjekte auch an mehreren Zeitpunkten die gleiche Steiggeschwindigkeit haben? Begründen Sie Ihre Antwort.

Alternative Teilaufgabe

g) Eine Drohne soll ebenfalls auf dem Flugfeld starten und sich genau nach 15 Sekunden neben dem Helikopter befinden, um den Helikopter von der Seite zu fotografieren.
Bestimmen Sie die erforderliche Drohnen-Steiggeschwindigkeit v, den Zeitpunkt, zu dem die Drohne starten muss, sowie die Höhe, in der sich die Drohne neben dem Helikopter befindet.
Begründen Sie: Kann diese Drohne auf ihrem Flug noch mehr Bilder liefern, bei denen sie genau neben dem Helikopter ist?

Aufgabe 10 Kanalbett



Ein Kanalbett soll mithilfe einer Funktion beschrieben werden. Dazu ist ein erster Ansatz gemacht worden:

$$h(x) = \begin{cases} -2\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right) + 2\,; & -4 \le x \le 0 \\ -\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right) + 1\,; & 0 < x \le 8 \end{cases}$$

Eine Einheit entspricht hierbei 10 m in der Natur.

a) Zeigen Sie, dass der Graph von h durch die Punkte P, den Koordinatenursprung und H geht, im Koordinatenursprung einen Tiefpunkt und in H einen Hochpunkt hat.

b) Zeichnen Sie den Graphen von h.

c) $h(x)$ ist abschnittsweise definiert. Begründen Sie, warum **nur ein** trigonometrischer Funktionsterm vom Typ $\left(-a \cdot \cos(b \cdot x) + c\right)$ nicht ausreicht, um das ganze Kanalbett zu beschreiben.

Ein zweiter vereinfachender Ansatz sieht so aus:

$$f(x) = -\frac{1}{128}x^3 + \frac{3}{32}x^2$$

d) Zeigen Sie, dass der Graph von f ebenso wie der von h durch die gegebenen Punkte geht, im Koordinatenursprung einen Tiefpunkt und in H einen Hochpunkt hat.

e) Zeichnen Sie den Graphen von f in ein zweites Koordinatensystem.

f) Bei einem starken Hochwasser steigt das Wasser bis zum Punkt H. Berechnen Sie mithilfe der Funktion f den Inhalt der Querschnittsfläche des dann mit Wasser gefüllten Kanals.

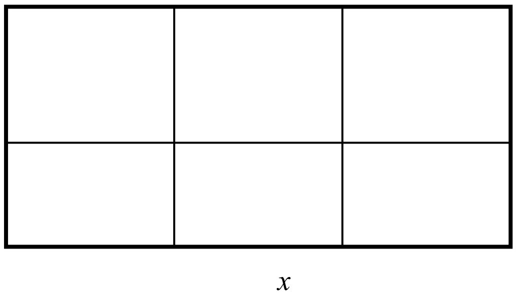
g) Begründen Sie, warum sich für den rechten Teil des Kanalprofils bei beiden Funktionen (f und h) der gleiche Flächeninhalt der Querschnittsfläche ergibt.
Beziehen Sie in Ihre Argumentation die Wendepunkte beider Graphen ein.

Alternative Teilaufgabe

g*) Von H soll eine unterirdische, gerade Leitung ausgehen und im Punkt $B(u \mid f(u))$ mit $0 < u < 8$ ins Kanalbett münden. Bestimmen Sie B so, dass die Leitung möglichst steil verläuft.

Aufgabe 11 Zäune

Ein Tierpark plant eine rechteckige Fläche als Gehege mit 6 kleineren rechteckigen, nicht notwendig gleich großen Bereichen anzulegen (siehe Abbildung). Für den Außenzaun ist mit 20 € je Meter, für den Innenzaun mit 10 € je Meter Zaunlänge zu rechnen. Zunächst sollen Zugänge und Tore bei der Kalkulation unberücksichtigt bleiben.



a) Berechnen Sie die Gesamtkosten für alle Zäune zunächst unter der Annahme, dass die Gesamtfläche quadratisch ist und einen Inhalt von 3 000 m² hat.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion K mit
$$K(x) = 50x + \frac{180000}{x}$$
die Gesamtkosten für alle benötigten Zäune beschreibt, wenn das rechteckige Gehege 3 000 m² groß ist.
Dabei ist x die Seite des Geheges, an die 3 Innenbereiche grenzen.

c) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion K für $x \to 0$.
Interpretieren Sie das Ergebnis.
Legen Sie einen sinnvollen Definitionsbereich für die Funktion K fest.
Begründen Sie ohne Rechnung, warum diese Funktion keine Nullstellen haben kann, jedoch mindestens einen lokalen Extremwert haben muss.

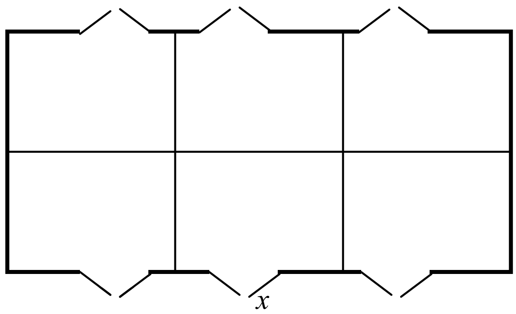
d) Bestimmen Sie die äußeren Abmessungen für ein 3 000 m² großes Gehege so, dass die Gesamtkosten für alle benötigten Zäune minimal werden.
Geben Sie den Betrag an, der also mindestens für die Zäune veranschlagt werden muss.

e) Zeichnen Sie den Graphen von K in dem von Ihnen in c) festgelegten Definitionsbereich in ein geeignetes Koordinatensystem.

Für den Kauf der Zäune stehen nur 5 000 € zur Verfügung.

f) Berechnen Sie den maximalen Inhalt der Fläche, die eingezäunt werden könnte, wenn jegliche Tore unberücksichtigt bleiben sollen.

g) Tatsächlich aber soll jeder Bereich ein Tor nach außen erhalten (siehe nebenstehende Skizze). Solch ein Tor ist 2 Meter breit und kostet 200 €. Bestimmen Sie, um wie viele m² dadurch die maximal einzäunbare Fläche kleiner wird.



Aufgabe 12 Kondensator

Ein Plattenkondensator besteht aus einem Paar gleichgroßer Metallplatten, die voneinander isoliert in einem festen Abstand montiert sind.
Verbindet man die beiden Platten je mit einem Pol einer Batterie, so lässt die Batterie Strom fließen, so dass sich die beiden Kondensatorplatten unterschiedlich aufladen. Dadurch wächst seinerseits die Spannung zwischen den Kondensatorplatten, so dass die Batterie gegen diese Spannung am Kondensator immer weniger Strom fließen lassen kann.
Während die Batterie immer eine konstante Spannung U_0 liefert, ist die Spannung am Kondensator zeitabhängig: Sie lässt sich durch eine Spannungs-Funktion $U(t)$ beschreiben. Diese Funktion hat dabei die Gleichung

$$U(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \ .$$

Die Zeit t ist eine positive reelle Zahl (Es wird ab dem Augenblick des Einschaltens gezählt).
U_0 ist die Batteriespannung,
τ ist eine für den Kondensator charakteristische Größe.
Natürlich tragen U und t auch Einheiten (die Spannung U wird in Volt gemessen, die Zeit t in Sekunden), dies soll aber in dieser Aufgabe unberücksichtigt bleiben.

a) Skizzieren Sie den Graphen von $U(t)$ für $U_0 = 10$ und $\tau = 2$ im Intervall $0 \le t \le 10$.
Berechnen Sie den Zeitpunkt t, bei dem am Kondensator 90% der Batteriespannung U_0 herrschen.

b) Begründen Sie, warum die Funktion U den oben angeführten Vorgang sinnvoll beschreibt: Gehen Sie dabei besonders auf das Wachstum von U und die Grenze dieses Wachstums ein.

c) Bestimmen Sie die Änderung der Spannung am Kondensator im Moment des Einschaltens (also bei $t = 0$).
Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Schnittpunkt der Tangente an die Spannungs-Funktion an dieser Stelle die Gerade $y = U_0$ immer bei $t = 1\tau$ schneidet.

Wie schon anfangs erläutert, lässt die Batterie Strom fließen und lädt damit den Kondensator auf. Dabei gilt: Die Stromstärke $I(t)$ ist umso höher, je geringer die Spannung am Kondensator ist; sollte die Spannung am Kondensator die Batteriespannung erreicht haben, so kann die Batterie keinen Strom mehr fließen lassen. Die Anfangs-Stromstärke heißt I_0.
Die Stromstärke-Funktion hat die Funktionsgleichung $I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ mit den bekannten Größen.

d) Begründen Sie wiederum, warum diese Funktion den Vorgang sinnvoll beschreibt.
Berechnen Sie (für $\tau = 2$) den Zeitpunkt, bei dem die Stromstärke nur noch 10 % ihres anfänglichen Wertes aufweist.

e) Die Menge an Ladung Q, die die Batterie bis zu einem Zeitpunkt t auf den Kondensator hat fließen lassen, wird durch die Fläche zwischen dem Graphen von $I(t)$ und der Zeit-Achse (bis zum jeweiligen Zeitpunkt) dargestellt.
Geben Sie die Gleichung der Funktion Q an.
Berechnen Sie (für $\tau = 2$ und $I_0 = 2$) die Ladung auf dem Kondensator bei $t = 2\tau$.
Bestimmen Sie die maximale Ladung, die der Kondensator bei dieser Anfangsstromstärke I_0 aufnehmen kann.

f) Schließlich:
Der Widerstand eines elektrischen Geräts ist der Quotient aus Spannung und Stromstärke: $R = \frac{U}{I}$.
Dies gilt selbstverständlich auch für Kondensatoren.
Beurteilen Sie, wie sich der Widerstand eines Kondensators mit der Zeit ändert.

Aufgabe 13 Radioaktiver Zerfall

Beim radioaktiven Zerfall einer Substanz S_1 beschreibt $m_1(t)$ die Masse der noch nicht zerfallenen Substanz zum Zeitpunkt t mit $m_1(t)$ in mg und t in Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Dabei gilt: $m_1(t) = 100 \cdot e^{-0,5t}$.

a) Geben Sie an, wie groß die Masse der Substanz S_1 am Beobachtungsbeginn war.
Berechnen Sie die Halbwertszeit dieses Zerfalls, d.h. die Zeit, nach der nur noch die Hälfte der ursprünglichen Substanz vorhanden ist.
Bestimmen Sie die nach 6 Stunden bereits zerfallene Masse.

Das Zerfallsprodukt der radioaktiven Substanz S_1 ist die Substanz S_2. Auch diese Substanz ist radioaktiv und zerfällt demzufolge weiter. Für die Masse $m_2(t)$ der noch nicht zerfallenen Substanz S_2 gilt dann:

$$m_2(t) = 100 \cdot e^{-0,5t} \cdot (1 - e^{-0,5t})$$

b) Berechnen Sie, wie viel an Substanz S_2 zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhanden ist und interpretieren Sie dieses Ergebnis.
Begründen Sie, dass es zu einem gewissen Zeitpunkt eine maximale Masse der Substanz S_2 geben muss und berechnen Sie den Zeitpunkt und die zugehörige Menge.

c) Zeichnen Sie die Graphen von m_1 und von m_2 in ein Koordinatensystem ein.

d) Gegeben ist die Funktion g durch

$$g(x) = -50e^{-0,5x} + 100e^{-x} \;;\; x \in \mathbb{R}^+$$

Bestimmen Sie die Null- und Extremstellen von g.
Beschreiben Sie das Verhalten von g für $x \to \infty$?
Zeichnen Sie auch den Graphen von g in Ihr Koordinatensystem ein.
Zeigen Sie, dass die Funktion m_2 eine Stammfunktion zur Funktion g ist.

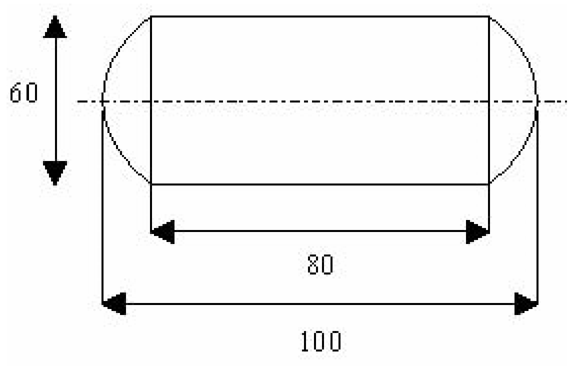
e) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen von g, der x-Achse und der y-Achse begrenzt wird.
Interpretieren Sie die Bedeutung des Integrals $\int_0^t g(x)dx$.

Aufgabe 14 Wassertank

Modellierungsaufgabe mit Volumenberechnung mittels Integration. Beispielaufgabe aus EPA Mathematik, 2002.

In dieser Aufgabe soll zunächst das Volumen eines Wassertanks näherungsweise bestimmt werden. und dann die Füllhöhenfunktion skizziert werden.

a) Gegeben ist ein liegender Wassertank, der aus einem Zylinder mit zwei kuppelförmigen Aufsätzen besteht. Die Abmessungen sind der nebenstehenden Skizze des Querschnitts des Wassertanks zu entnehmen. Die Maße sind in Zentimetern angegeben. Die Skizze ist nicht maßstabsgetreu, stellt aber charakteristische Eigenschaften (z.B. Knicke) ausreichend gut dar.

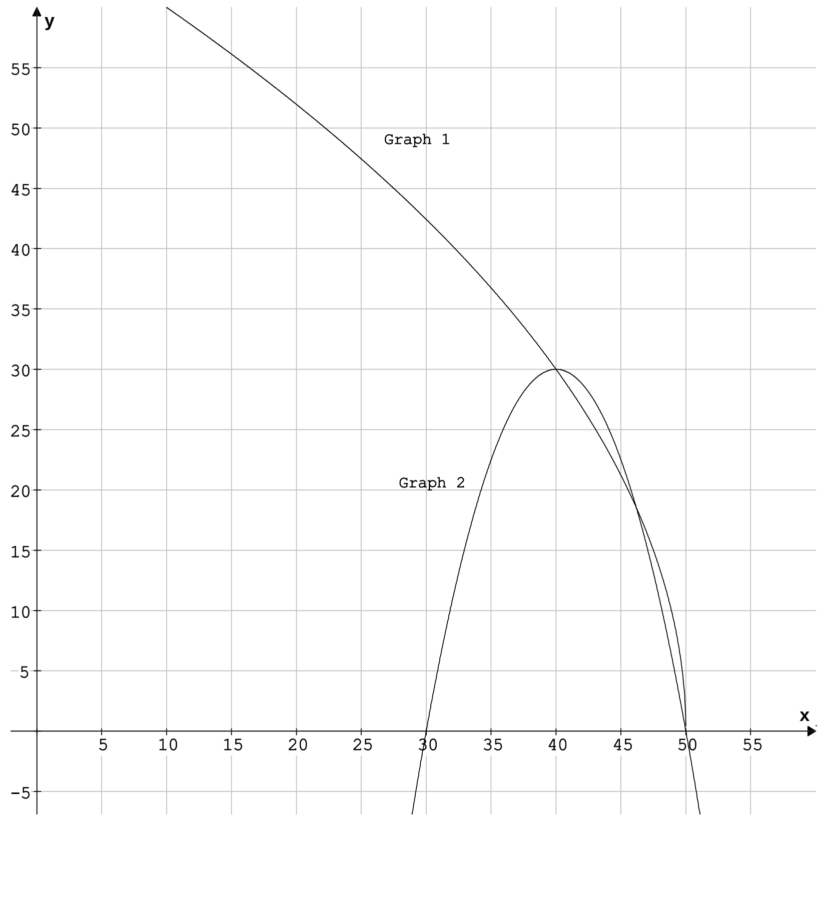


Schätzen Sie mit einfachen geometrischen Mitteln ab, dass weniger als 300 Liter in den Tank passen.

b) Es sollen nun die kuppelförmigen Aufsätze mathematisch beschrieben werden. Betrachten Sie dazu die Funktionen f und g mit

$$f(x) = -0{,}3 \cdot (x-40)^2 + 30 \quad \text{und} \quad g(x) = \sqrt{4500 - 90x}\,.$$

Die Graphen der beiden Funktionen sind der nachfolgenden Skizze zu entnehmen. Begründen Sie, welcher Graph zu f bzw. g gehört.



Welche Drehkörper entstehen, wenn man den Ausschnitt der Graphen jeweils im Intervall [40;50] um die x-Achse rotieren lässt?
Beschreiben Sie, dass man mit beiden Funktionen jeweils die kuppelförmigen Aufsätze des Wassertanks näherungsweise beschreiben kann. Beurteilen Sie die Qualität der Näherung.

c) Das Volumen eines Körpers, der durch Rotation des Graphen einer Funktion k im Intervall $[a; b]$ um die x-Achse entsteht, kann durch die Formel

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left(k(x)\right)^2 dx$$

berechnet werden.

Bestimmen Sie das Volumen einer Tankkuppel mit Hilfe von $g(x)$.

Berechnen Sie nun mit dieser Näherung das Volumen des gesamten Wassertanks.

d) Der Wassertank wird bei konstanter Zuflussrate mit Wasser gefüllt.
Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen für die Funktion H, die die Höhe der Wasseroberfläche im Tank über dem Boden zum Zeitpunkt t angibt, wenn der Tank wie in der Skizze auf der Seite liegt.
Skizzieren Sie grob den Verlauf des Graphen.

Aufgabe 15 Windanlage

Das Foto zeigt einen Darrieus-Windenergie-Konverter. Der Wind setzt die drei Blätter um die vertikale Achse in Drehung; die Blätter behalten dabei auch bei schneller Bewegung ihre Form bei.

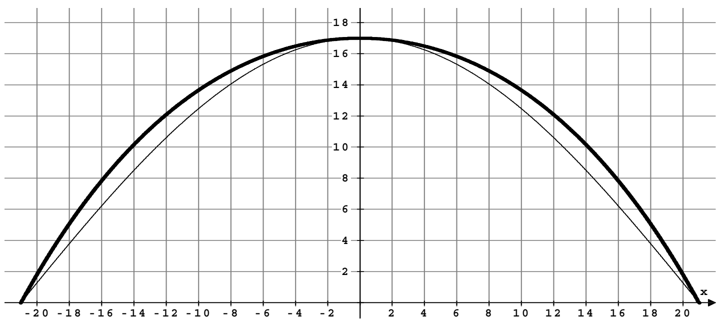
Bei dieser Anlage – einem Forschungs-Darrieus der Sandia-Laboratories des DOE – liegen zwischen den oberen und den unteren Befestigungspunkten der Blätter 42 m, und der Durchmesser des Rotors beträgt 34 m. Die geplante Spitzenleistung dieser Anlage liegt bei 625 kW.

In den Aufgabenteilen a) bis d) soll zuerst die Form der Blätter durch zwei verschiedene Funktionen f und g näherungsweise beschrieben (modelliert) werden. Die x-Achse entspricht der vertikalen Rotationsachse

Die Funktion f soll eine Kosinusfunktion der Form $f(x) = a \cdot \cos(bx + c)$ sein, g ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades mit $g(x) = -0{,}000015 \cdot x^4 - 0{,}032 \cdot x^2 + 17$.

a)

Die Abbildung zeigt die Graphen der beiden Funktionen f und g.



Zeigen Sie, dass f die Gleichung $f(x) = 17 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{42}x\right)$ aufweist, und begründen Sie, dass aus den Angaben f eindeutig bestimmt ist.
Geben Sie an, welcher Graph zu welcher Funktion gehört.

b) Untersuchen Sie g auf Symmetrie und Extrema im Bereich $-25 \le x \le 25$.
Zeigen Sie, dass die Nullstellen von g in diesem Bereich in guter Näherung bei $x_{N_1} = -21$ und $x_{N_2} = 21$ liegen.

c) Bestimmen Sie für beide Funktionen jeweils den Winkel in Grad, den die Blätter bei $x = 21$ mit der x-Achse einschließen.
Die Rotorachse ist in einer Höhe von 56 m über Grund durch Abspannseile mit dem Grund verbunden (siehe Abbildung). Diese Abspannseile verlaufen oben am Rotor etwa parallel zu den Blättern an deren Achsenbefestigungspunkten.
Bestimmen Sie für beide Funktionen die Länge der Abspannseile.

d) Entscheiden Sie, welche der beiden Funktionen jeweils welche Eigenschaften des Konverters auf dem Foto besser wiedergibt, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

e) Bestimmen Sie in guter Näherung die Querschnittsfläche des Rotors unter Verwendung der Funktion g.

f) Mit den Ihnen bisher zur Verfügung stehenden Mitteln ist die Länge der Blätter nicht zu berechnen. Sie können aber den Graphen der Funktion g stückweise annähern.
Berechnen Sie den so entstehenden Näherungswert für die Länge der Blätter.

Aufgabe 16 Molkerei

Die Molkerei Meier hat die Rezeptur eines Joghurts mit der neuen Geschmacksrichtung „Apfelbeere" entwickelt. Für die Produktion dieses Joghurts geht die Molkerei von einem s-förmigen Kurvenverlauf der Kostenfunktion aus, die der Produktionsmenge x die Gesamtkosten y zuordnet.

Die Fixkosten betragen 400 Geldeinheiten (GE). Außerdem ist bekannt, dass der Graph der Kostenfunktion einen Wendepunkt in (10 | 700) aufweist und die Wendetangente die Gleichung $t_w(x) = 20x + 500$ hat. Die Kapazitätsgrenze für dieses Produkt liegt bei 50 Mengeneinheiten (ME). Eine Marktanalyse hat ergeben, dass das Produkt in dieser Menge vollständig verkauft werden kann.

Hinweis: Alle zu skizzierenden Graphen sind in einem Koordinatensystem darzustellen. Wählen Sie dabei als Maßstab für die Ordinate 500 GE $\hat{=}$ 1 cm, für die Abszisse 5 ME $\hat{=}$ 1 cm.

a) Bestimmen Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion möglichst niedrigen Grades, die die Entwicklung der Kosten K nach den oben gemachten Angaben beschreibt. Geben Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich an.

b) Die Molkerei erwartet einen Erlös von 70 GE je ME. Bestimmen Sie die Erlösfunktion E und zeigen Sie, dass die Gewinnfunktion G die Gleichung $G(x) = -0{,}1x^3 + 3x^2 + 20x - 400$ hat.

Skizzieren Sie die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E.

Die Gewinnschwelle liegt bei 10 ME. Bestimmen Sie die Gewinngrenze.

Bestimmen Sie die Produktionsmenge, für die sich der maximale Gewinn ergibt, und berechnen Sie diesen.

c) Ein Mitglied der Geschäftsleitung schlägt vor, durch eine Reduzierung des Preises die Nachfrage zu steigern und mit erhöhtem Absatz den Gewinn des Unternehmens zu steigern.

Beurteilen Sie diesen Vorschlag unter Berücksichtigung der oben genannten Modellannahmen.

d) Zeitgleich ist eine zweite Molkerei mit diesem neuen Produkt und einem Dumpingpreis auf den Markt gekommen. Nun überlegt man bei der Molkerei Meier, wie man wirtschaftlich vertretbar reagieren soll. Dabei ermittelt ein Abteilungsleiter der Molkerei Meier richtig, dass der niedrigste verlustfreie Preis 50 GE je ME beträgt.

Skizzieren Sie den Graphen der entsprechenden Erlösfunktion E_{neu} und ermitteln Sie, wie viele Mengeneinheiten bei diesem Preis nur noch produziert und abgesetzt werden dürfen, damit kein Verlust entsteht.

Aufgabe 17 Schiffbau

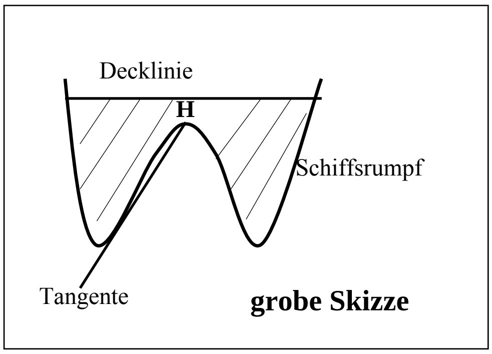
Auf einer Hamburger Werft wird eine Hochgeschwindigkeitsfähre als Doppelrumpfschiff (Katamaran) geplant. Der mittlere Teil des Schiffsrumpfes wird auf einer Länge von 12 m im Querschnitt nach der Funktion *f* mit $f(x) = 0{,}2 \cdot x^4 - 1{,}8 \cdot x^2$ hergestellt.

Die waagerechte Decklinie liegt in einer Höhe von 1 Einheit über dem Hochpunkt *H*.

a) - Zeigen Sie, dass die Funktion achsensymmetrisch ist.
- Ermitteln Sie den senkrechten Abstand der Tiefpunkte von der Decklinie.
- Berechnen Sie die Länge der Decklinie.
- Zeichnen Sie den Graphen von *f* zusammen mit der Decklinie in ein geeignetes Koordinatensystem mit 5 Einheiten in jede *x*-Richtung ein.

b) Im Hochpunkt *H* von *f* soll für Unterwasserbeobachtungen eine Kamera angebracht werden. Man möchte wissen, wie groß der Blickwinkel der Kamera in Richtung Meeresgrund ist. Hierzu muss man zwei Tangenten durch den Punkt *H* an den Schiffsrumpf *f* legen.

Bestimmen Sie die Gleichung einer dieser Tangenten an *f* und den Blickwinkel.



c) Damit das Schiff „unsinkbar" ist, soll der Doppelrumpf des Schiffes mit Styropor bis zur Höhe des Punktes *H* ausgefüllt werden.
Berechnen Sie das Volumen an Styropor in den mittleren 12 m des Schiffes.

d) Die Werft plant, einen größeren Katamaran herzustellen. Die Decklinie soll dabei um 2 Einheiten verlängert werden. Die Abstände zwischen der Decklinie und dem Hochpunkt bzw. zwischen der Decklinie und den Tiefpunkten soll erhalten bleiben.
Ermitteln Sie die Funktionsgleichung einer der neuen Schiffsbreite angepassten Funktion *g* und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen in dem bereits erstellte Koordinatensystem.

4.2 Kurs auf erhöhtem Niveau

Aufgabe 1 Neubesiedlung von Biotopen

Aufgabe aus der schriftlichen Prüfung 2008.

Eine Forschergruppe beobachtet in den Tropen die natürliche Neubesiedlung von Seen bei Überschwemmungen durch bisher in diesen Seen nicht vorhandene Ruderfußkrebse.

Ihre Untersuchungen und theoretische Überlegungen legen nahe, dass für diesen Fall die ***lokale Änderungsrate*** der Krebsdichte im Wasser einer Funktion des Typs

$$f_k(t) = k \cdot \frac{e^t}{(1+e^t)^2}, \quad k > 0, t \geq 0$$

folgt, d.h. $f_k(t)$ gibt zum Zeitpunkt t (in Monaten) die ***Zuwachsrate*** in Krebsen pro Kubikmeter Wasser pro Monat an, Letzteres näherungsweise, da ganzzahlige Funktionswerte die Ausnahme sind.

Zunächst sollen Sie diese Funktionenschar untersuchen und Ihre Ergebnisse dann im oben geschilderten Sachkontext deuten.

a)
- Begründen Sie, dass die Graphen der Funktionenschar f_k keine Nullstellen aufweisen, und zeigen Sie, dass gilt: $f_k(t) \to 0$ für $t \to \infty$.
- Berechnen Sie die Extrempunkte und bestimmen Sie die Wendepunkte von f_k im oben angegebenen Definitionsbereich.

  Hinweis: Sie können dabei ohne Nachweis $f_k''(t) = k \cdot \dfrac{e^t(1-4e^t+e^{2t})}{(1+e^t)^4}$ verwenden.
- Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_{40} im Bereich $0 \leq t \leq 10$ in das Koordinatensystem in der Anlage. **30 P**

b) Interpretieren Sie Ihre in Teilaufgabe a) gewonnenen Erkenntnisse über die Funktionenschar in Bezug auf die Entwicklung der Krebsdichte im Wasser.
Gehen Sie dabei auch auf die langfristige Entwicklung der Dichte ein. **10 P**

c) Bestätigen Sie, dass F_k mit $F_k(t) = \dfrac{-k}{1+e^t}$ eine Stammfunktion von f_k ist. **5 P**

d) Bei einem der beobachteten Seen ergaben die Untersuchungen durch Kontrollentnahmen, dass drei Monate nach dem ersten Auftauchen der Ruderfußkrebse in diesem See von einer ***Dichte*** von 40 000 Krebsen pro Kubikmeter auszugehen war.
- Ermitteln Sie aus dieser Beobachtung den Parameter k der Modellierung.

  Weisen Sie zunächst nach, dass sich für die Dichte ergibt: $D_k(t) = k \cdot \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1+e^t}\right)$.
- Bestimmen Sie mit diesem Modell, wie viele Ruderfußkrebse pro Kubikmeter in der ersten Woche (also im ersten Viertelmonat) ungefähr in den See gelangt sind.
- Bestimmen Sie, wie groß mit diesem Modell die Dichte der Krebse „nach langer Zeit“ in dem See sein wird. **20 P**

e) Die Kollegen der Forscher im Heimatland wollen untersuchen, ob diese ***Änderung*** der Dichte an Ruderfußkrebsen auch bei bereits besiedelten Seen zu beobachten ist, deren Besiedlungsdichte durch äußeren Einfluss erhöht wird.

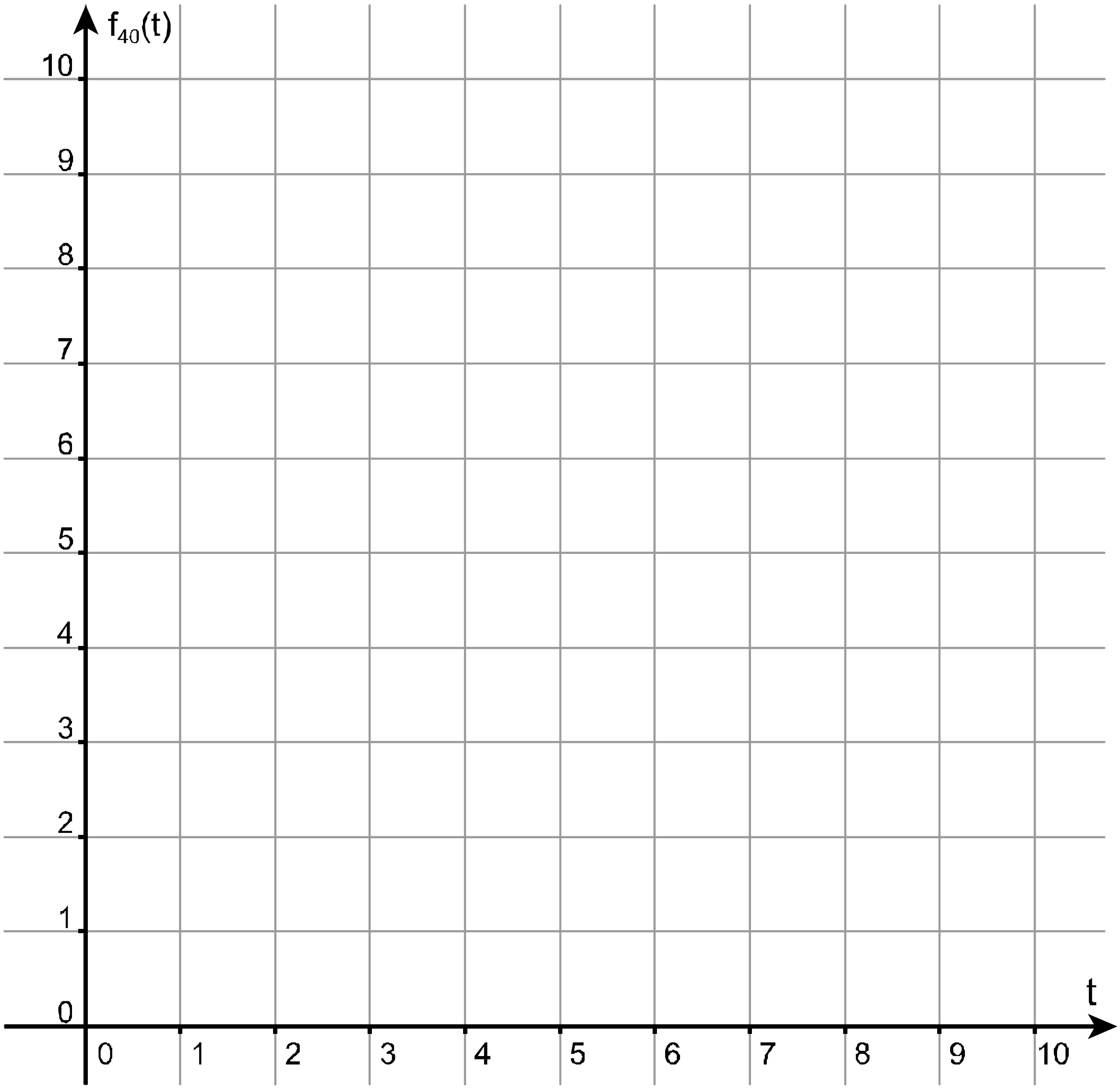
Sie arbeiten daher mit der Stammfunktion D von f_k mit $D(t) = D_{anf} + \int_0^t f_k(z)dz$.

- Beschreiben Sie, was an diesem Modell gegenüber jenem aus Aufgabenteil d) geändert wurde.
- Begründen Sie durch Interpretation von f_k, welche Voraussetzungen im Sachkontext gegeben sein müssen, damit dieses Modell für bereits besiedelte Seen sinnvoll sein kann. **10 P**

f) In einem der Seen beobachteten die Forscher eine Sterblichkeitsrate der Krebse, die nicht mehr dem bisherigen Modell entsprach: Die Sterblichkeitsrate war im Wesentlichen proportional zu der Dichte, die aktuell nach dem alten Modell zu erwarten war. (Dieser Proportionalitätsfaktor möge mit s bezeichnet werden.)

- Weisen Sie nach, dass die Änderungsrate nun durch die Funktion
$$f^*_{k;\,s}(t) = k \cdot \left(\frac{e^t}{(1+e^t)^2} - s \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^t} \right) \right)$$
beschrieben werden kann.
- Begründen Sie für $s = 0{,}04$, dass die Dichte der Ruderfußkrebse in diesem Fall nach etwa 4 Monaten ein Maximum erreicht.
Führen Sie die nötigen Berechnungen exakt oder näherungsweise durch. **25 P**

Anlage zur Aufgabe „Neubesiedlung von Biotopen“



Aufgabe 2 Kettenlinie

Aufgabe aus der schriftlichen Prüfung 2008.

Bei vielen technischen Problemen treten Kombinationen von Exponentialfunktionen auf. Zwei von ihnen, die besondere Namen tragen, sollen hier näher betrachtet werden.

Sinus hyperbolicus: $f_1(x) = \sinh(x) := \frac{1}{2} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right)$

Cosinus hyperbolicus: $f_2(x) = \cosh(x) := \frac{1}{2} \cdot \left(e^x + e^{-x}\right)$

a) Untersuchen Sie die Funktionen sinh und cosh auf Nullstellen, Symmetrien und Asymptoten. Zeichnen Sie die Graphen dieser beiden Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem ein $(-3 \le x \le 3)$. **20 P**

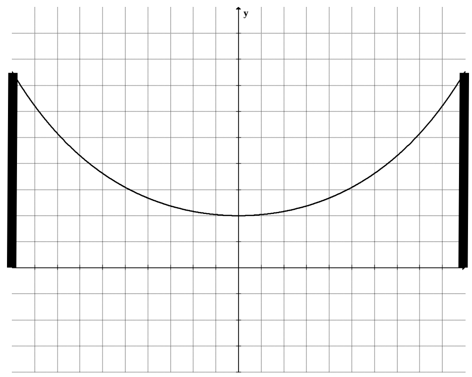
b) Die Namen dieser Funktionen erinnern nicht zufällig an die Funktionen Sinus und Cosinus; es gibt formale Ähnlichkeiten.

Zeigen Sie:

- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $f_1'(x) = f_2(x)$ und $f_2'(x) = f_1(x)$
- sinh und cosh erfüllen die Differentialgleichung $f'' - f = 0$.

Geben Sie jeweils die entsprechenden Beziehungen für die Funktionen Sinus und Cosinus an. **10 P**

Spannt man ein Seil (oder eine Kette) zwischen zwei gleich hohen Türmen auf, so folgt seine Linie der so genannten Kettenlinie $y = k(x) = a \cdot \cosh(b \cdot x)$ mit $a, b > 0$.



c) Begründen Sie, dass a dabei die Höhe des tiefsten Seilpunktes über der Grundebene ist.
Untersuchen Sie, wie sich die Kettenlinie ändert, wenn sich bei festgehaltenem a der Parameter b vergrößert. **10 P**

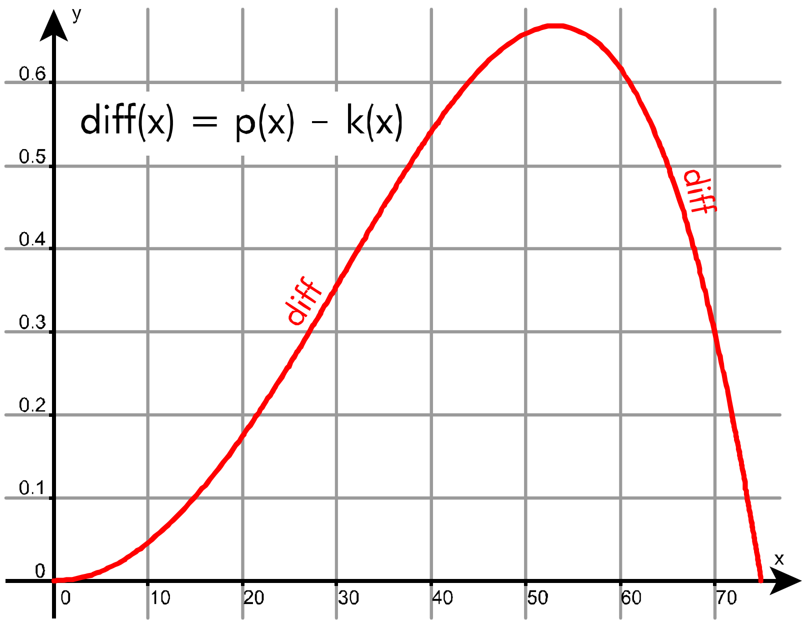
d) Ein Seil wird zwischen zwei jeweils 117,8 m hohen Türmen gespannt. Die Türme sind 150 m voneinander entfernt. Das Seil hat in der Mitte einen Bodenabstand von 80 m.

- Weisen Sie nach, dass die Kettenlinie für dieses Seil der Gleichung $k(x) = 80 \cdot \cosh(0{,}0125 \cdot x)$ folgt.
- Berechnen Sie den Winkel zwischen Seil und Turm am Befestigungspunkt des Seils.
- Untersuchen Sie, wie sich die Parameter a und b sowie der eben berechnete Winkel ändern, wenn man das Seil straffer spannt. **20 P**

e) Bestimmen Sie die Länge des bereits betrachteten Seils zwischen den Türmen. (Es folgt der Funktion mit der Gleichung $k(x) = 80 \cdot \cosh(0{,}0125 \cdot x)$.)

Hinweis: Für eine im Intervall [*c*; *d*] stetig differenzierbare Funktion *f* berechnet sich die Bogenlänge *l* des Graphen von *f* über [*c*; *d*] durch $l = \int_c^d \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$. **20 P**

f) Man kann *k* durch eine einfache quadratische Funktion *p* annähern, z. B. durch $p(x) = 80 + 0{,}00672 \cdot x^2$. Um eine hinreichend genaue Näherung für das gegebene Problem zu erreichen, sollte die Differenz der Seilhöhen, die durch *p(x)* und *k(x)* berechnet werden, zwischen den Türmen nie einen halben Meter überschreiten.



Entscheiden Sie, auch mithilfe der obigen Abbildung, ob *p* in diesem Sinn hinreichend genau ist, und ermitteln Sie gegebenenfalls eine Verbesserung der quadratischen Näherungsfunktion. Beurteilen Sie die erreichte Verbesserung. **20 P**

Aufgabe 3 Hecken

Aufgabe aus der schriftlichen Prüfung 2008.

Für jedes $c \neq 0$ ist eine Funktion f_c gegeben durch $f_c(x) = \dfrac{c \cdot e^x}{\left(e^x + 10\right)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f_c mit den Koordinatenachsen.
Untersuchen Sie den Graphen von f_c auf Extrempunkte.
Hinweis: Argumentieren ohne die zweite Ableitung ist möglich.
Entscheiden Sie, für welches c Hochpunkte vorliegen.
Geben Sie c so an, dass $H(\ln 10 \,|\, 11)$ Hochpunkt des Graphen von f_c ist. **20 P**

b) Im Koordinatensystem in der Anlage sind der Graph der Funktion f_{440} und der Graph der Funktion g mit $g(x) = 40 \cdot e^{-x}$ eingezeichnet. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Graphen von f_{440} und g.
Zur Kontrolle: Für die Schnittstelle x_s gilt $x_s = \ln\left(1+\sqrt{11}\right) \approx 1{,}46$. **10 P**

Für eine große Zierhecke pflanzt eine Landschaftsgärtnerin verschiedene Sträucher der Sorten *F* und *G* in einer Reihe abwechselnd ein. Zum Zeitpunkt des Pflanzens sind die Sträucher jeweils 4 Dezimeter hoch. Die Funktionen f_{440} und g beschreiben vereinfachend die momentanen Wachstumsgeschwindigkeiten der Sträucher *F* und *G* (in Dezimeter pro Jahr) in Abhängigkeit von der Zeit x, gemessen in Jahren ab dem Zeitpunkt des Einpflanzens.

c) Ermitteln Sie die Stammfunktionen *F* und *G*, die die Strauchhöhen der Sorten *F* bzw. *G* in Abhängigkeit von der Zeit x darstellen.
Hinweis: Die Substitution $u = e^x + 10$ kann hilfreich sein.
Berechnen Sie die Strauchhöhen beider Sorten zum Zeitpunkt gleicher momentaner Wachstumsgeschwindigkeiten. **25 P**

Arbeiten Sie in jedem Fall mit folgenden Funktionen für die Strauchhöhe weiter:

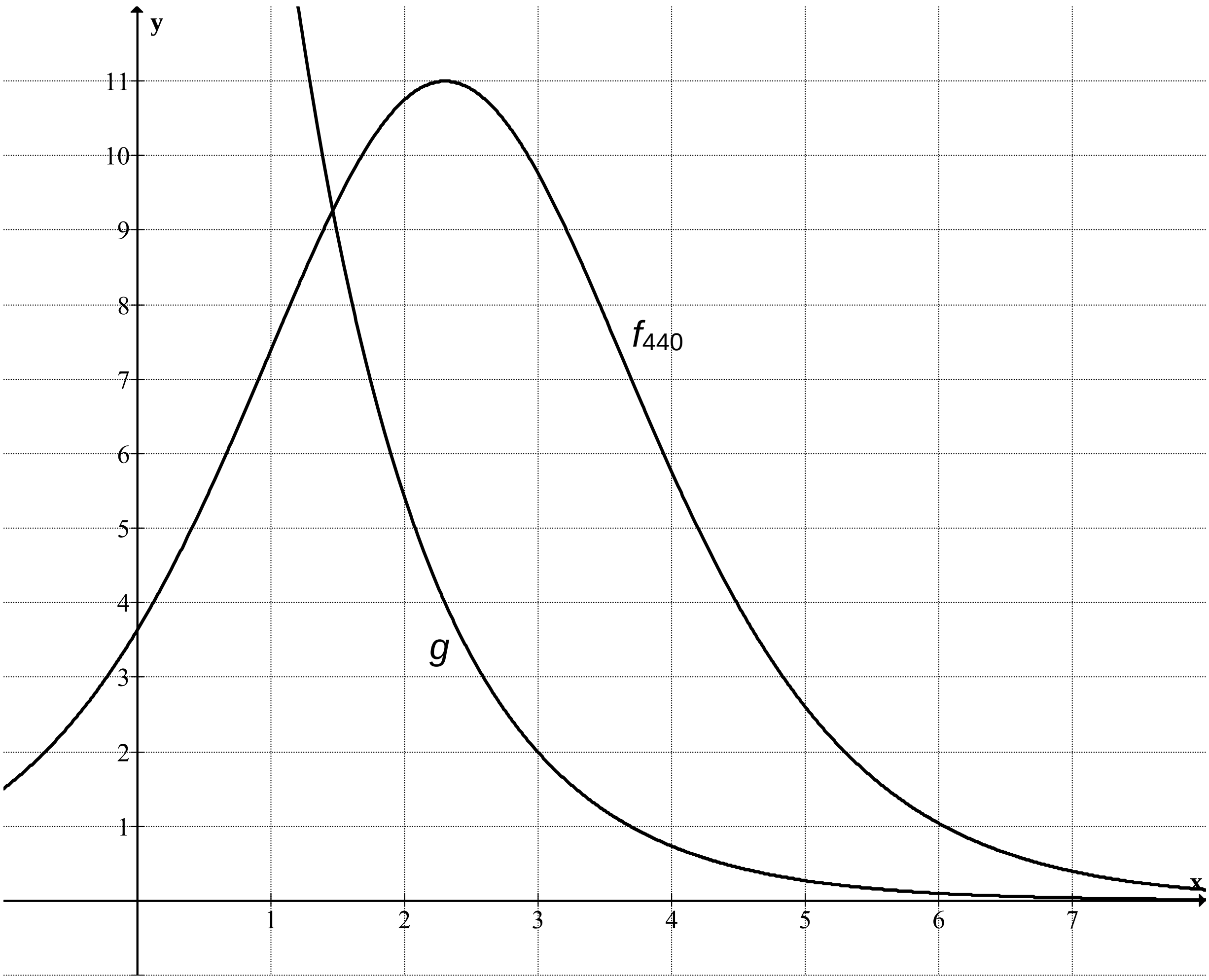
Sorte *F*: $F(x) = \dfrac{44}{10 \cdot e^{-x} + 1}$, Sorte *G*: $G(x) = 44 - 40 \cdot e^{-x}$.

d) Begründen Sie, dass beide Sträucher nach 8 Jahren als ausgewachsen gelten. **15 P**

e) Vergleichen Sie das Wachstumsverhalten beider Sorten (Wachstumsgeschwindigkeit und Höhenentwicklung). Weisen Sie nach, dass die beiden Sorten zu jenem Zeitpunkt den größten Höhenunterschied aufweisen, an dem sich die Graphen der Funktionen f_{440} und g schneiden. **20 P**

f) Die relative Wachstumsgeschwindigkeit w ist definiert als Quotient aus der momentanen Wachstumsgeschwindigkeit eines Strauches und seiner Höhe.
Ermitteln Sie für beide Strauchsorten $w(x)$ und stellen Sie die Funktionsterme möglichst einfach dar. **10 P**

Anlage zur Aufgabe „Hecken"



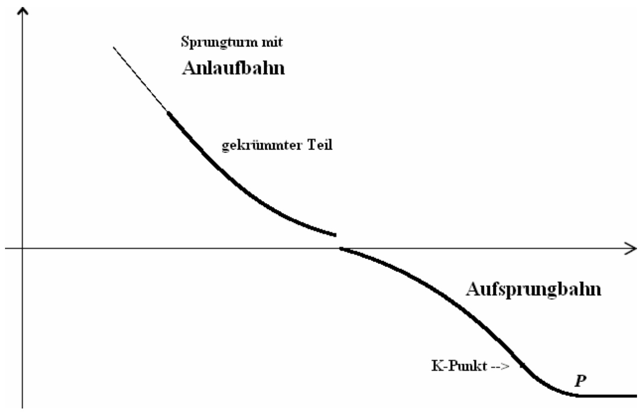
Aufgabe 4 Sprungschanze

Aufgabe aus der schriftlichen Prüfung 2009.

Sie sehen ein Foto sowie schematisch das ungefähre Profil einer Skisprunganlage.

Der Sprungturm mit der Anlaufbahn besteht aus einem geraden Teil und einem gekrümmten Teil.

Zuerst soll der gekrümmte Teil mithilfe eines Teils des Graphen einer geeigneten Funktion modelliert werden. Die x-Achse verlaufe dabei waagerecht.



a) Betrachten Sie dazu zunächst die Funktionsgleichung

$$f_k(x) = e^{-k \cdot x^2}$$

mit $k > 0$.

Untersuchen Sie die Funktionen f_k in Abhängigkeit von k in Bezug auf Symmetrie, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte und Verhalten für $x \to \pm\infty$.

Skizzieren Sie in der Anlage für $k = 1$ und $k = 2$ die zugehörigen Funktionsgraphen. **(20P)**

Vor dem Bau einer Skisprungschanze muss das Schanzenprofil vom Internationalen Skiverband (FIS) geprüft werden, damit die Schanze für internationale Wettbewerbe geeignet ist.
Folgende Daten müssen zur Genehmigung des Schanzenprofils eingehalten werden:

- Am Anfang ist die Anlaufbahn sehr steil, der Steigungswinkel soll etwa –40° betragen.
- Im sich knickfrei anschließenden gekrümmten Teil wird die Anlaufbahn immer flacher bis hin zur Absprungstelle. Dort soll der Steigungswinkel nur noch –10° betragen.

b) Betrachten Sie nun die Funktion f_1 mit der Gleichung $f_1(x) = e^{-x^2}$ und begründen Sie, dass für den gekrümmten Teil der Schanze nur ein Kurventeil rechts vom rechten Wendepunkt in Frage kommt. Zeigen Sie, dass man bei $x_1 = 0{,}8$ beginnen könnte. Bestimmen Sie näherungsweise auf zwei Dezimalstellen genau die Stelle, wo der Anlauf aufhören sollte. Geben Sie einen geeigneten Maßstab an, wenn der gekrümmte Teil in der Realität in horizontaler Richtung gut 90 m messen soll. **(20P)**

c) Bestimmen Sie die durchschnittliche Steigung der Anlaufbahn f_1 im Intervall $[0{,}8\,;\,1{,}72]$ und den zugehörigen Steigungswinkel. **(15P)**

d) Die Konstrukteure der Sprungschanze überlegen, dem Genehmigungsantrag der Sprunganlage eine Konstruktionsvariante beizufügen. Der Wendepunkt der Funktion f_k, also die steilste Stelle, soll sich direkt links am Anfang des gekrümmten Teiles des Anlaufes befinden, wobei an dieser Stelle der Steigungswinkel aber natürlich unverändert –40° betragen muss.
Beurteilen Sie, ob dann der Parameter *k* größer oder kleiner (als 1) gewählt werden muss. **(10P)**

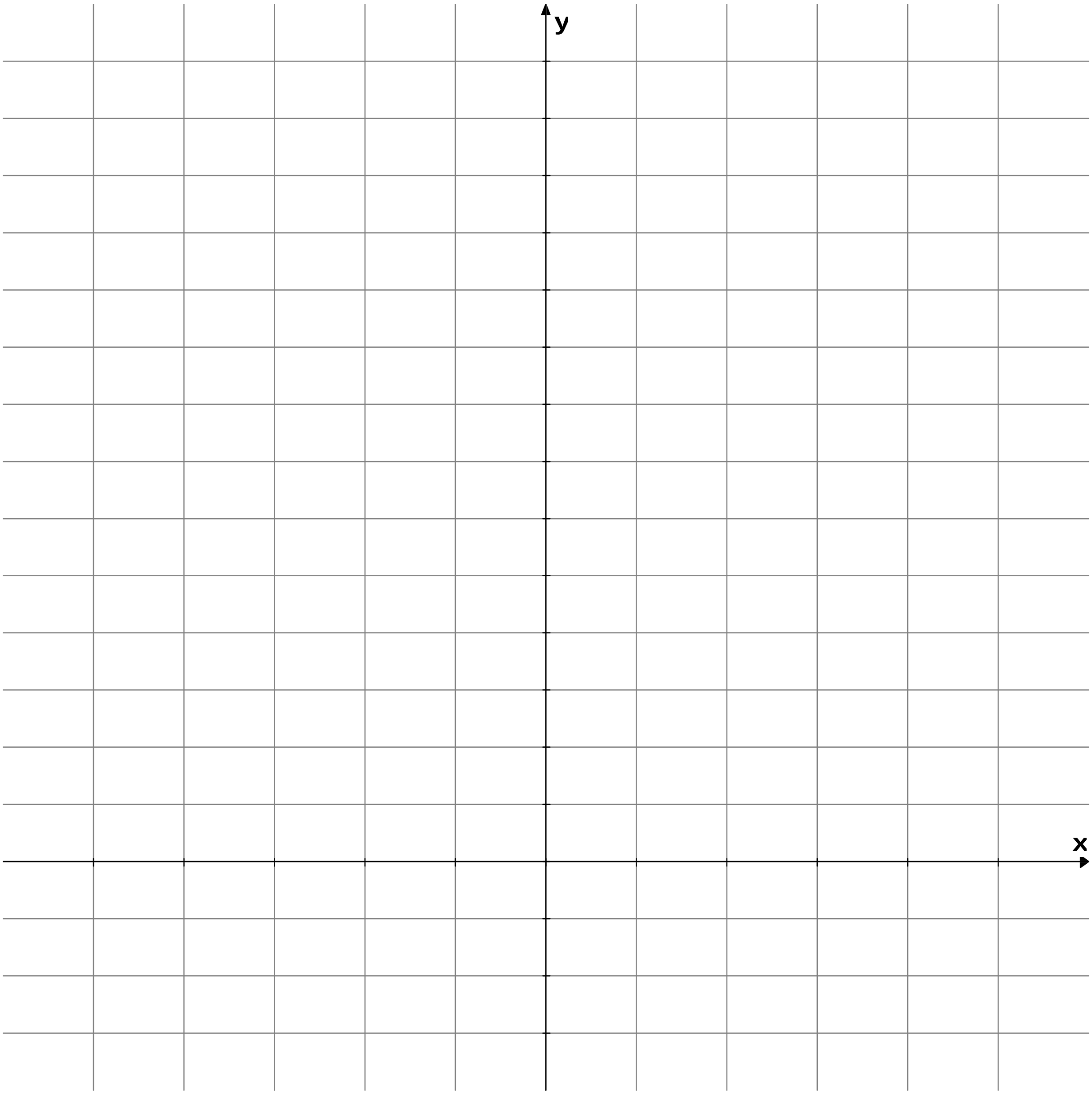
Die Aufsprungbahn, auf der der Skispringer nach seinem Flug landet, besteht aus drei Abschnitten:
Im ersten Abschnitt hat die rechtsgekrümmte Bahn die Form des Teils eines Graphen einer ganzrationalen Funktion 3. Grades mit $a_1(x) = -0{,}069x^3 + 0{,}175x^2 - 0{,}175x + 0{,}14$ mit $x \in [1{,}75\,;2{,}75]$.
Im so genannten Konstruktionspunkt (*K*-Punkt) $K(2{,}75\,|\,a_1(2{,}75))$ geht die Aufsprungbahn in eine linksgekrümmte Bahn a_2 über (zweiter Abschnitt), um dann im Punkt *P* in einer waagerechten Auslaufbahn (dritter Abschnitt) $a_3(x) =$ *konstant* zu enden.
Der zweite Abschnitt der Aufsprungbahn besteht aus einem eingefügten Kreisbogen a_2, dessen Mittelpunkt auf der *x*-Achse liegt.
Die Übergänge zwischen den drei Abschnitten der Aufsprungbahn sollen knickfrei verlaufen.

Hinweis: Übergänge sind ausdrücklich nicht krümmungsgleich.

e) Die Modellvorstellung für den zweiten und dritten Abschnitt der Aufsprungbahn muss noch mathematisiert werden. Hierzu sollen die beiden Funktionsgleichungen für a_2 und a_3 bestimmt werden.
Beschreiben Sie anhand der Vorgaben eine Lösungsstrategie und begründen Sie Ihr Vorgehen.
Bestimmen Sie die Gleichung des Kreisbogens a_2 und die Konstante a_3, wenn – wie schon oben gesagt – der Konstruktionspunkt *K* an der Stelle $x = 2{,}75$ liegt und der Mittelpunkt des Kreisbogens auf der *x*-Achse liegt. **(20P)**

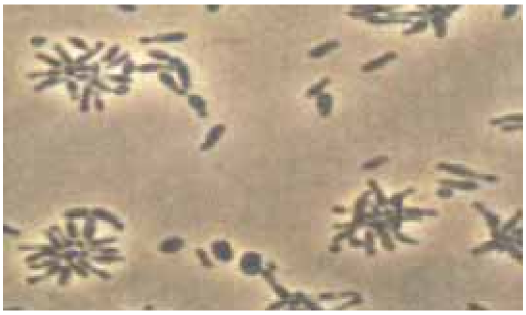
f) Die kritische Sprungweite wird erreicht, wenn eine Landung auf oder hinter dem Konstruktionspunkt *K* erfolgt. Die Sprungweite *w* wird auf der Aufsprungbahn beginnend an der Stelle $x = 1{,}75$ gemessen.
Bestimmen Sie die kritische Sprungweite der zur Zertifizierung eingereichten Schanzenkonstruktion grob mit Hilfe eines Näherungsverfahrens. **(15P)**
Hinweis: Die Bogenlänge w eines Graphen einer Funktion f in $[a\,;\,b]$ *berechnet sich mit* $w = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$. *Sie können aber bei dem gegebenen Funktionsterm von f keine Stammfunktion explizit bestimmen, daher ist eine Näherung erforderlich. Es wird die Keplersche Fassregel empfohlen.*

Anlage zur Aufgabe „Sprungschanze“



Aufgabe 5 Wachstumsverhalten von Bakterien

Aufgabe aus der schriftlichen Prüfung 2009.



Fototrophe Bakterien brauchen Licht für ihren Stoffwechsel; wenn sie im Wasser leben, bevölkern sie also oberflächennahe Wasserschichten, die natürlich auch die sonstigen benötigten Nährstoffe enthalten müssen.

Wenn man wenige solcher Bakterien in ein entsprechend belichtetes Wasserbecken einsetzt, so ist die Wachstumsrate zunächst annähernd linear.

Mit steigendem Bestand allerdings machen die Bakterien selbst das Wasser weniger durchsichtig, so dass schließlich die Wachstumsrate mit dem Bestand zurückgeht.

Die **Wachstumsrate** in Abhängigkeit von der Zeit wird durch die Funktionenschar $f_{a,k}$ mit

$$f_{a,k}(t) = a \cdot t \cdot e^{-k \cdot t} \; , t \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^+$$

beschrieben; t bezeichnet dabei die Zeit in beliebigen, aber festen Einheiten.

a) Begründen Sie, dass die Funktionen dieser Funktionenschar zur Modellierung der beobachteten Situation geeignet sind, das heißt, beschreiben Sie das Verhalten der Funktionen für kleine und für große t und vergleichen Sie dies mit dem geschilderten Sachkontext. Beschreiben Sie den Einfluss der beiden Parameter k und a auf das Aussehen der Graphen. **(15P)**

Für die Untersuchung der Eigenschaften der Funktionenschar wird zunächst $a = 1$ gesetzt.

b) Berechnen Sie den Zeitpunkt des stärksten Wachstums und die Wachstumsrate zu diesem Zeitpunkt. **(10P)**

c) Man kann sagen, dass die Wirkung der Wassertrübung etwa ab der Wendestelle der Funktion überhand nimmt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes in Abhängigkeit von k und beschreiben Sie die Bedeutung dieser Stelle zusammen mit der Stelle stärksten Wachstums im Sachkontext der Aufgabe. **(10P)**

d) Zeigen Sie, dass zur Funktionenschar $f_{1,k}$ die Funktionenschar $F_{1,k}$ mit

$F_{1,k}(t) = \dfrac{1-(1+k \cdot t) \cdot e^{-k \cdot t}}{k^2}$ gehört, bei der jeweils $F_{1,k}$ eine Stammfunktion von $f_{1,k}$ ist und für alle $F_{1,k}$ gilt: $\lim\limits_{t \to 0} F_{1,k}(t) = 0$.

Beschreiben Sie die Bedeutung der Funktionenschar $F_{1,k}$ im Sachkontext.

Zeigen Sie, dass für jedes k die Funktion $F_{1,k}$ für $t \to \infty$ gegen eine endliche Zahl geht und bestimmen Sie diesen Grenzwert in Abhängigkeit von k.

Beschreiben Sie die Bedeutung des Grenzwerts im Kontext der Aufgabe. **(20P)**

e) Zeichnen Sie $f_{1;0,5}$ und $F_{1;0,5}$ im Bereich $0 < t \leq 10$ in das Koordinatensystem in der Anlage. **(10P)**

Nun geht es wieder um Bakterien. Wir lösen uns von dem Sonderfall $a = 1$.
Bei einem solchen Wachstums-Experiment im Rahmen eines Forschungsauftrags ergab sich ein Endbestand von 120 Bakterien (pro cm³), die Zeitkonstante k wurde zu $k = 0{,}7/h$ bestimmt.
Die Zeit t wird in Stunden gemessen.

f) Um dieses Experiment zu modellieren, muss jetzt der Parameter a in der Funktionenschar $F_{a,k}$ mit $F_{a,k}(t) = \dfrac{a - a \cdot (1 + k \cdot t) \cdot e^{-k \cdot t}}{k^2}$ angepasst werden.

Ermitteln Sie aus den obigen Angaben den Wert des Parameters a für die beschreibende Funktion $F_{a;\,0,7}$.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst den Grenzwert von $F_{a,k}$ für $t \to \infty$.

Zeigen Sie, dass die Wachstumsrate der Bakterien nach sechs Minuten noch nicht wesentlich von einer rein linearen Wachstumsrate abgewichen ist.

Bestimmen Sie mit einem Näherungsverfahren Ihrer Wahl auf eine Nachkommastelle genau, nach welcher Zeit die Bakterienzahl auf 90 % des Endbestands angestiegen ist. **(15P)**

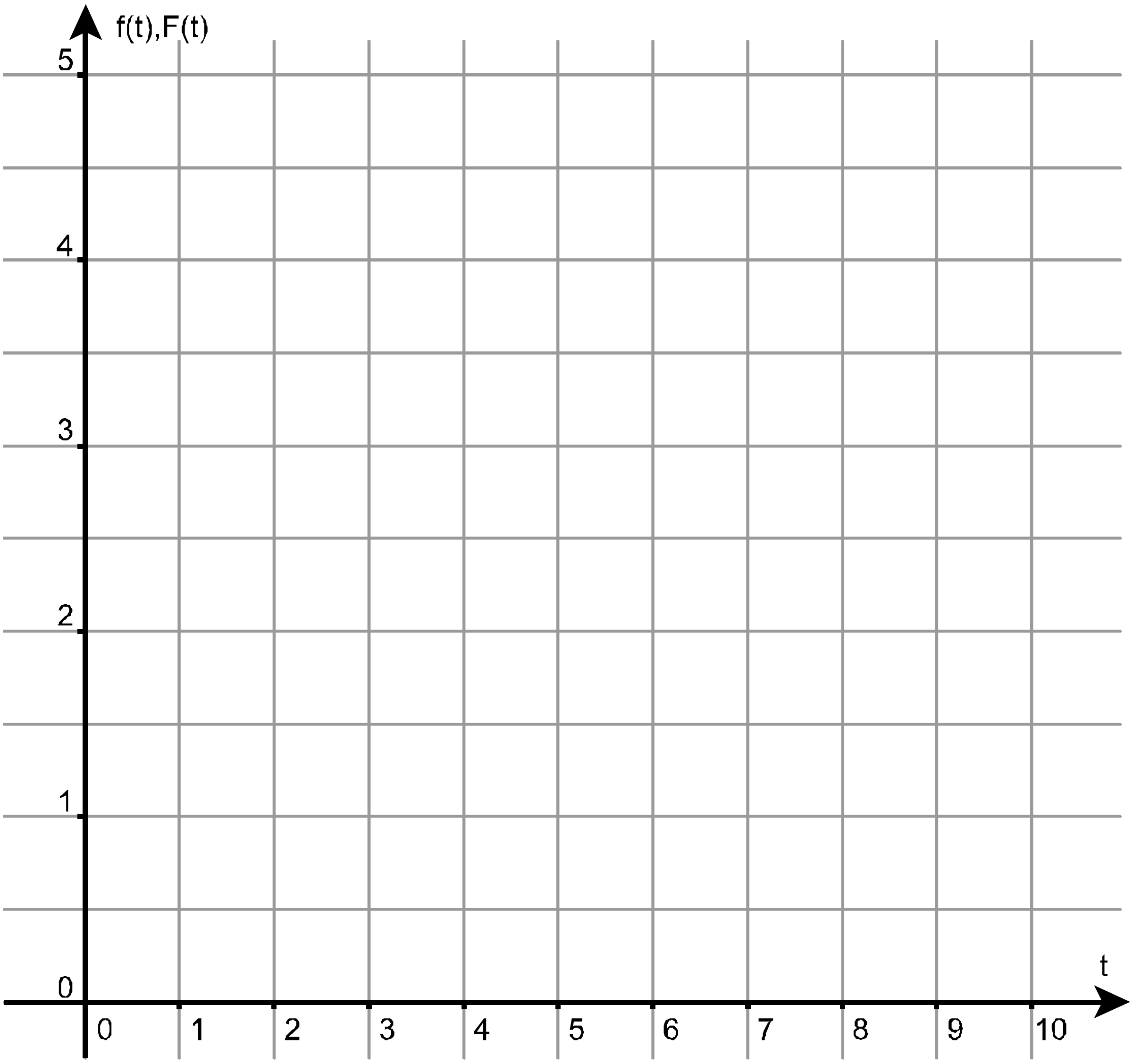
Ein Doktorand wurde bei dem Forschungsauftrag mit der Frage betraut, welchen Einfluss eine viertelstündige Unterbrechung der Lichtzufuhr auf den Bestand der Bakterien hat.

g) Beurteilen Sie die Auswirkungen auf die Wachstumsrate und auf den Bestand für die beiden folgenden Hypothesen und skizzieren Sie für beide Fälle die jeweiligen Graphen für den Bestand:

(1) Während der Dunkelheit geschieht mit den Bakterien gar nichts.

(2) Während der Dunkelheit nimmt die Zahl der Bakterien exponentiell ab. **(20P)**

Anlage zur Aufgabe „Wachstumsverhalten von Bakterien“



Aufgabe 6 Funktionenschar exponentieller Funktionen

Aufgabe aus der schriftlichen Abiturprüfung Hamburg 2005.

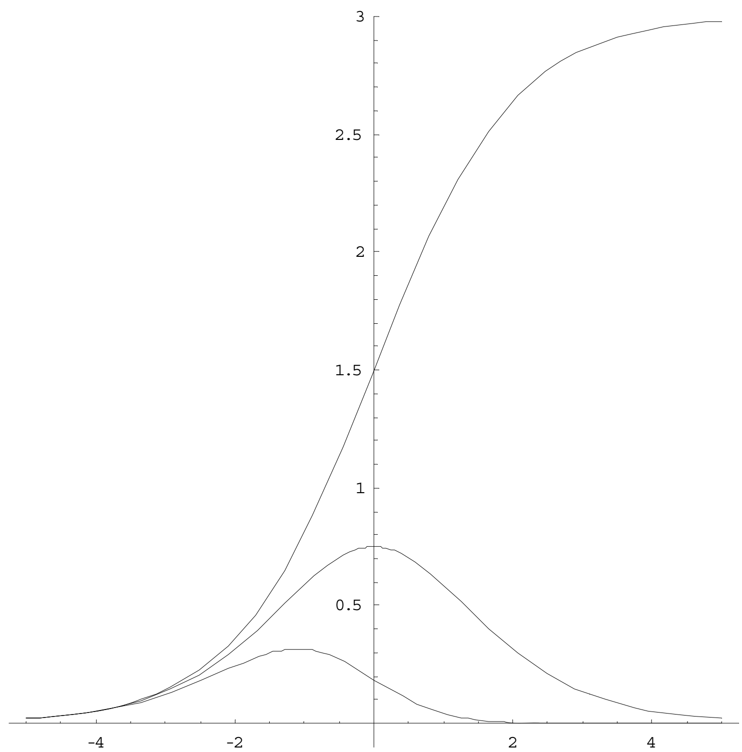
Gegeben ist die folgende Funktionenschar f_n mit:

$$f_n(x) = \frac{3 \cdot e^x}{(1+e^x)^n} \ , \ n \in \{1; 2; ...\} \ , \ x \in \mathbb{R} \, .$$

a) Die nebenstehende Abbildung zeigt die Graphen für drei Funktionen dieser Schar. Bestimmen Sie die Zahlenwerte des Parameters n für die jeweilige Funktion.

Verwenden Sie dazu die Schnittpunkte der Graphen mit der y-Achse.

Beachten Sie:
n ist eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$.



b) Beschreiben Sie die Funktionen der Schar auf ihr Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

c) Weisen Sie nach, dass F_n mit

$$F_n(x) = \frac{3 \cdot (1+e^x)^{1-n}}{1-n}$$

für jedes $n \in \{2; 3; ...\}$ eine Stammfunktion der Funktion f_n ist.

d) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen der Funktionen f_2 und f_3 im gesamten Bereich $x < 0$.

HINWEIS: Keine zwei Funktionen der Schar haben einen gemeinsamen Punkt.

e) Zeigen Sie,

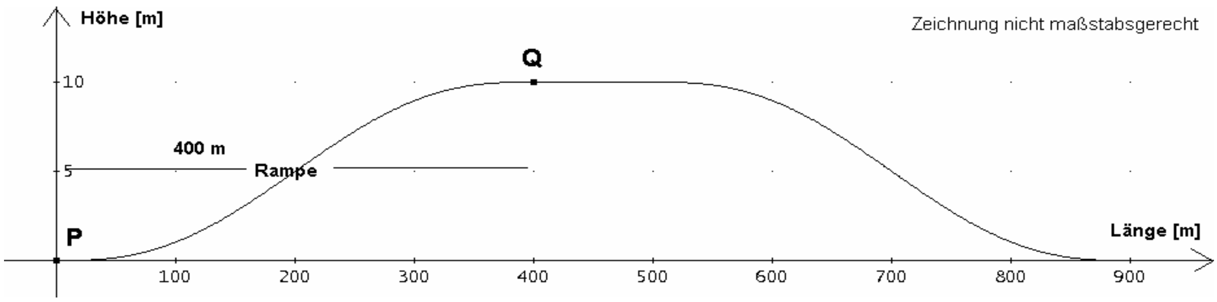
- dass f_2 symmetrisch zur y-Achse ist.
- dass der Graph von f_1 punktsymmetrisch zu seinem Schnittpunkt mit der y-Achse ist,

Begründen Sie, dass für $n \geq 3$ kein weiterer Graph symmetrisch zur y-Achse ist.

Aufgabe 7 Überführung

Aufgabe aus der schriftlichen Prüfung 2005.

Im flachen Friesland soll eine Bahnstrecke einen Kanal auf einer Brücke überqueren. Die Strecke auf der Brücke ist 100 m lang und verläuft ebenso horizontal wie die Strecken auf dem Boden. Die Strecke auf der Brücke liegt 10 m über dem Bodenniveau. Für den Übergang vom Boden auf die Brücke, die so genannte Rampe, haben die Bauplaner zunächst eine Rampenlänge r = 400 m in der Horizontalen vorgesehen. Die Steigungsstrecke links beginnt im Punkt P und endet im Punkt Q.



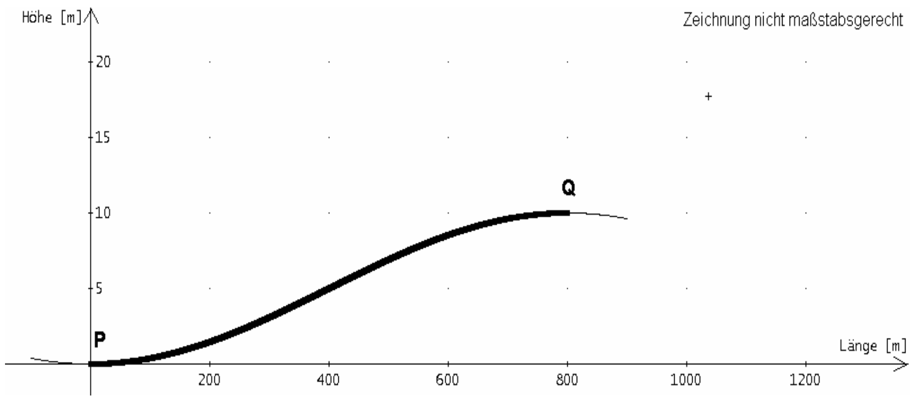
Ein Bahnexperte begutachtet die Planung und macht darauf aufmerksam, dass Eisenbahnstrecken eine maximale Steigung von 2,4 % aufweisen dürfen, damit die antreibenden Räder nicht rutschen.

a) Begründen Sie mit Argumenten aus der Anschauung, dass dieser Wert bei einer Rampenlänge von r = 400 m keinesfalls einzuhalten ist, unabhängig davon, wie die Rampentrasse geführt wird.

Die Rampenlänge r wird daraufhin in den weiteren Planungen auf **800 m** verlängert.

b) Ein Bauplaner vertritt die Idee, die Rampe darzustellen durch eine „getrimmte“ Kosinusfunktion k vom Typ

$$k(x) = a \cdot \cos(b \cdot x) + c$$



- Ermitteln Sie die konkrete Funktionsgleichung für die Rampe.
- Bestimmen Sie die maximale Steigung dieser Rampe und interpretieren Sie das Ergebnis.

Wieder meldet der Eisenbahnexperte Bedenken an: Er behauptet, dass an den Übergangspunkten P und Q bei schneller Fahrt ein Ruck durch den Zug gehen würde, weil „Krümmungssprünge" vorlägen. Um das zu vermeiden, müssten deshalb die 1. und 2. Ableitung der aneinander stoßenden Trassen an den Übergangsstellen übereinstimmen.

c) Untersuchen Sie, weshalb bei dem Kosinus-Entwurf Krümmungssprünge auftreten.

d) Damit auch diese Bedenken des Eisenbahnexperten ausgeräumt werden können, soll nun die Rampe durch eine ganzrationale Funktion h dargestellt werden.

Um deren Koeffizienten handhabbar zu machen, verkürzen Sie den Maßstab in x-Richtung um den Faktor 800. Wählen Sie also jetzt für die Punkte P und Q die Koordinaten $\boldsymbol{P(0 \mid 0)}$ und $\boldsymbol{Q(1 \mid 10)}$. Berechnete Steigungen sind dann um den Faktor 800 zu groß, sie müssen deshalb für die tatsächliche Trasse durch 800 geteilt werden.

- Begründen Sie, dass die Funktion h mindestens den Grad 5 haben muss.
- Untersuchen Sie, welche der Koeffizienten von h Null sein müssen.
- Bestimmen Sie den Funktionsterm von h.
- Bestimmen Sie die tatsächliche maximale Steigung dieser Rampe und interpretieren Sie das Ergebnis.

e) Der Eisenbahnexperte ist nun zufrieden, aber den sparsamen Planern fällt auf, dass man die Rampe noch verkürzen könnte, ohne dass sie zu steil würde. Erläutern Sie einen mathematischen Weg, den man (bei Beibehaltung einer ganzrationalen Funktion 5. Grades) gehen könnte, um die minimal mögliche Rampenlänge r zu finden. Die Rechnungen sollen nicht ausgeführt werden.

Aufgabe 8 Minigolfbahn

Aufgabe aus der schriftlichen Abiturprüfung Hamburg 2005.

Bei einer Minigolfanlage soll eine Bahn mit einer Kurve angelegt werden. Der Ball läuft bis zur Kurve geradeaus (seine Einlaufstrecke), und nach dem Verlassen der Kurve läuft er wiederum geradeaus (seine Auslaufstrecke). In der Kurve führt die Bande den Ball. Die Form dieser Bande soll modelliert werden.
Der Beginn der Bande – der Einlaufpunkt in die Kurve – heißt E, das Ende der Bande – der Auslaufpunkt aus der Kurve – entsprechend A.

Dabei werden von den Planern zunächst folgende Forderungen gestellt:

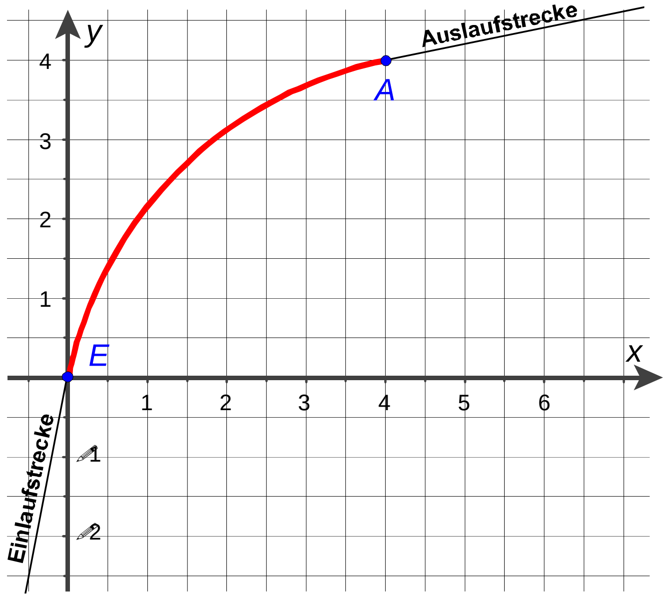
i) Der Einlaufpunkt E liegt im Koordinatenursprung.

ii) Der Auslaufpunkt A hat die Koordinaten (4 | 4).

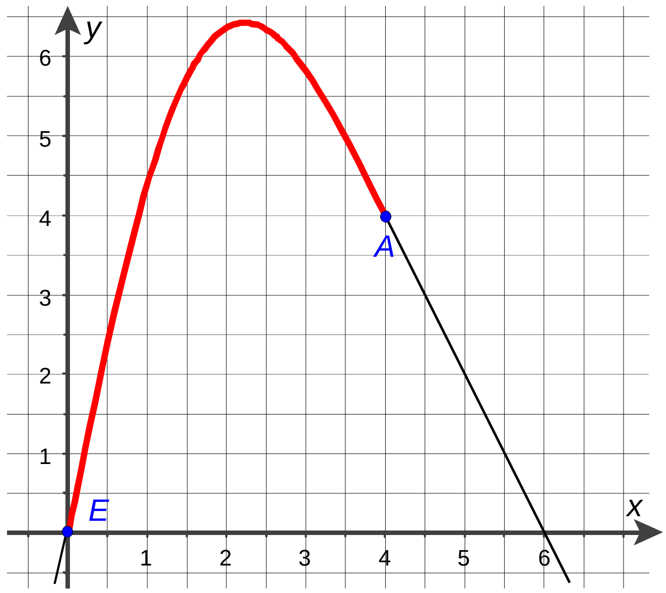
iii) Die Einlaufstrecke hat die Steigung 5 und läuft bei E tangential in die Bandenkurve ein, die Auslaufstrecke schließt bei A tangential an die Bandenkurve an.

a) Als erstes wird versucht, die Bandenkurve einfach durch einen Kreisbogen zu realisieren (vgl. nebenstehende Abbildung).

Zeigen Sie mit Hilfe geeigneter Rechnungen oder geometrischer Konstruktionen, dass der Mittelpunkt dieses Kreisbogens die Koordinaten (5 |–1) haben muss und die Auslaufstrecke dann zwangsläufig die positive Steigung $\frac{1}{5}$ hat.



Fortsetzung nächste Seite →



b) Der Ball soll aber stärker umgelenkt werden. (vgl. nebenstehende Abbildung). Die Auslaufstrecke soll deshalb eine negative Steigung haben, so dass also der Kreisbogen aus a) nicht verwendbar ist. Die Planer wünschen:

iv) Die Auslaufstrecke hat die Steigung –2.

- Bestimmen Sie den Winkel zwischen der gewünschten Einlauf- und Auslaufrichtung.

- Begründen Sie, dass alle vier Bedingungen i) – iv) durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades eindeutig erfüllt werden können, und bestimmen Sie die Gleichung dieser Funktion *f*.

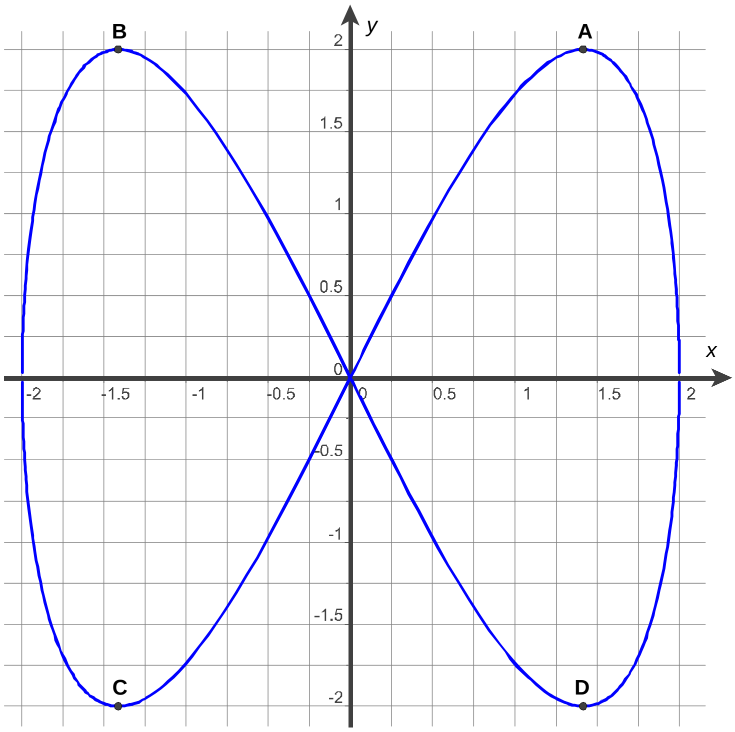
- Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunktes von *f* und zeigen Sie, dass auf dem Graphen von *f* zwischen *E* und *A* kein Krümmungswechsel stattfindet.

Die Bahn wird wie in b) beschrieben gebaut. Da aber beim Einlaufpunkt *E* und beim Auslaufpunkt *A* die zweite Ableitung der Bahnkurve nicht existiert bzw. einen Sprung macht, tritt deshalb leider auch jeweils eine sprunghafte Änderung der Krümmung auf (was den Lauf des Balls stört). Darum soll die Bahn derart verändert werden, dass im Einlaufpunkt *E* und im Auslaufpunkt A jeweils der Sprung der zweiten Ableitung vermieden wird und trotzdem alle vier Forderungen i) – iv) erfüllt werden.

c) Begründen Sie, dass alle diese Forderungen zusammen durch eine ganzrationale Funktion 5. Grades erfüllt werden können.

Bestimmen Sie die Gleichung dieser Funktion.

Aufgabe 9 Schulhofgestaltung



Ein Mathematikkurs soll im Rahmen eines Projektes Vorschläge für die Neugestaltung des Schulhofes vorlegen. Die Schüler und Schülerinnen schlagen vor, eine Fahrradbahn zu bauen. Es wird die nebenstehende Skizze vorgelegt.
(Die Breite der Bahn soll nicht berücksichtigt werden.)

Maßstab: 1 Einheit entspricht 10 m

a) Begründen Sie, dass die Bahn durch eine Gleichung der Form $y^2 = a \cdot x^2 - x^4$ $(a > 0)$ beschrieben werden kann,
bestimmen Sie den Wert von a und ermitteln Sie für diesen Wert die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, sodass ebenfalls $y \in \mathbb{R}$.

b) Begründen Sie, warum zum Beschreiben der Bahn mit Hilfe von Funktionen zwei Funktionen f und g benötigt werden und geben Sie begründend deren Funktionsterme $f(x)$ und $g(x)$ an.

Die folgenden Überlegungen sollen für $a = 4$ durchgeführt werden.

c) Untersuchen Sie die Umgebung der gemeinsamen Punkte der Funktionen f und g im Hinblick auf „Knicks" im Bahnverlauf.
Begründen Sie, warum man mit dem Fahrrad die Bahn von A nach C und dann nach B und D und nicht in der Reihenfolge von A nach B und dann nach C und D durchfahren sollte, wenn man mit hoher Geschwindigkeit fahren möchte.

d) Auf der eingeschlossenen, rechten Teilfläche soll ein Baum gepflanzt werden. Bestimmen Sie die Koordinaten des Pflanz-Punktes so, dass dieser Punkt in y-Richtung jeweils den gleichen maximalen Abstand zur Bahn hat. Berechnen Sie diesen Abstand.

e) Die eingeschlossene Gesamtfläche soll mit Rasen eingesät werden. Wie groß ist die Samenmenge, die gekauft werden muss, wenn man pro m² 25g benötigt?

f) Aus Platzgründen muss die Bahn doch verkleinert werden und zwar so, dass der in y-Richtung am weitesten entfernte Punkt nicht mehr 20 m sondern 15 m von der x-Achse entfernt ist. Die Form der Bahn soll beibehalten werden.
Welche Auswirkungen hat diese Maßnahme auf die Funktionsterme von f und g, auf den Bahnverlauf in der Umgebung der gemeinsamen Punkte, auf das Pflanzloch für den Baum und auf die Größe der Rasenfläche?
Bestimmen Sie die Veränderungen ohne viel zu rechnen und beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

Aufgabe 10 Tumorwachstum

Quelle: Jahnke/Wuttke, Mathematik - Analysis, Cornelsen.

Für viele Tumorarten kann das Wachstum der Größe eines Tumors durch die folgenden beiden Gleichungen beschrieben werden:

(1) $V'(t) = r(t) \cdot V(t)$ und (2) $r'(t) = -c \cdot r(t)$.

Dabei stehen t für die Zeit ($t \geq 0$), $V(t)$ für das Tumorvolumen zur Zeit t und $r(t)$ für die Wachstumsrate des Tumors zur Zeit t. c ist eine positive Konstante.

a) Ermitteln Sie diejenigen Funktionen r, die Lösungen der Gleichung (2) sind.

Zeigen Sie, dass die Funktion $V(t) = V(0) \cdot e^{\frac{b}{c} \cdot \left(1 - e^{-c \cdot t}\right)}$ eine Lösung der Gleichung (1) ist, wenn b die anfängliche Wachstumsrate bezeichnet ($b = r(0)$ mit $b > 0$).

b) Nun sollen Sie einige Eigenschaften der Funktion V erforschen.

- Sei zunächst $V(0) = 5$, $b = 1$ und $c = 0{,}8$.
  Untersuchen Sie diese spezielle Funktion mit geeigneten Mitteln so, dass Sie eine Skizze des Graphen der Funktion V anfertigen können und skizzieren Sie den Graphen.

- Untersuchen Sie unter Bezugnahme auf Ihre eben gewonnenen Erkenntnisse, welche Eigenschaften eine beliebige Funktion V in Abhängigkeit von b und c hat.

c) Interpretieren Sie die Gleichungen (2) und (1).
Welche Aussagen kann man über das Tumorwachstum nach diesem Modell machen?

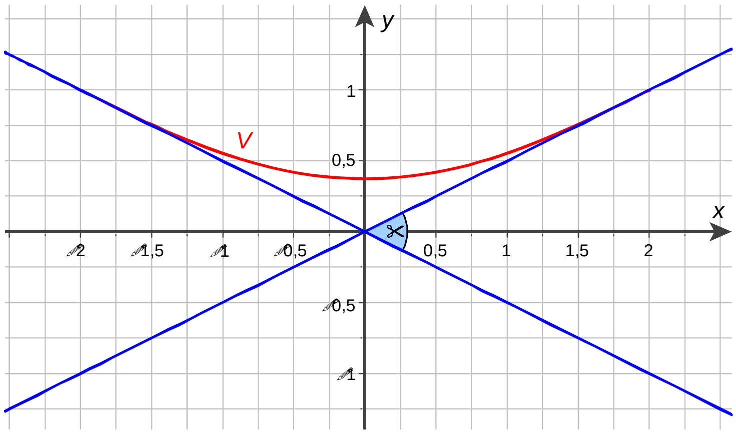
d) Die Modellierung des Tumorwachstums mit der Funktion V von Aufgabenteil a) beginnt mit der Entdeckung des Tumors. Für diesen Zeitpunkt wird $t = 0$ festgesetzt.
Will man feststellen, ob das Modell auch bei einer besonders frühen Entdeckung noch die Realität hinreichend genau beschreibt, muss man Kenntnisse über Eigenschaften der Funktion V für $t < 0$ haben.

Beschreiben Sie diese Eigenschaften auch unter Verwendung Ihrer Erkenntnisse von Aufgabenteil b).

Aufgabe 11 Straßenkreuzung

Die Aufgabe entspricht mit kleinen Veränderungen der Abituraufgabe LK 2001/3 aus Baden-Württemberg.

Zwei geradlinig verlaufende Straßen bilden an ihrer Kreuzung einen Winkel α von etwa 53°. Diese Kreuzung soll durch ein zusätzliches Straßenstück entlastet werden. Die Situation kann in einem geeigneten Koordinatensystem durch zwei Geraden und eine Verbindungskurve V dargestellt werden. (Siehe Skizze, Maßstab: 1 Einheit entspricht 1 km.)



Dabei soll die Verbindungskurve V durch den Graphen einer Funktion f beschrieben werden.
V mündet an den Stellen -2 und 2 ohne Knick und ohne Krümmungssprung in die Geraden ein und endet dort.
Hinweis: Ohne Krümmungssprung bedeutet, dass die Bedingungen $f''(-2) = f''(2) = 0$ gelten.

a) Zeigen Sie, dass man für die beiden Geraden der Straßenkreuzung die beiden Funktionen g_1 mit $g_1(x) = \frac{1}{2}x$ und g_2 mit $g_2(x) = -\frac{1}{2}x$ verwenden kann.

- Welchen Bedingungen muss die Funktion f genügen, damit gewährleistet ist, dass die Verbindungskurve V ohne Knick und ohne Krümmungssprung in die Geraden g_1 und g_2 übergeht? Erläutern Sie Ihre Ansätze.
- Zeigen Sie nun, dass $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ einen möglichen Ansatz darstellt, wenn alle eben geforderten Bedingungen erfüllt sein sollen, und bestimmen Sie f für den vorliegenden Fall.

b) Ein weiterer Vorschlag sieht als Verbindungskurve den Graphen der Funktion h vor mit $h(x) = 1 + \ln(\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2})$.
Prüfen Sie, ob diese Verbindungsfunktion h ebenfalls die Bedingungen aus Aufgabenteil a) erfüllt.
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h als Verbindungskurve und die Geraden g_1 und g_2 aus dem Aufgabenteil a) in ein geeignetes Koordinatensystem.

c) Die beiden Vorschläge aus den Teilaufgaben a) und b) sollen hinsichtlich des Landschaftsverbrauchs verglichen werden, indem jeweils der Inhalt des Flächenstücks, das von den beiden Geraden g_1 und g_2 und der Verbindungskurve eingeschlossen wird, bestimmt wird.

- Berechnen Sie für den Vorschlag mit der Verbindungsfunktion f aus dem Aufgabenteil a) den Inhalt dieses Flächenstücks exakt.
- Berechnen Sie für den Vorschlag mit der Verbindungsfunktion h aus dem Aufgabenteil b) den Inhalt dieses Flächenstücks numerisch (8 Teilintervalle reichen).

d) Erstellen Sie einen dritten Vorschlag für eine Verbindungsfunktion t auf der Grundlage einer trigonometrischen Funktion.

Aufgabe 12 Energiebedarf

Die Aufgabe entspricht inhaltlich der Abituraufgabe LK 2001/2 aus Baden-Württemberg.

Gegeben sind die Funktionen g und f durch

$$g(x) = \frac{2}{1+e^{1-x}} \quad \text{und} \quad f(x) = \frac{2}{1+e^{x}}, \quad \text{jeweils } x \in \mathbb{R}.$$

a) Weisen Sie nach, dass die Funktion g die Differentialgleichung
$g'(x) = \frac{1}{2} g(x) \cdot [2 - g(x)]$ erfüllt.
Beschreiben Sie die Form des Wachstums, das durch die Funktion g dargestellt wird?
Geben Sie dabei charakteristische Eigenschaften dieser Wachstumsform an.

b) Untersuchungen haben ergeben, dass die momentane Änderungsrate des Energiebedarfs (in 10^8 kWh/Jahr) eines Landes seit 1990 in guter Näherung durch $g(x)$ mit $x \geq 0$ (x: Zeit in Jahren ab Anfang 1990) beschrieben werden kann.
Zu welchem Zeitpunkt erreicht diese momentane Änderungsrate 98 % ihres Sättigungswertes?
In welchem Jahr verlangsamt sich erstmals die Zunahme der momentanen Änderungsrate des Energiebedarfs?
Berechnen Sie den gesamten Energiebedarf im Zeitraum von Anfang 1990 bis Ende 2000.

Nun werden Eigenschaften der Funktion f und ihre Beziehung zu g untersucht.

c) Ermitteln Sie die Asymptoten und den Wendepunkt des Graphen von f.
Untersuchen Sie das Monotonieverhalten und geben sie den Wertebereich von f an.
Zeichnen Sie den Graphen von f samt Asymptoten.

d) Zeigen Sie, dass der Graph von g aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der Geraden $x = \frac{1}{2}$ entsteht.
Fügen Sie eine Skizze des Graphen von g in Ihr Koordinatensystem aus Teilaufgabe c) ein.
Bestimmen Sie den Wertebereich und das Monotonieverhalten von g sowie den Wendepunkt des Graphen von g.

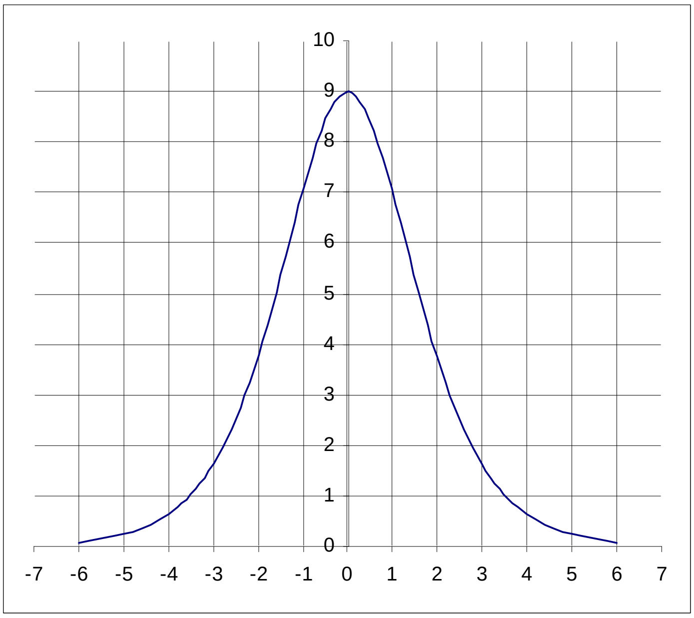
Aufgabe 13 Schimmelpilz

Dieser Aufgabe liegt die Leistungskurs-Aufgabe 2002/2 aus dem Zentralabitur Baden-Württemberg zu Grunde.

Für jedes $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = \frac{a \cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f_a.



a) Bestimmen Sie den Zahlenwert des zugehörigen Parameters a.

b) Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = e^x, \; x \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes der Graphen von f_{36} und g.

Für welche Werte von a hat der Graph von f_a mit dem Graphen der Funktion g einen Punkt gemeinsam? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie diesen Punkt an.

c) Zeigen Sie: Für jedes $a \neq 0$ gilt: $f_a(x) = f_a(-x), \; x \in \mathbb{R}$.

Der Graph von f_a und die x-Achse begrenzen eine beidseitig ins Unendliche reichende Fläche. Zeigen Sie, dass diese Fläche einen endlichen Flächeninhalt hat.

d) Durch $F(t) = \dfrac{36e^t}{1+e^t}$ wird der Inhalt der Fläche beschrieben, die ein Schimmelpilz auf einer Brotscheibe bedeckt. Dabei wird t in Tagen seit Beobachtungsbeginn und $F(t)$ in cm^2 gemessen.

Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an welchem sich der Schimmelpilz am schnellsten ausbreitet.

Bestimmen Sie die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Weisen Sie nach, dass F eine Differentialgleichung der Form

$$F'(t) = k \cdot F(t) \cdot \left[G - F(t)\right]$$

erfüllt.

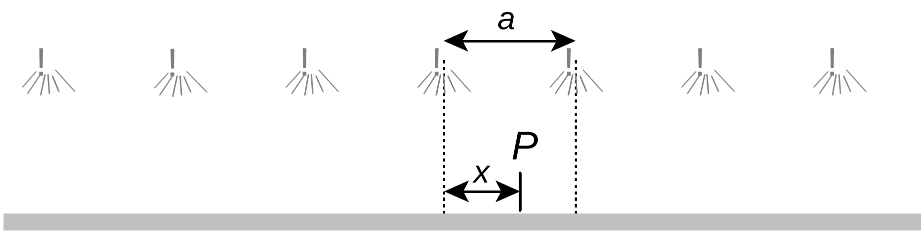
Skizzieren Sie den Graphen von F für $-5 \leq t \leq 5$.
Beschreiben Sie die Form des Wachstums, das durch die Funktion F dargestellt wird.

Geben Sie dabei charakteristische Eigenschaften dieser Wachstumsform an.

Aufgabe 14 Beleuchtung

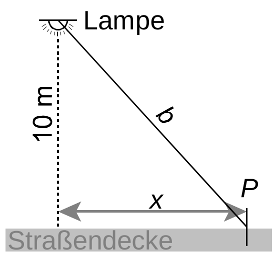
Aus der Aufgabe 3 , „Centralexamen 1998, Wiskunde A“, 1. Termin, (Niederlande), abgeleitete Aufgabe.

Bei der Installation einer Straßenbeleuchtung soll zumeist sicher gestellt sein, dass es überall entlang des erleuchteten Weges ungefähr gleich hell und zwischen zwei Leuchten nicht erheblich dunkler als direkt unter einer Leuchte ist. Um dies zu erreichen, könnte man die Leuchten in besonders kurzen Abständen aufstellen, was dann aber zu unvertretbar hohen Kosten führen würde.



Für einen neu anzulegenden Weg möchte man optimale Lichtverhältnisse zu vertretbaren Kosten schaffen. Die Leuchten sollen in gleichen Abständen stehen, der Abstand zwischen zwei Leuchten ist a (in Meter). Eine Person im Punkt P zwischen den Leuchten hat vom Lot der linken Leuchte auf die Straße den Abstand x Meter (siehe Skizze).

Die Person im Punkt P bekommt Anteile vom Licht der beiden benachbarten Leuchten, aber auch etwas von weiter entfernten.



Der Abstand der Lampe zu einem Punkt P auf der Straßendecke ist b (in Meter). In unserem Modell sollen die Lampen jeweils 10m über der Straßendecke montiert sein. Die nebenstehende Skizze beschreibt also pro Lampe die geometrischen Verhältnisse.

Die Beleuchtungsstärke im Punkt P bezogen auf eine Lampe nennen wir S (in Lux).

Für S gilt: $S(b) = \dfrac{100.000}{b^3}$

a) Bestimmen Sie den Definitions- und Wertebereich von $S(b)$ und geben Sie begründend an, wie sich S(b) in diesem Intervall verhält.

b) Berechnen Sie den Abstand x, falls die Beleuchtungsstärke S (bezogen auf eine Lampe) im Punkt P halb so groß ist wie direkt unter der Lampe.

c) Für Berechnungen zur Ausleuchtung der Straße ist die Angabe der Beleuchtungsstärke in Abhängigkeit von x sinnvoller. Leiten Sie einen Term $S_2(x)$ her, der diesen Sachverhalt beschreibt.

d) Der Abstand a zwischen je zwei Leuchten soll a = 20 m betragen. Der Punkt P soll sich – wie in der Skizze oben auf der Straßendecke befinden und vom Fußpunkt des Lotes einer Leuchte auf die Straßendecke den Abstand 6 m haben.
Bestimmen Sie einen sinnvollen Näherungswert für die Gesamtbeleuchtungsstärke im Punkt P. Ermitteln Sie verschiedene Näherungswerte, indem Sie die Anzahl der Leuchten sinnvoll variieren.

Fortsetzung nächste Seite →

e) Leiten Sie für die Baubehörde einen konkreten Vorschlag für eine 200 m lange Straße mit Begründungen für Ihre Lösung her. Dabei soll die Straße überall hinreichend hell beleuchtet sein – dies ist der Fall, wenn die Beleuchtungsstärke zwischen 90 Lux und 100 Lux beträgt - und die Kosten vertretbar bleiben.

f) Bestimmen Sie mit Hilfe einer numerischen Integration eine Näherung für $\int_0^{20} S_2(x)dx$.

g) Welche Bedeutung hat der Zahlenwert $2 \cdot \frac{\int_0^{20} S_2(x)dx}{20}$?

Aufgabe 15 Luftvolumen der Lunge

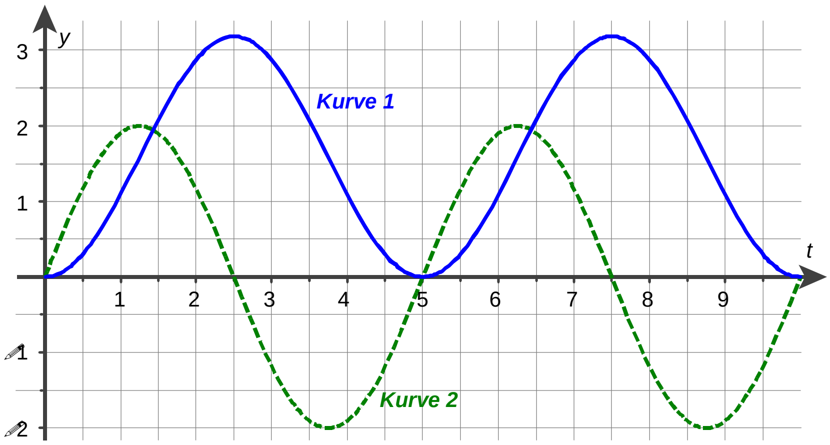
Die Aufgabe basiert auf einer Beispielaufgabe in den Einheitlichen Prüfungsanforderungen der KMK (EPA vom Mai 2002).

Die momentane Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge eines Menschen kann durch die Funktion f mit $f(t) = 2\cdot\sin(\frac{2}{5}\pi\cdot t)$ modelliert werden (dabei ist t Zeit in Sekunden, $f(t)$ in Liter pro Sekunde angegeben).
Wir nehmen vereinfachend an, dass zur Zeit $t = 0$ keine Luft in der Lunge ist.

a) Geben Sie die Bedeutung der Funktion F mit $F(t)=\int_0^t f(x)dx$ im Kontext der Aufgabe an.

Bestimmen Sie das Integral und damit $F(t)$.

b) Das nachfolgende Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge und den zeitlichen Verlauf der momentanen Änderungsrate des Luftvolumens.



Geben Sie an, welche der beiden Kurven den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge beschreibt. Begründen Sie Ihre Wahl im Sachkontext der Aufgabenstellung.

Bestimmen Sie das maximale und das minimale Luftvolumen in der Lunge.

Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen die Lunge jeweils die Hälfte des maximalen Luftvolumens enthält.

c) Bestimmen Sie das durchschnittliche Luftvolumen in der Lunge während des Zeitintervalls [0;5].

d) Entgegen obiger Annahme bleibt immer Luft in der Lunge. Erneut vereinfachend nehmen wir an, dass dieses minimale Luftvolumen in der Lunge konstant 0,8 Liter sei.
Der Atemvorgang laufe ansonsten wie in Aufgabenteil b) ermittelt ab.

Beschreiben Sie die Änderungen, die sich in den Kurven 1 und 2 (siehe obige Abbildung) ergeben, und ermitteln Sie die zugehörigen Funktionsterme.

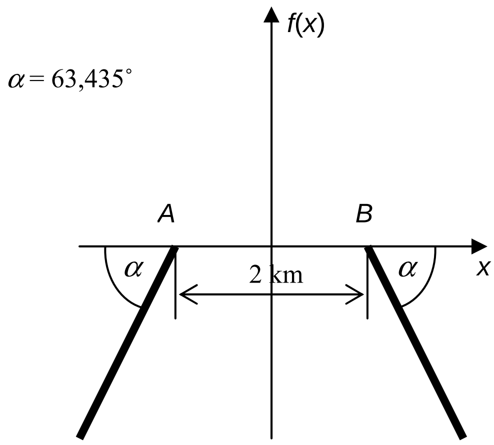
Skizzieren Sie den Verlauf der geänderten Kurven in einem Koordinatensystem.

Aufgabe 16 ICE-Trasse

Für eine ICE-Trasse müssen zwei gerade Streckenabschnitte miteinander verbunden werden.

Es stehen 4 verschiedene Funktionsvarianten zur Diskussion:

1. Eine ganzrationale Funktion möglichst niedrigen Grades
2. Eine Funktion, deren Graph ein Kreisbogen ist
3. Eine Winkelfunktion der Form $x \to a \cdot \cos(b \cdot x) + c$
4. Eine Exponentialfunktion der Form $x \to a \cdot e^{-b \cdot x^2} + c$



a) Beschreiben Sie die Anforderungen, die an den Verbindungsgraphen gestellt werden müssen, und geben Sie die mathematischen Bedingungen an.
Gehen Sie dabei davon aus, dass die y-Achse die Strecke zwischen A und B halbiert und im Koordinatensystem 1 Längeneinheit 1 km entspricht.

b) Eine der angegebenen Funktionsarten kann nicht alle erforderlichen Bedingungen erfüllen und kommt daher nicht in Frage.
Geben Sie an, welche Funktion das ist und begründen Sie Ihre Entscheidung.

c) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der drei anderen Funktionen.
Gehen Sie dabei davon aus, dass die Graphen dieser Funktionen symmetrisch zur y-Achse sind.

d) Um die Verbindungstrasse mit möglichst hoher Geschwindigkeit durchfahren zu können, soll von den drei Funktionen die Variante gewählt werden, welche an der Stelle $x = 0$ den größten Krümmungsradius hat.
Der Krümmungsradius einer Funktion kann mit Hilfe folgender Formel berechnet werden:

$$r = \left| \frac{\sqrt{(1 + f'(x)^2)^3}}{f''(x)} \right|.$$

Weisen Sie nach, dass die ganzrationale Funktion diese Forderung am besten erfüllt.

e) Um die Bahntrasse realisieren zu können, muss die Fläche zwischen der Verbindungstrasse und der Geraden zwischen den Anschlusspunkten A und B von einem Landwirt gekauft werden.
Berechnen Sie diese Fläche für die ganzrationale Funktion.

Aufgabe 17 Preispolitik

Ein Industrieunternehmen A, das nur ein Produkt herstellt, entnimmt seiner Betriebsbuchhaltung (Kosten- und Leistungsrechnung) folgende Angaben:
Der Kostenverlauf ist gekennzeichnet durch ständig steigende Gesamtkosten, wobei der Kostenzuwachs mit jeder produzierten Einheit unterschiedlich ist. Anfänglich nimmt der Kostenzuwachs bedingt durch effizienteren Arbeitskräfte- und Maschineneinsatz ab. Von einer bestimmten Produktionsmenge an ist der Kostenzuwachs jedoch durch höheren Energieverbrauch und Maschinenverschleiß steigend. Von den Gesamtkosten des Unternehmens sind die folgenden Zahlen bekannt:

Die fixen Kosten belaufen sich auf 20 GE, der Graph der Gesamtkostenfunktion hat im Punkt $P(3|56)$ einen Wendepunkt und bei einer Produktionsmenge von 1 ME entstehen Kosten in Höhe von 42 GE. Die Kapazitätsgrenze des Betriebes liegt bei 9 ME und es wird beliebige Teilbarkeit der Mengeneinheiten (ME) unterstellt.

Hinweis: *Alle zu skizzierenden Funktionsgraphen sind in einem Koordinatensystem darzustellen. Wählen Sie dabei für die Ordinate 20 GE = 1 cm und für die Abszisse 1 ME = 1 cm.*

a) Ermitteln Sie aus obigen Angaben den Term der „einfachsten" Gesamtkostenfunktion K_A des Unternehmens A.

Geben Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich $D_{ök}$ an und skizzieren Sie den Graphen der Gesamtkostenfunktion K_A.

Das Industrieunternehmen A ist einer von vielen Anbietern auf dem Markt. Die Preisfunktion p ist demnach eine Konstante und sie lautet: $p(x) = 26$.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Gewinnfunktion G_A.

Ermitteln Sie damit folgende für das Unternehmen wichtige Informationen:

- die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze,
- die Produktions-/ Absatzmenge, bei der maximaler Gewinn erzielt wird,
- den maximalen Gewinn.

Skizzieren Sie den Graphen der Gewinnfunktion G_A.

Ein Konkurrenzunternehmen B hat in seinem Betrieb durch Beobachtung der Kostenentwicklung in Abhängigkeit von der produzierten Menge folgende Grenzkostenfunktion K'_B bestimmt:

$$K'_B: \quad K'_B(x) = \frac{1}{x+e} + \frac{1}{8}x^3 .$$

c) Bestimmen Sie bei fixen Kosten von 30 GE die Gesamtkostenfunktion von K_B.

d) Zeigen Sie durch geeignete Rechnungen, dass sich bei der vorliegenden Kostensituation des Unternehmens B die Graphen der Grenzkosten K'_B und der Stückkosten k_B im Minimum der Stückkosten schneiden. Die entsprechende Produktionsmenge soll nicht errechnet werden.

e) Bestimmen Sie für den gegebenen Marktpreis p von 26 GE mit Hilfe eines geeigneten Näherungsverfahren die Gewinnschwelle des Unternehmens B und führen Sie das Verfahren solange durch, bis sich die dritte Nachkommastelle nicht mehr ändert.

Aufgabe 18 Produktionsumstellung

Aufgabe aus der schriftlichen Abiturprüfung Hamburg 2005.

Hinweis: Für die zu zeichnenden Funktionsgraphen kann es sinnvoll sein, eine Wertetabelle zu erstellen. Alle Funktionsgraphen sind in einem gemeinsamen Koordinatensystem darzustellen.

Für einen Betrieb soll eine Kostenfunktion ermittelt werden. Die zugehörigen Fixkosten belaufen sich auf 12 GE. Weiterhin ist bekannt, dass die Kosten für die Produktion von 2 ME 28 GE betragen. Bei einer Produktion von 3 ME betragen die Kosten 30 GE und der Graph der Funktion ändert dort seine Krümmungsrichtung.

a) Bestimmen Sie aus obigen Angaben eine Kostenfunktion K und zeichnen Sie ihren Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.

b) Interpretieren Sie die wirtschaftliche Bedeutung des Ordinatenschnittpunktes und des Wendepunktes.

c) Eine Marktanalyse hat ergeben, dass die Produkte unabhängig von der Absatzmenge zu einem Stückpreis von 10 GE an den Markt abgegeben werden können.
Bestimmen Sie die Gleichungen der Preisabsatzfunktion p, der Erlösfunktion E und der Gewinnfunktion G.
Ermitteln Sie die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze. Bestimmen Sie die gewinnmaximale Absatzmenge und den dazugehörigen maximalen Gewinn.
Zeichnen Sie die Graphen der Erlösfunktion E und der Gewinnfunktion G.

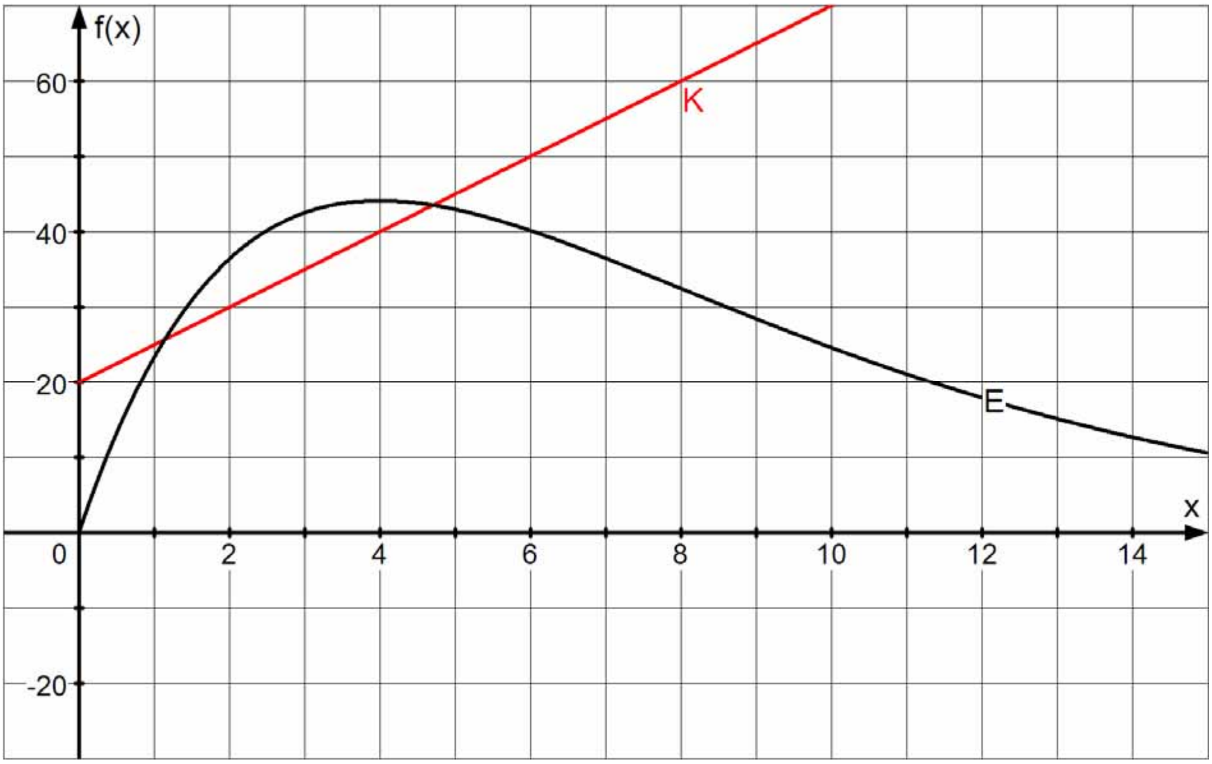
Die Betriebsleitung beabsichtigt, die Produktion zum Zwecke einer Gewinnmaximierung auf ein anderes Produkt umzustellen.
Für die Herstellung des neuen Produktes wird von einem linearen Kostenverlauf ausgegangen. Eine Marktanalyse hat weiterhin ergeben, dass der Preis, der für die Produkte zu erzielen ist, sich exponentiell zur Absatzmenge verhält. Die neue Kostenfunktion und die neue Preisabsatzfunktion lassen sich näherungsweise wie folgt beschreiben:

$$K_{neu}:\ K(x) = 5x + 20 \qquad\qquad p_{neu}:\ p(x) = 30 \cdot e^{-\frac{x}{4}}$$

d) Bestimmen Sie die neue Erlösfunktion E_{neu} und untersuchen Sie, wie sich die Erlöse bei sehr hohen Absatzmengen verhalten.

Fortsetzung nächste Seite →

Gegeben seien im Folgenden die Graphen der neuen Kosten- und der neuen Erlösfunktion:



e) Stellen Sie im obigen Koordinatensystem die neue Gewinnfunktion G_{neu} als Differenz der gegebenen Graphen dar.

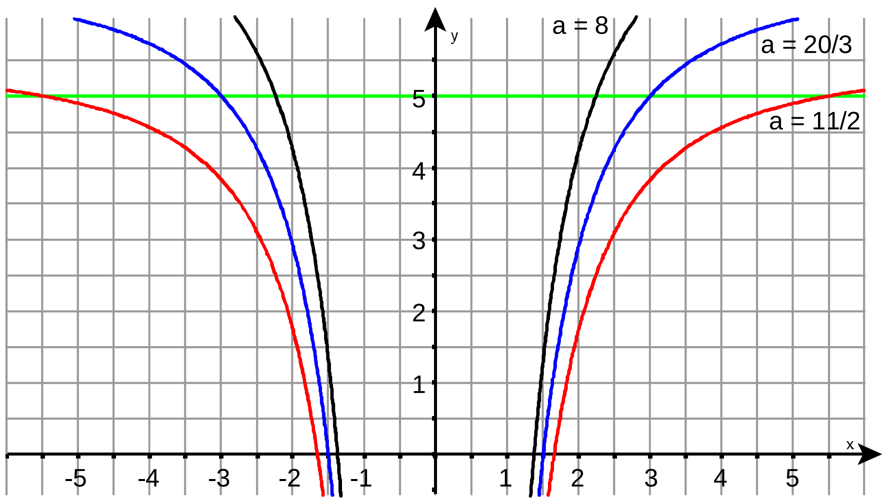
f) Ermitteln Sie für die neue Gewinnfunktion G_{neu} die gewinnmaximale Absatzmenge mit Hilfe eines geeigneten Näherungsverfahrens auf eine Nachkommastelle gerundet.

Bestimmen Sie den dazugehörigen maximalen Gewinn und interpretieren Sie die Ergebnisse hinsichtlich der angestrebten Gewinnmaximierung.

5 Erwartungshorizonte und Bewertung

5.1 Kurs auf grundlegendem Niveau

Aufgabe 1 Pflanzschalen

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Funktionen f_a sind offenbar alle symmetrisch zur y-Achse. Diese Achse muss also in der Mitte eingezeichnet werden. Der Abstand zwischen den beiden waagerechten Linien ist 5. Eine Einheit entspricht also zwei Markierungsabschnitten (Gitterabständen). Die Lage der x-Achse unten bei $y = 0$ und des Nullpunktes auf der x-Achse sind klar. Wegen der Maßstabstreue entspricht eine Einheit auf der x-Achse ebenfalls zwei Gitterabständen. Für $a = \frac{20}{3}$ hat die zugehörige Funktion $f_{\frac{20}{3}}$ mit $f_{\frac{20}{3}}(x) = \frac{20}{3} - \frac{15}{x^2}$ die Nullstellen $\pm\frac{3}{2}$. Aus diesem Ergebnis folgt, dass $a = \frac{20}{3}$ zum mittleren der drei Graphen gehört. Veränderung von a bewirkt eine Verschiebung „nach oben oder unten". Dem größten a (= 8) entspricht also der oberste – hier auch der innerste – Graph. Entsprechend gehört zu a = 5,5 der unterste, also der äußere Graph. *Andere Begründungen sind möglich.* 	10	5	
b)	Wenn der Durchmesser am oberen Rand 4 ist, muss gelten: $f_a(2) = 5 \Leftrightarrow a - \frac{15}{4} = 5 \Leftrightarrow a = \frac{35}{4} = 8{,}75$.	10		
c)	Bestimmt man den Radius des kreisförmigen oberen Randes in Abhängigkeit von a, muss man die Gleichung $f_a(r) = 5$ lösen, also die quadratische Gleichung $a - \frac{15}{r^2} = 5$. Man erhält die positive Lösung $r = \sqrt{\frac{15}{a-5}}$. Diese Gleichung hat nur für $a > 5$ reelle Lösungen.		10	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Alternative Lösung:
Inhaltlich bedeutet $a \leq 5$, dass die Gerade $y = 5$ entweder Asymptote oder sogar oberhalb der Asymptoten des Graphen (Hyperbel) von f_a liegt, d.h. der Graph erreicht die vorgegebene Höhe gar nicht.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Das Volumen eines Kegels beträgt $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$.

Als Radius des Innenkegels muss der Radius des oberen Randes verwendet werden. Und für die Höhe gilt: $h = 5 - y_0$, wobei y_0 der y-Achsenabschnitt einer/beider Tangenten ist.

Der Radius des oberen Randes wird bestimmt durch die Schnittpunkte zwischen der Geraden $y = 5$ und dem Graphen von f_7.

$$f_7(x) = 5 \Leftrightarrow 7 - \frac{15}{x^2} = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{15}{7-5}} = \pm\sqrt{7,5}\,.$$
Die Gleichung der Tangente durch den rechten Randpunkt lautet:

$$t(x) = 5 + f_7'\left(\sqrt{7,5}\right) \cdot \left(x - \sqrt{7,5}\right).$$
<u>Bemerkung:</u> Man hätte aus Symmetriegründen natürlich auch den linken Randpunkt verwenden können.

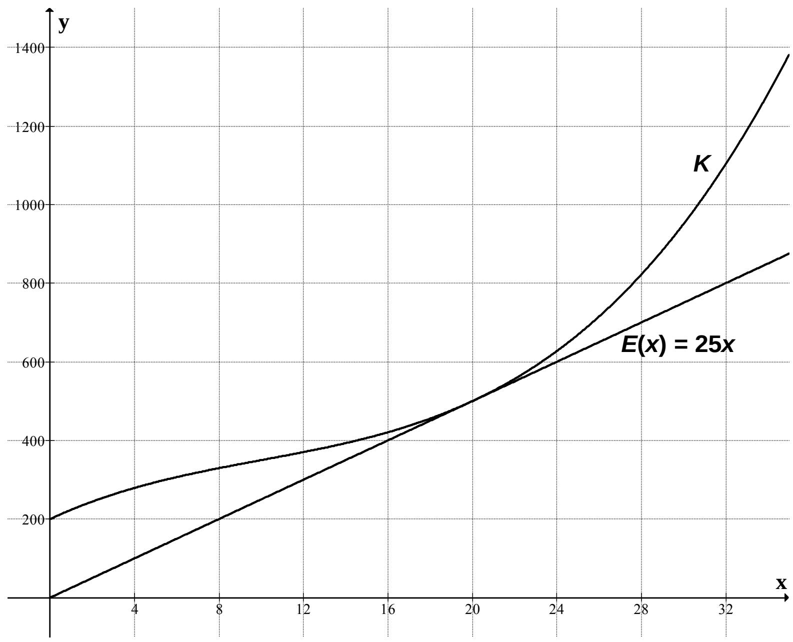
Es gilt:

$$f_7'(x) = \frac{30}{x^3}$$
$$f_7'\left(\sqrt{7,5}\right) = \frac{30}{7,5 \cdot \sqrt{7,5}}$$
$$f_7'\left(\sqrt{7,5}\right) = \frac{4}{\sqrt{7,5}}$$
Durch Einsetzen erhält man:

$$t(x) = 5 + \frac{4}{\sqrt{7,5}} \cdot \left(x - \sqrt{7,5}\right) = 5 + \frac{4}{\sqrt{7,5}} \cdot x - 4 = \frac{4}{\sqrt{7,5}} \cdot x + 1\,.$$
Von dieser Geraden interessiert nur der y-Achsenabschnitt, d.h. das Absolutglied 1. Dieses bestimmt durch $h = 5 - 1 = 4$ direkt die Höhe des gesuchten Innenkegels.

Damit sind alle Maße des zu berechnenden Kegels bestimmt.

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\sqrt{7,5}\right)^2 \cdot 4 = 10\pi \approx 31,4.$$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

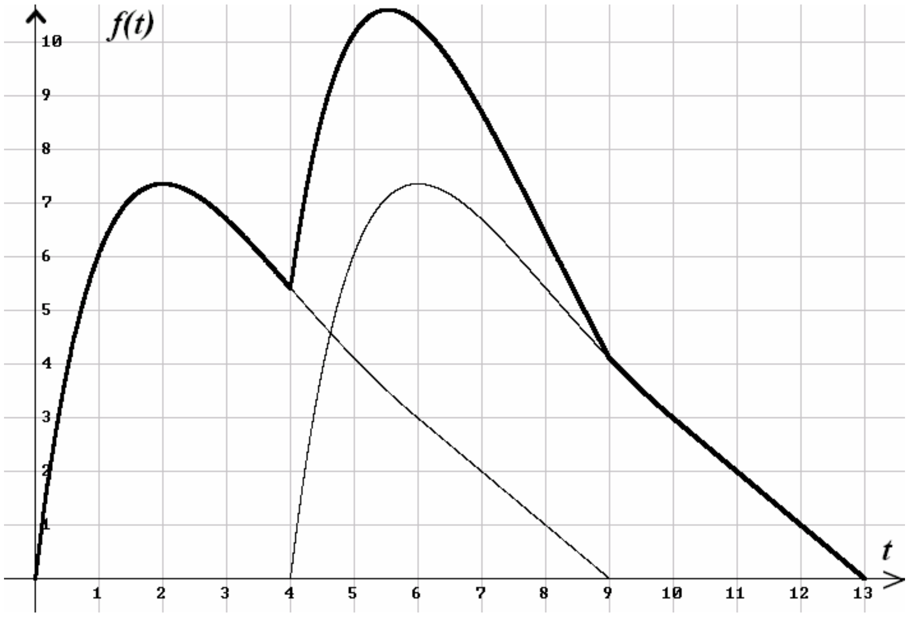
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Hinweis: *Dieses Ergebnis ist sogar unabhängig von a für 5 < a < 7,5. Man erhält stets ca. 31 Liter für das Innenvolumen.*		25	
e)	Für die Ableitung von G erhält man unter Berücksichtigung der Kettenregel: $G'(x) = -\frac{1}{7-x} \cdot (-1) = \frac{1}{7-x}$. Genau das war zu zeigen. Somit gilt: $15\pi \int_0^5 \frac{1}{7-x}\,dx = 15\pi\left[-\ln(7-x)\right]_0^5 = 15\pi\left(-\ln(2) + \ln(7)\right) \approx 59$. 31 Liter ist ungefähr die Hälfte von 59 Liter, d.h. durch das massive Glasunterteil wird das Volumen etwa auf die Hälfte reduziert.		15	
f)	Wenn a zu groß wird, dann wird die Tangente so steil, dass der y-Achsenabschnitt y_0 negativ wird, d.h. die Höhe des Innenkegels wird größer als 5. Dies bedeutet, dass die Schale unten ein kreisförmiges Loch bekommt und der innere Hohlraum zu einem Kegelstumpf wird. Das ergibt sich aus der Rechnung von d), ist aber auch qualitativ erkennbar an den Zeichnungen auf der Anlage, insbesondere für $a = 8$. *Auch für eine derartige Lösung ist die volle Punktzahl zu erteilen.*			10
g)	<u>1. Lösungsvariante</u> (zeichnerische Lösung): Der Mindestpreis von 25 € pro Stück soll bestätigt werden. Zu zeigen ist, dass der Graph der Erlösfunktion E mit $E(x) = 25x$ Tangente des Graphen der Kostenfunktion K ist. 			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Offensichtlich berühren sich die beiden Graphen an der Stelle $x = 20$. $E(20) = 25 \cdot 20 = 500$. $K(20) = 0,05 \cdot 20^3 - 1,5 \cdot 20^2 + 25 \cdot 20 + 200 = 500$. Produktionskosten und Erlös sind an der Stelle $x = 20$ gleich. Bei einer Produktions- und Absatzmenge von 20 Stück (pro Tag) deckt ein Mindestpreis von 25 € pro Stück gerade die Produktionskosten. <u>2. Lösungsvariante</u> (über die Berechnung des Stückkostenminimums): $K(x) = 0,05x^3 - 1,5x^2 + 25x + 200, \quad x > 0$. $k(x) = \frac{0,05x^3 - 1,5x^2 + 25x + 200}{x} = 0,05x^2 - 1,5x + 25 + \frac{200}{x}$. $k'(x) = 0: \quad 0,1x - 1,5 - \frac{200}{x^2} = 0$ $0,1x^3 - 1,5x^2 - 200 = 0$ $x^3 - 15x^2 - 2000 = 0$ $(x-20)(x^2 + 5x + 100) = 0$ Diese Gleichung hat genau eine reelle Lösung, nämlich $x = 20$. $k''(x) = 0,1 + \frac{400}{x^3} > 0$ für alle $x > 0$. Stückkosten $k(20) = 20 - 30 + 25 + 10 = 25$. Bei einer Produktions- und Absatzmenge von 20 Stück deckt erst ein Mindestpreis von 25 € pro Stück gerade die Gesamtkosten pro Stück..		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 2 Medikation

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Die höchste Konzentration im Blut ist an der Stelle, an der der Graph der Funktion f mit der Gleichung $f(t) = 10t \cdot e^{-0,5t}$ einen Hochpunkt hat. Es muss also gelten: $f'(t) = 0$ mit $f'(t) = 10e^{-0,5t} - 5t \cdot e^{-0,5t}$. Somit erhält man $t = 2$. Dem Verlauf des Graphen in der Anlage ist zu entnehmen, dass dies nur ein Maximum sein kann.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	$f(2) = 10 \cdot 2 \cdot e^{-0{,}5 \cdot 2} \approx 7{,}36$. Die höchste Konzentration ist also nach 2 Stunden vorhanden und beträgt 7,36 Milligramm pro Liter.	20		
b)	Der stärkste Abbau entspricht der betragsmäßig größten Steigung nach dem Maximum des Graphen der Funktion f. Sie wird im Wendepunkt von f angenommen. Also muss gelten: $f''(t) = 0$ mit $f''(t) = -10e^{-0{,}5t} + 2{,}5t \cdot e^{-0{,}5t}$. Damit ergibt sich $t = 4$. Das Medikament wird nach vier Stunden am stärksten abgebaut.		10	
c)	Der lineare Verlauf wird durch die Geradengleichung $k(t) = f(6) + f'(6) \cdot (t-6)$ beschrieben. Es gilt: $f'(t) = (10-5t) \cdot e^{-0.5 \cdot t}$. Einsetzen ergibt: $k(t) = 60 \cdot e^{-3} - 20 \cdot e^{-3} \cdot (t-6)$ $= 180 \cdot e^{-3} - 20t \cdot e^{-3}$ $= -20 \cdot e^{-3} \cdot (t-9)$. Die Nullstelle von k liegt also bei 9, d. h. dass das Medikament nach 9 Stunden vollständig abgebaut ist.		15	
d)	Die mittlere Konzentration des Medikamentes berechnet man folgendermaßen: $\frac{1}{9} \cdot \int_0^9 f(t)\,\mathrm{d}t$. Eine grobe Abschätzung erhält man z. B. durch Auszählen einerseits der Anzahl n der Kästchen, die ganz in der zugehörigen Fläche liegen, und andererseits der Anzahl m der Kästchen, die von 0 bis 9 vom Graphen geschnitten werden. Man bekommt: $n = 27$ und $m = 19$. Der gesuchte Mittelwert lässt sich damit grob abschätzen durch $\left(n + \frac{m}{2}\right) : 9 = \left(27 + \frac{19}{2}\right) : 9 = 4{,}055\ldots$. Die Abschätzung sollte zwischen 3,5 Milligramm pro Liter und 4,5 Milligramm pro Liter liegen.		10	5

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>

<u>Bemerkung zur grafischen Darstellung:</u> Eine genaue Darstellung der „Überlagerungsfunktion“ ist etwas diffizil, da ja mehrere Definitionsintervalle in Fallunterscheidungen zu betrachten sind, je nachdem bei welcher Funktion der exponentielle oder der lineare Teil wirkt. Das wird nicht erwartet (wenn auch in der obigen Musterskizze geschehen). Wichtig ist die Struktur des Graphen und dass es einen relevanten Zeitraum gibt, in dem die 10-mg/l-Grenze überschritten wird.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Da die Konzentration zeitweilig die Grenze von 10 Milligramm pro Liter übersteigt, muss der Patient mit starken Nebenwirkungen rechnen.

Zur Begründung könnte man

- entweder am Graphen argumentieren

- oder zeigen, dass z. B. bei $t = 6$ der Wert $f(t)+f(t-4)\approx 10{,}34$ über 10 liegt (die linearen Teile kommen hier noch nicht ins Spiel)

- oder argumentieren, dass das Maximum rechts von $t = 4$ liegen muss, dass also die Funktion $f(t)+f(t-4)$ betrachtet werden muss, die ihre Extremstelle bei $t=\frac{2(3e^2+1)}{e^2+1}\approx 5{,}52$ hat mit dem Maximalwert von ungefähr 10,60 (auch hier kommen die linearen Teile noch nicht ins Spiel).</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>g)</td><td>$g(t)=a\cdot t\cdot e^{-bt}$

$g'(t)=a\cdot e^{-bt}-abt\cdot e^{-bt}$

Da die Konzentration bei $t = 4$ am größten sein soll, gilt: $g'(4)=0$.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	$0 = a \cdot e^{-4b} - 4ab \cdot e^{-4b}$ $a = 4ab \quad \mid :a \ (a \neq 0)$ $b = \frac{1}{4}$ Einsetzen in $g(4) = 4a \cdot e^{-4b}$ mit $g(4) = 10$ ergibt: $a = 2{,}5e = 6{,}7957...$. Also gilt: $a \approx 6{,}80$ und $b = 0{,}25$.			15
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 3 Seebad Rutiba

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Lage des Punktes *P*: Bed.: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$. $f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + x = (-\frac{1}{4}x^2 + 1) \cdot x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 2 \vee x_3 = -2$. Klassifizierung: $f''(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 1 \Rightarrow f''(2) = -2 < 0 \Rightarrow Maximum$ $f(2) = \frac{25}{16} \qquad P(2; \frac{25}{16})$ Länge der Absperrkette: $l = x_2 - x_3 = 2 - (-2) = 4$ Die Absperrkette ist 400 m lang. Die breiteste Stelle in Nord-Süd-Richtung ist bei $x_1 = 0$, da der Graph von f hier ein lokales Minimum hat: Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0$. $f''(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 1$, das heißt $f''(0) = 1 > 0$, also liegt ein Minimum vor. *Andere Lösungsvarianten sind möglich und erhalten volle Punktzahl.*			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Breite in N-S-Richtung: $b = f(2) - f(0) = \frac{25}{16} - \frac{9}{16} = 1$. Das Strandbad ist in Nord-Südrichtung 100 m breit.	15		
b)	<u>Entfernung zwischen *P* und *A*:</u> $\lvert PA \rvert = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + \left(3 - \frac{25}{16}\right)^2} \approx 1{,}75$. Die Entfernung zwischen den Punkten *P* und *A* beträgt 175 m. <u>Winkel gegen Nordrichtung:</u> $\tan\alpha = \frac{x_P - x_A}{y_A - y_P} = \frac{2-1}{3-\frac{25}{16}} \approx 0{,}696$. Es gilt damit $\arctan 0{,}696 = 34{,}82...°$ Das Boot muss mit einem Kurs von ca. 35° Nord Richtung West fahren.	10		
c)	<u>Berechnung der Berührungsstellen</u>: $f(x) = -\frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{2} + \frac{9}{16}$ $\qquad h(x) = -\frac{1}{4}\cdot x^2 + \frac{45}{16}$ $f(x) = h(x)$ $-\frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{2} + \frac{9}{16} = -\frac{1}{4}\cdot x^2 + \frac{45}{16}$ $-\frac{x^4}{16} + \frac{3}{4}\cdot x^2 - \frac{36}{16} = 0$ $x^4 - 12\cdot x^2 + 36 = 0$ $\left(x^2 - 6\right)\cdot\left(x^2 - 6\right) = 0$ $x^2 = 6$ $x_4 = \sqrt{6} \vee x_5 = -\sqrt{6}$ $h(\sqrt{6}) = h(-\sqrt{6}) = \frac{21}{16}$. Die gesuchten Punkte haben die Koordinaten $\left(\sqrt{6}; \frac{21}{16}\right)$ bzw. $\left(-\sqrt{6}; \frac{21}{16}\right)$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
Die Fläche des entstehenden Badesees nach Plan 1:
$$A_1 = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} [h(x) - f(x)]dx$$
$$= \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left[-\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{45}{16} - \left(-\frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{2} + \frac{9}{16} \right) \right] dx$$
$$= \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(\frac{x^4}{16} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{36}{16} \right) dx$$
$$= \left[\frac{x^5}{80} - \frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x \right]_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \approx 5{,}879$$
Der Badesee nach Plan 1 hat eine Fläche von ca. 58 800 m^2.
</td><td></td><td>20</td><td>5</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>
<u>Funktionsvorschrift für g</u>: Wegen der Achsensymmetrie von f handelt es sich um eine Kosinusfunktion mit $g(x) = a \cdot \cos(b \cdot x) + c$.
Amplitude: $a = \frac{1}{2} \cdot (f(2) - f(0)) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{25}{16} - \frac{9}{16} \right) = \frac{1}{2}$.
Periodenlänge: $p = \frac{2 \cdot \pi}{b} = 4 \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{2}$.
y-Verschiebung: $c = f(2) + a = \frac{25}{16} + \frac{1}{2} = \frac{33}{16}$.
$$\underline{\underline{g(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x \right) + \frac{33}{16}}}$$
<u>Untersuchung auf „Knickfreiheit“</u>:
$f'(x) = -\frac{x^3}{4} + x$ $\qquad$ $g'(x) = -\frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x \right)$
Der Straßenverlauf kann knickfrei verändert werden, wenn an den Berührungsstellen gilt: $f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$.
$f(2) = g(2) = \frac{25}{16} \wedge f'(2) = g'(2) = 0$.
</td><td></td><td>20</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>Durch Anwendung der Kettenregel erhält man
$G'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + \frac{33}{16} = g(x)$

$A_2 = \int_{-2}^{2} [g(x) - f(x)]dx$
$= \int_{-2}^{2} \left[\frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + \frac{33}{16} - \left(-\frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{2} + \frac{9}{16}\right)\right]dx$
$= \int_{-2}^{2} \left[\frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + \frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\right]dx$
$= \left[\frac{1}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + \frac{x^5}{80} - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x\right]_{-2}^{2}$
$= \frac{31}{15} - \left(-\frac{31}{15}\right) = \frac{62}{15} \approx 4{,}133$

Der Badesee nach Plan 2 hat nur eine Fläche von ca. 41 300 m^2 und erfüllt somit <u>nicht</u> die Forderung des Bürgermeisters.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Der Punkt Q liegt auf dem Graphen von h, denn $h(0{,}845) \approx 2{,}634$.

Der Abstand zwischen A und Q ist minimal, wenn die Strecke $\overline{AQ}$ senkrecht zur Tangente im Punkt Q der Parabel ist (Normale):

Die Strecke $\overline{AQ}$ hat die Steigung $m_1 = \frac{y_A - y_Q}{x_A - x_Q} = \frac{3 - 2{,}634}{1 - 0{,}845} \approx 2{,}361$.

Weiterhin gilt $h'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x$.

Die Tangentensteigung der Parabel im Punkt Q ist $m_2 = h'(0{,}845) \approx -0{,}423$.

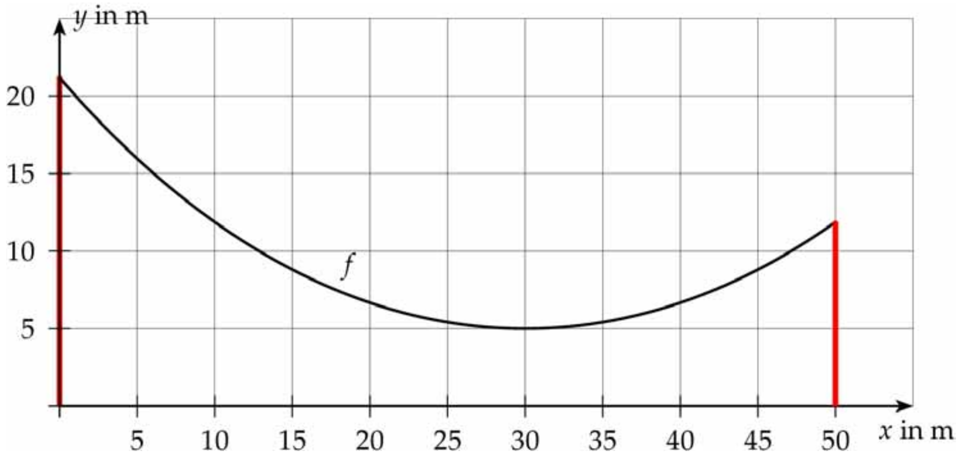
Die Gerade AQ steht senkrecht auf der Tangenten im Punkt Q der Parabel, wenn $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Dies ist mit $2{,}361 \cdot (-0{,}423) = -0{,}998703 \approx -1$ der Fall.</td><td>5</td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>50</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 4 Seilbahn

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	$f(x)=15\cdot e^{\frac{1}{30}x-1}+15\cdot e^{-\frac{1}{30}x+1}-25$ $f(0)=15\cdot e^{-1}+15\cdot e-25=21{,}2924...$ $f(50)=15\cdot e^{\frac{2}{3}}+15\cdot e^{\frac{-2}{3}}-25=11{,}9172...$ Der erste Pfeiler ist etwa 21,29 m hoch, der zweite etwa 11,92 m.	10		
b)	$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{30}x-1}-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{30}x+1}$. $f'(0)=\frac{1}{2}\cdot e^{-1}-\frac{1}{2}\cdot e=-1{,}1752...\approx-1{,}18$. $f'(50)=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{2}{3}}=0{,}7171...\approx 0{,}72$.	10		
c)	Es muss der Tiefpunkt bestimmt werden. Ansatz $f'(x)=0$. $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{30}x-1}-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{30}x+1}$ $0=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{30}x-1}-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{30}x+1}$ $e^{\frac{1}{30}x-1}=e^{-\frac{1}{30}x+1}$ $\frac{1}{30}x-1=-\frac{1}{30}x+1$ $\frac{1}{15}x=2$ $x=30$ $f(30)=15\cdot e^{0}+15\cdot e^{0}-25$ $f(30)=5$ Am tiefsten Punkt hängt das Seil im unbelasteten Zustand 5 m über dem Fußboden, selbst wenn es 1 m durchhängt, ist also noch genug Platz für einen daran hängenden Menschen.		15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>



</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

Mit dem Ansatz $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ erhält man durch Einsetzen der Punkte ein Gleichungssystem mit den drei Unbekannten a, b, c:

$$\begin{aligned} 21{,}3 &= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \text{, also } c = 21{,}3 \\ 5 &= a \cdot 900 + b \cdot 30 + 21{,}3 \\ 11{,}9 &= a \cdot 2500 + b \cdot 50 + 21{,}3 \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$a = \frac{533}{30000}; \quad b = -\frac{3229}{3000}; \quad c = 21{,}3,$$

so dass sich die Parabel mit der Gleichung

$$p(x) = \frac{533}{30000} x^2 - \frac{3229}{3000} x + 21{,}3$$

ergibt.

</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>

- Nachweis der Stammfunktion:

$$\begin{aligned} F(x) &= 450 \cdot e^{\frac{1}{30}x-1} - 450 \cdot e^{-\frac{1}{30}x+1} - 25 \cdot x \\ F'(x) &= 450 \cdot \frac{1}{30} \cdot e^{\frac{1}{30}x-1} - 450 \cdot \left(-\frac{1}{30}\right) \cdot e^{-\frac{1}{30}x+1} - 25 \\ &= 15 \cdot e^{\frac{1}{30}x-1} + 15 \cdot e^{-\frac{1}{30}x+1} - 25 = f(x) \end{aligned}$$

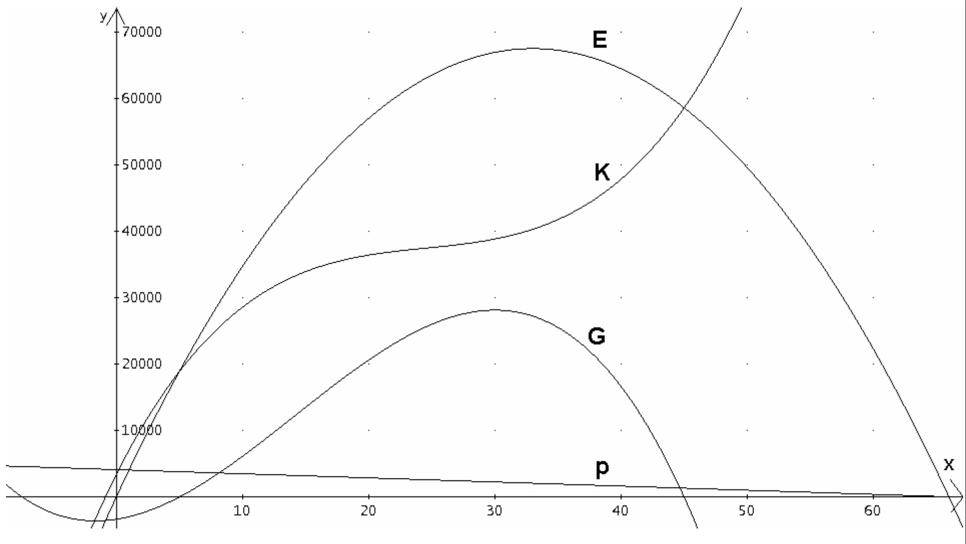
Stammfunktion von p:

$$P(x) = \frac{533}{90000} x^3 - \frac{3229}{6000} x^2 + 21{,}3x$$

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

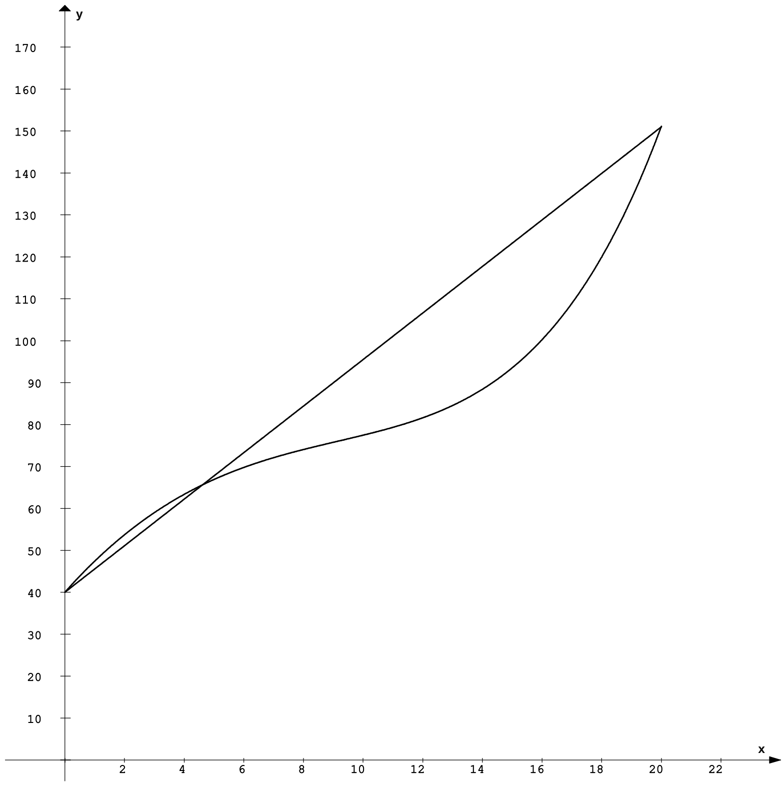
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Es muss das Integral über die Differenzfunktion $d(x)=\lvert f(x)-p(x)\rvert$ bestimmt werden und durch die jeweiligen Intervalllängen geteilt werden. Da die Schnittpunkte bekannt sind, kann zunächst das Integral über die Differenzfunktion ohne Betragsstriche gebildet werden und das Vorzeichen beim Übergang in die Deutung des Ergebnisses sofern nötig korrigiert werden. $\int_0^{30}\left(\left(15\cdot e^{\frac{x}{30}-1}+15\cdot e^{1-\frac{x}{30}}-25\right)-\left(\frac{533}{30000}x^2-\frac{3229}{3000}x+21{,}3\right)\right)dx=$ $\left[\left(450\cdot e^{\frac{x}{30}-1}-450\cdot e^{1-\frac{x}{30}}-25\cdot x\right)-\left(\frac{533}{90000}x^3-\frac{3229}{6000}x^2+21{,}3x\right)\right]_0^{30}\approx -6{,}87$ Der durchschnittliche Abstand zwischen den Funktionsgraphen beträgt $\frac{6{,}87}{30}\approx 0{,}23$, also etwa **23 cm**. $\left[\left(450\cdot e^{\frac{x}{30}-1}-450\cdot e^{1-\frac{x}{30}}-25\cdot x\right)-\left(\frac{533}{90000}x^3-\frac{3229}{6000}x^2+21{,}3x\right)\right]_{30}^{50}\approx 0{,}1315$. Der durchschnittliche Abstand zwischen den Funktionsgraphen beträgt in diesem Intervall $\frac{0{,}1315}{20}=0{,}006575$, also etwa **0,7 cm**. *Alternative: Berechnung der Durchschnittshöhen einzeln (insgesamt vier Integrale) und danach die Differenzen bestimmen.*		15	10
g)	Offensichtlich stimmen Parabel und Kettenlinie im Intervall [30;50] fast exakt überein, die durchschnittliche Abweichung ist kleiner als eine realistische Dicke des Stahlseils. Hier hat der Assistent also Recht. Die durchschnittliche Abweichung von 23 cm im Intervall [0;30] kann unterschiedlich beurteilt werden. Nimmt man große Toleranzen bei der Montage an, könnten die 23 cm Abweichung noch innerhalb dieser Toleranz liegen. Benötigt man dagegen genauere Daten, z.B. für zusätzliche in der Nähe liegende Installationen, könnte diese Abweichung als (zu) groß angesehen werden. Verschiedene sinnvolle Argumentationen der Prüflinge können hier als richtig bewertet werden.			10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

Aufgabe 5 Farbenproduktion

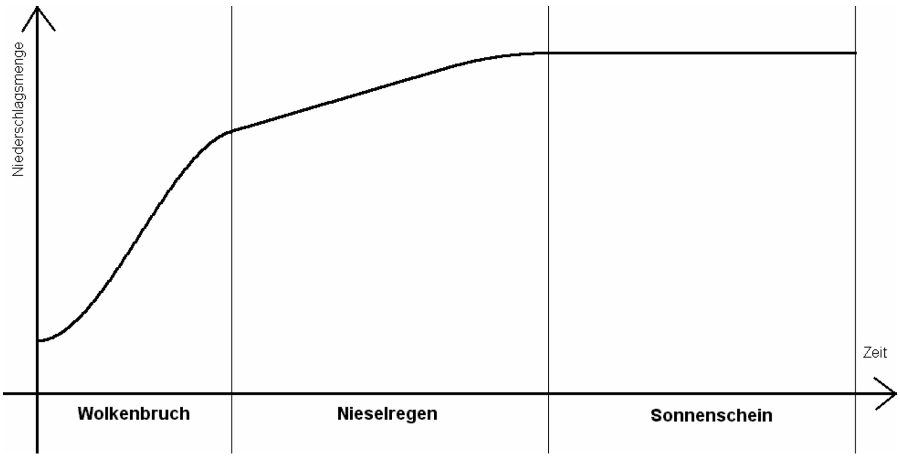
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Gemäß Aufgabenstellung lautet die Gleichung für die Erlösfunktion E: $$E(x) = -62x \cdot (x - 66).$$ Dies ist die Gleichung einer quadratischen Funktion mit den Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 66$. Da bei einer quadratischen Funktion die Nullstellen symmetrisch zur x-Koordinate des Scheitelpunktes liegen und der Graph der Erlösfunktion E eine nach unten geöffnete Parabel ist, besitzt die Erlösfunktion somit ein Maximum mit positivem Funktionswert an der Stelle $x_m = 33$. *Zulässig, wenn auch weniger elegant, ist die Berechnung der Extremstelle mit Hilfe der Ableitungen.*	5	10	
b)	Für die Kostenfunktion K mit der Gleichung $K(x) = 2x^3 - 147x^2 + 3792x + 3375$ gilt: $$K'(x) = 6x^2 - 294x + 3792$$ Für $K'(x) = 0$ und damit $6x^2 - 294x + 3792 = 0$ erhält man $$x_{1,2} = 24{,}5 \pm \sqrt{600{,}25 - 632}.$$ Die Diskriminante der quadratischen Gleichung ist (mit –31,75) negativ. Die Gleichung hat damit keine (reellen) Lösungen. Folglich hat K keine Extremstellen. Dann ist die Kostenfunktion K streng monoton. Da der Leitkoeffizient von K positiv ist, ist sie streng monoton steigend. *Dies kann mit Wissen über kubische Funktionen begründet werden oder aus der Tatsache, dass K' überall positiv ist.* Die strenge Monotonie von K bedeutet in diesem Zusammenhang: Je größer die produzierte Menge ist, umso höher sind die Produktionskosten. Dies ist ökonomisch sinnvoll und notwendig.	5	15	5
c)		5	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Berechnung der Gewinnzone: Die Gleichung der Gewinnfunktion lautet: $G(x) = E(x) - K(x) = 4092x - 62x^2 - \left(2x^3 - 147x^2 + 3792x + 3375\right)$ $= -2x^3 + 85x^2 + 300x - 3375.$ Durch Rechnung (z.B. durch Einsetzen in die Gleichung der Gewinnfunktion) wird bestätigt, dass $x_3 = 5$ und $x_4 = 45$ Nullstellen von G sind. Aus dem gegebenen Graphen erkennt man, dass die dritte Nullstelle ($x_5 = -7{,}5$) negativ ist, dass die Gewinnzone also zwischen den beiden Nullstellen $x_3 = 5$ und $x_4 = 45$ liegt. *Diese Argumentation liegt durch die Betrachtung des gegebenen Graphen von G nahe, und es wird keine Diskussion über die dritte Nullstelle und ihre Lage erwartet.* Berechnung des maximalen Gewinns: Man sieht auch anhand des Graphen, dass zwischen $x = 5$ und $x = 45$ – nämlich in der Gewinnzone – genau eine Extremstelle, und zwar eine Maximalstelle, liegt. Die notwendige Bedingung für eine lokale Extremstelle $G'(x) = 0$ liefert die äquivalenten Gleichungen: $-6x^2 + 170x + 300 = 0$ $\Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{85}{3}x - 50 = 0$ $\Leftrightarrow \quad x = \frac{85}{6} \pm \sqrt{\frac{7225}{36} + \frac{1800}{36}}$ $\Leftrightarrow \quad x = \frac{85}{6} \pm \frac{95}{6}$ $\Leftrightarrow \quad x = 30 \quad \vee \quad x = -\frac{5}{3}$ Bei $x = 30$ liegt also das Gewinnmaximum. *Mit der vorhergehenden Argumentation, die man auch über den prinzipiellen Verlauf einer kubischen Funktion mit negativem Leitkoeffizienten präzisieren könnte, braucht nicht mehr über die zweite Ableitung argumentiert zu werden.* *Dass 30 ME die gewinnmaximale Produktionsmenge sind, kann auch durch den Nachweis bestätigt werden, dass x = 30 Nullstelle von G' ist.* Es gilt $G(30) = 28\,125$. Für die Herstellungsmenge von 30 Mengeneinheiten wird der Gewinn maximal. Er beträgt dann 28 125 Geldeinheiten.	10	25	
e)	Die Kosten haben konstant um 625 Geldeinheiten zugenommen, entsprechend sinkt der Gewinn konstant um den gleichen Betrag. Die Gleichung der veränderten Gewinnfunktion lautet $G_{neu}(x) = -2x^3 + 85x^2 + 300x - 4000$ und unterscheidet sich von der ersten Gewinnfunktion also auch nur um die Konstante 625 und hat damit an der **gleichen Stelle** ihr Maximum. Die Aussage des Firmenmitglieds ist also richtig. Der zur Herstellungsmenge $x = 30$ gehörende optimale Gewinn sinkt allerdings auch um 625 Geldeinheiten.			15
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

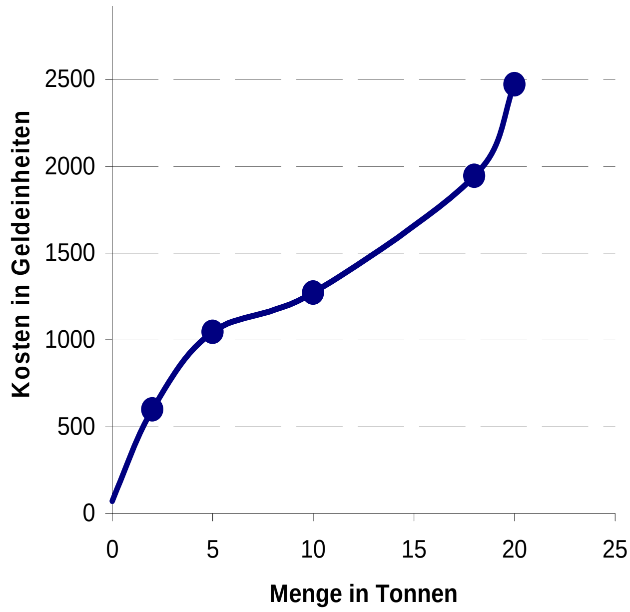
Aufgabe 6 Wetterstation

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Aufzeichnung zeigt, dass es während des gesamten Zeitraumes geregnet hat, weil der Graph streng monoton ansteigt (auf keinem Intervall konstant ist). Es hat ab dem frühen Nachmittag immer stärker geregnet, da der Graph im letzten Teil stark steigt. Wenig geregnet hat es von etwa 4 Uhr bis etwa 14 Uhr; auf diesem Intervall steigt der Graph schwach.	10	5	
b)	Ein Zylinder mit einer Grundfläche von 1 m^2 = 10 000 cm^2 und dem Volumen 1l = 1 000 cm^3 hat die Höhe $h = \frac{1000}{10000}$ cm = 0,1 cm = 1 mm.	5		
c)	 <u>Berechnung der Wassermenge:</u> $f(0)=80-40=40$; der Anfangspunkt ist der Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0\|40)$. $f(20)=80e^2-400-40\approx 151{,}124$; der Endpunkt der Kurve ist (20|151). Insgesamt sind im Beobachtungszeitraum 151 – 40 = 111 Liter Regen gefallen. *Die Bedeutung der Geraden kann unterschiedlich interpretiert werden.* Mögliche Antworten: Die Steigung der Geraden gibt die durchschnittliche Regenstärke während des gesamten Zeitraumes an. Wäre die Gerade die vom Messgerät aufgezeichnete Kurve, hätte es im gesamten Beobachtungszeitraum gleichmäßig stark geregnet.	10	5	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Bestimmung der Wendestelle: Es gilt: $f'(x) = 8e^{0,1x} - 2x$ $f''(x) = 0,8e^{0,1x} - 2$ Für $f''(x)=0$ gilt: $0,8e^{0,1x} = 2 \Leftrightarrow e^{0,1x} = 2,5 \Leftrightarrow 0,1x = \ln(2,5) \Leftrightarrow x = 10 \cdot \ln(2,5) \approx 9,163$ Nachweis der Wendestelle durch Argumentation mit der grafischen Darstellung bzw. über die 3. Ableitung: $f'''(x) = 0,08e^{0,1x}$. Die Wendestelle liegt bei $x \approx 9,2$.		20	
e)	Die erste Ableitung gibt die Stärke des Regens zum jeweiligen Zeitpunkt an. In der Wendestelle hat die erste Ableitung eine Extremstelle, im Fall der gegebenen Funktion eine Minimalstelle. Dies bedeutet, dass der Regen kurz nach 9 Uhr am schwächsten war.			10
f)	Wir definieren – entsprechend e) – die Werte der ersten Ableitung als „momentane Regenstärke“ zu den entsprechenden Zeitpunkten. Es gilt: $f'(18) \approx 12,4$. Die zugehörige – hier passende – Maßeinheit ist mm pro Stunde [$\frac{\text{mm}}{\text{h}}$]. Um 18 Uhr betrug die momentane Regenstärke also 12,4 $\frac{\text{mm}}{\text{h}}$. Um 9.12 Uhr war nach e) die momentane Regenstärke minimal. Einsetzen dieses Wertes in f' ergibt: $f'(9,2) \approx 1,7$, Um 9.12 Uhr betrug die Regenstärke nur 1,7 $\frac{\text{mm}}{\text{h}}$. Mit einer Betrachtung der „mittleren Regenstärke“ schließt sich der Kreis: Schon in der Antwort zu c) haben wir die Steigung der Geraden, also den Quotienten $\frac{f(20)-f(0)}{20-0} \approx \frac{111}{20} = 5,55$ als mittlere Regenstärke interpretiert. Diese Rechnung entspricht einer Grundvorstellung (ohne Differential- und Integralrechnung), die sich nur auf die gefallene Regenmenge – also auf die Funktion *f* – bezieht. Allgemein kann man den Mittelwert einer beliebigen stetigen (integrierbaren) Funktion *g* auf einem Intervall [a ; b] sinnvoll durch $\frac{\int_a^b g(x)dx}{b-a}$ definieren.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	In unserem Fall beziehen wir diesen Ansatz auf die momentane Regenstärke, also auf die Funktion f'. So gesehen muss dann also $\dfrac{\int_0^{20} f'(x)dx}{20-0}$ berechnet werden. Nun ist aber *f* eine Stammfunktion von f', es muss also tatsächlich wieder nur $\dfrac{f(20)-f(0)}{20} \approx 5{,}55$ berechnet werden. Die mittlere Regenstärke im Zeitraum von 0 bis 20 Uhr betrug also auch in dieser Interpretation etwa 5,55 $\frac{\text{mm}}{\text{h}}$. *<u>Bemerkung:</u> Diese Aufgabe ist besonders gut geeignet, Grundvorstellungen der Differential- und Integralrechnung herauszuarbeiten, und sie macht auch den Hauptsatz besonders anschaulich.* *Da ausdrücklich in der Aufgabenstellung f) auf die Integralrechnung verwiesen wird, sollte eine Antwort, in der nur der schon in c) betrachtete Quotient berechnet wird, in der Bewertung nur eine Teilpunktzahl ergeben.*		5	10
g)	Beispiel:  • Wolkenbruch: stark ansteigende Kurve • Nieselregen: schwach ansteigende Kurve • Sonnenschein: Kurve hat die Steigung 0. *Es wird nicht erwartet, dass keine Knicke im Graphen auftreten(Stetigkeit der Regenstärke) und dass der Graph in der Wolkenbruchphase einen Wendepunkt hat, aber der gesamte Graph sollte bis zum Sonnenschein streng monoton steigen, insgesamt in der Wolkenbruchphase steiler sein als in der Nieselregenphase, beim Nieselregen annähernd linear sein und natürlich in der Sonnenscheinphase konstant sein.*		10	5
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 7 Chemieunternehmen

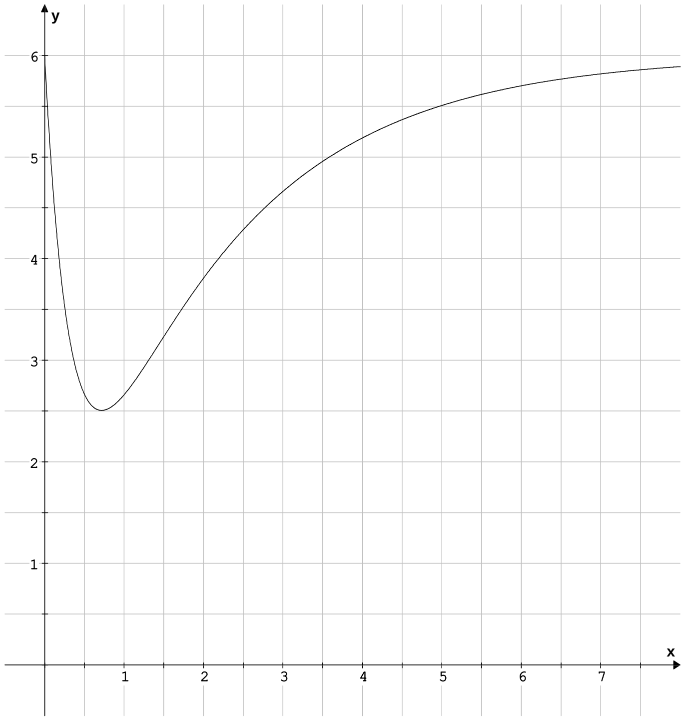
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	*Es gibt verschiedene Möglichkeiten zur Bearbeitung:* So kann z.B. der Funktionsterm einer linearen Funktion aus zwei ausgewählten Datenpaaren bestimmt und mit dessen Hilfe das dritte Datenpaar überprüft werden: $g(x) = m \cdot x + n$ Aus den Punkten (2 | 600) und (10 | 1272) erhält man: (1) $600 = m \cdot 2 + n$ (2) $1272 = m \cdot 10 + n$ Danach gilt: $8m = 672$ und $m = 84$ sowie $n = 432$. Die Gerade durch die beiden Punkte hat die Gleichung $g(x) = 84x + 432$. Überprüfung für (18 | 1944): $1944 = 84 \cdot 18 + 432$ ist richtig. Die drei gegebenen Punkte liegen also auf einer Geraden. *Man könnte auch den mittleren Kostenzuwachs m (die Steigung von g) bei Erhöhung der Produktion um eine Tonne berechnen:* Für die Punkte (2 | 600) und (10 | 1272) erhält man: $m = \frac{1272-600}{10-2} = 84$. Für die Punkte (10 | 1272) und (18 | 1944) erhält man: $m = \frac{1944-1272}{18-10} = 84$, also das gleiche Ergebnis. Die Punkte liegen auf einer Geraden.	15		
b)	*Als Skizze wird nur der Graph einer monoton steigenden Funktion durch die 5 Punkte erwartet. Beispiel:*  	10		

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	Die Gleichung der Ableitungsfunktion von K lautet: $K'(x) = 3x^2 - 60x + 320$. Für $K'(x) = 0$ und damit $3x^2 - 60x + 320 = 0$ erhält man $x_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 - \frac{320}{3}}$. Die Diskriminante der quadratischen Gleichung ist negativ. Die Gleichung hat damit keine (reellen) Lösungen. Folglich hat K keine Extremstellen. Dies bedeutet, dass K als kubische Funktion mit positivem Leitkoeffizienten streng monoton wachsend ist. Dies ist charakteristisch für die betriebliche Kostenentwicklung, da bei Erhöhung der Produktionsmenge x stets mit erhöhten Kosten $K(x)$ zu rechnen ist.		15	5
d)	Die Gleichung der Erlösfunktion lautet $E(x) = -5x \cdot (x - 66) = -5x^2 + 330x$. Hierbei handelt es sich um die Gleichung einer quadratischen Funktion mit den Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 66$. Da bei einer quadratischen Funktion die Nullstellen symmetrisch zur x-Koordinate des Scheitelpunktes liegen und der Graph der Erlösfunktion E eine nach unten geöffnete Parabel ist, besitzt die Erlösfunktion somit ein Maximum mit positivem Funktionswert an der Stelle $x = 33$. *Zulässig, aber weniger elegant ist die Berechnung der Extremstelle mit Hilfe der Ableitungen.*		10	
e)	Gemäß Aufgabe lautet die Gleichung der Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 25x^2 + 10x - 72$. Hieraus erhält man $G'(x) = -3x^2 + 50x + 10$ Der Ansatz $G'(x)$ führt auf eine quadratische Gleichung mit den Lösungen $x_1 = \frac{25}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{655}$ und $x_2 = \frac{25}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{655}$. Für die gesuchte Maximalstelle kommt wegen $x \geq 0$ nur die Stelle $x_2 \approx 16{,}86$ in Frage. Aus dem typischen Verlauf einer kubischen Funktion mit negativem Leitkoeffizienten schließt man, dass ein Maximum nur bei $x_2 \approx 16{,}86$ liegen kann. *Oder:* Die Überprüfung an Hand der zweiten Ableitung der Gewinnfunktion ergibt: $G''(x) = -6x + 50$ und $G''(x_2) < 0$. Somit wird der Gewinn bei der produzierten Menge x_2 maximal. Der maximale Gewinn beträgt $G(16{,}86) \approx 2410{,}47$ GE.		30	
f)	Unter der Annahme einer ganzrationalen Funktion 3. Grades als Kostenfunktion erhält man den maximalen Gewinn bei einer Produktion von knapp 17 Tonnen Waschmittel. Der neue Abteilungsleiter hat also Recht mit seiner Forderung, die Produktion müsse erhöht werden.			15
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Aufgabe 8 Bevölkerungsentwicklung

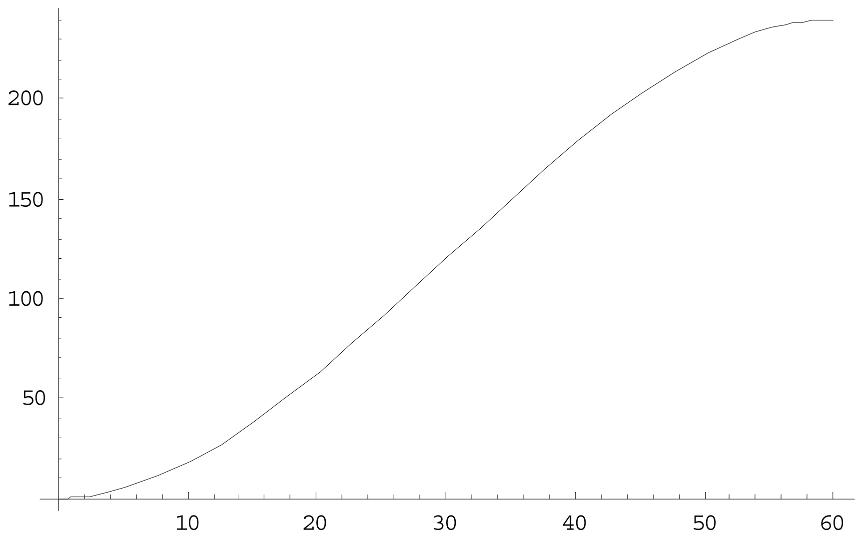
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Der Graph beginnt bei $x = 0$ mit einem Funktionswert von 6, $f(0)=6$. Dann fällt er, läuft durch ein Minimum und nähert sich wieder (vermutlich) einem konstanten Wert an. Bei $x = 0$ gilt $f(0)=6=6-6e^0+6e^0$. Die beiden Exponentialterme gleichen sich also aus, und der Funktionswert wird nur vom absoluten Glied bestimmt. Da der Betrag des Terms $6e^{-3x}$ schneller sinkt als der Betrag des Terms $-6e^{-1,5x}$ steigt, werden die Funktionswerte zunächst kleiner. Für große x-Werte sind sowohl $-6e^{-0,5x}$ als auch $+6e^{-3x}$ (und damit auch ihre Summe) klein gegen Eins. Der Term 6 übernimmt also wieder das „Kommando“. Das Zusammenspiel von Termen, die zunächst den Funktionswert vermindern und dann immer weniger wichtig werden, führt zu einem Minimum.	5	15	
b)	Untersuchung auf Extrempunkte: $f'(x)=3e^{-0,5x}-18e^{-3x}$ $f'(x)=0:\quad 3e^{-0,5x}-18e^{-3x}=0 \Leftrightarrow 3e^{-0,5x}=18e^{-3x}$ $\Leftrightarrow e^{-0,5x}=6e^{-3x}$ $\Leftrightarrow -0,5x=\ln 6-3x$ $\Leftrightarrow 2,5x=\ln 6$ $\Leftrightarrow x=\frac{\ln 6}{2,5}=0,7167.$ Der Grafik kann entnommen werden, dass f an dieser Stelle ein Minimum hat. Der Nachweis kann aber auch über die 2. Ableitung erfolgen: $f''(\frac{\ln 6}{2,5})=-1,5e^{-0,5\cdot\frac{\ln 6}{2,5}}+54e^{-3\cdot\frac{\ln 6}{2,5}}>0.$ Berechnung des Funktionswertes an der Minimalstelle: $f\left(\frac{\ln 6}{2,5}\right)=-6e^{-0,5\cdot\frac{\ln 6}{2,5}}+6e^{-3\cdot\frac{\ln 6}{2,5}}+6\approx 2{,}506.$ f hat in $T\,(0{,}72 \mid 2{,}51)$ ein Minimum.	10	10	
c)	Untersuchung auf Wendestellen: $f''(x)=-1,5e^{-0,5x}+54e^{-3x}$ $f'''(x)=0,75e^{-0,5x}-162e^{-3x}$ $f''(x)=0:\quad -1,5e^{-0,5x}+54e^{-3x}=0 \Leftrightarrow 1,5e^{-0,5x}=54e^{-3x} \Leftrightarrow e^{-0,5x}=36e^{-3x}$ $-0,5x=\ln 36-3x \Leftrightarrow 2,5x=\ln 36 \Leftrightarrow x=\frac{\ln 36}{2,5}\approx 1,433.$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Der Grafik kann entnommen werden, dass *f* an dieser Stelle eine Wendestelle hat. Ein hinreichendes Argument ist, dass die 2. Ableitung an dieser Stelle eine Durchgangsnullstelle hat. Der Nachweis kann aber auch über die 3. Ableitung erfolgen: $f'''(1{,}433) \approx -1{,}831 \neq 0$. Die Funktion *f* hat die Wendestelle (gerundet) bei 1,43.		10	
d)	(Zum Zeitpunkt der Werksschließung beträgt die Einwohnerzahl 60 000). Der Tiefpunkt gibt den Zeitpunkt mit der geringsten Einwohnerzahl und die dazugehörige Einwohnerzahl an. (Nach gut 7 Jahren hat die Einwohnerzahl mit etwa 25 000 Einwohnern ihr Minimum erreicht. Danach stieg sie wieder an.) An der Wendestelle steigt die Einwohnerzahl am stärksten. (Nach gut 14 Jahren hat das Bevölkerungswachstum seinen Höhepunkt erreicht.) *Hinweis: Die Klammerpassagen werden von den Prüflingen nicht erwartet.*			5
e)	Grundsätzlich beschreibt die Funktion das Zusammenwirken zweier Faktoren jeweils exponentiellen Wachstums – einmal negativen Wachstums von einem festen Wert, einmal positiven Wachstums gegen einen anderen festen Wert. Exponentielles Wachstum tritt auf, wenn die Veränderungsrate proportional zum Wert ist. Bei den Veränderungen der Bevölkerungszahl nach der Werkschließung, also der Bevölkerungsabnahme, bedeutet dies, dass der Bevölkerungsabbau letztlich fast proportional zur jeweiligen Bevölkerungszahl erfolgt. Die Wiederansiedlung arbeitet von Beginn an auf einer längeren Zeitskala. Sie hat anfangs einen größeren Erfolg als später, so dass das Bevölkerungswachstum immer langsamer steigt. *Hinweis: Warum allerdings der Aufwärtstrend einer Funktion des Typs $f(x) = k \cdot (1 - e^{-mx})$ folgen sollte, ist der Situation nicht zu entnehmen.*		5	5
f)	$F(x) = 12 \cdot e^{-0{,}5x} + k \cdot e^{-3x} + 6x$. Da die Ableitung einer Stammfunktion von *f* wiederum *f* ergeben muss, wird hier *F'* gebildet und dann ein Koeffizientenvergleich durchgeführt: $F'(x) = -6e^{-0.5x} - 3k \cdot e^{-3x} + 6$ $f(x) = -6e^{-0.5x} + 6e^{-3x} + 6$ Vergleich der Koeffizienten von *F'* und *f*: Aus $-3k = 6$ folgt $k = -2$. Danach gilt: $F(x) = 12 \cdot e^{-0{,}5x} - 2 \cdot e^{-3x} + 6x$. <u>Berechnung des Integrals:</u> $\int_0^{1{,}5} f(x)\,dx = \left[12e^{-0{,}5x} - 2e^{-3x} + 6x\right]_0^{1{,}5} \approx 4{,}6462$. Berechnung der durchschnittlichen Einwohnerzahl in diesen 15 Jahren: $\frac{4{,}6462}{1{,}5} \approx 3{,}0975$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Dies entspricht einer durchschnittlichen Einwohnerzahl von etwa 31 000. Die Stadt erhielt Fördermittel in Höhe von etwa 31 Millionen DM.	5	15	
g)	 Unter diesen Bedingungen prognostiziert die Funktionsvorschrift, dass die Einwohnerzahl immer langsamer steigen und nie den Wert 60 000 übersteigen würde. Die Einwohnerzahl wird sich wohl anders entwickeln, da z.B. weitere Firmen eröffnen oder schließen könnten, die Alterspyramide sich auswirkt oder wegen der schönen Lage sich die Zuwanderung verstärkt…		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 9 Helikopter

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Funktion $v_{vertikal}$ ist nach Voraussetzung eine ganzrationale Funktion 2. Grades mit Nullstellen bei $t = 0$ und $t = 60$ sowie dem Scheitelpunkt $S\,(30 \mid 6)$. Daraus ergibt sich die gegebene Funktionsgleichung. Der Helikopter steigt in der gesamten Zeit zwischen $t = 0$ s bis $t = 60$ s. An den beiden Grenzen des betrachteten Zeitintervalls ist jeweils die Steiggeschwindigkeit Null (der Helikopter beginnt und verharrt an Schluss also bei konstanter Höhe). Die Steiggeschwindigkeit nimmt in den ersten 30 Sekunden zu und erreicht zur Hälfte der Zeit, also bei $t = 30$ s, ihren Maximalwert von 6 m/s. Danach nimmt sie symmetrisch in der Zeit wieder ab.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Hinweis: Die Beschreibung „Die Änderung der Steiggeschwindigkeit, also die Steigbeschleunigung, verläuft linear, beginnt bei einem positiven Wert, ist bei t = 30 s Null und dann negativ“ wird nicht erwartet.	5	10	
b)	Die Einheit der *t*-Achse ist 1 s, die der *v*-Achse ist 1 m/s. Eine Fläche im Diagramm hat als Einheit das Produkt der Einheiten der Achsen, also hier die Einheit 1 m; damit ist die Dimension die einer Länge. *Hinweis: Eine Argumentation wie: „Die Dimension der t-Achse ist die der Zeit, die der v-Achse die einer Geschwindigkeit. Da* $Weg = Geschwindigkeit \cdot Zeit$*, hat die Fläche die Dimension eines Weges“ kann noch akzeptiert werden)* Ein zugehöriges *h(t)*-Diagramm (das mit *h*(0) = 0) sieht so aus:  Der Zusammenhang ist : Jede mögliche Funktion *h* ist eine Stammfunktion von $v_{vertikal}$; $v_{vertikal}$ – als Beschreibung der zeitlichen Änderung von *h* – ist die Ableitungsfunktion jeder möglichen *h* – Funktion.	10	10	5
c)	Alle Flugbahnen, die der gegebenen $v_{vertikal}(t)$ -Funktion entsprechen, haben „dasselbe Höhenprofil“, ihre *h(t)*-Funktionen sind also bis auf die Anfangshöhe gleich. *Hinweis: Insbesondere sind die Gesamthöhendifferenz zur Ausgangshöhe und die Differenz zur Ausgangshöhe zu jedem Zeitpunkt für jede der möglichen Flugbahnen gleich.*		10	
d)	Eine Stammfunktion zu $v_{vertikal}$ ist $h_{vertikal}(t) = -\frac{1}{450}t^3 + \frac{1}{5}t^2$. Die Gesamthöhendifferenz ist $h_{vertikal}(60) - h_{vertikal}(0)$ und ergibt sich zu 240 m. Damit ist die durchschnittliche Steiggeschwindigkeit $\overline{v_{vertikal}} = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

Wenn man mit dem Integral arbeitet, so lautet der Ansatz

$$\overline{v_{vertikal}} = \frac{1}{t_{end} - t_{anf}} \int_{t_{anf}}^{t_{end}} v_{vertikal}(t)dt .$$

Da $t_{anf} = 0$ und $t_{end} = 60$ sowie $\int_{t_{anf}}^{t_{end}} v_{vertikal}(t)dt = h_{vertikal}(t_{end}) - h_{vertikal}(t_{anf})$,

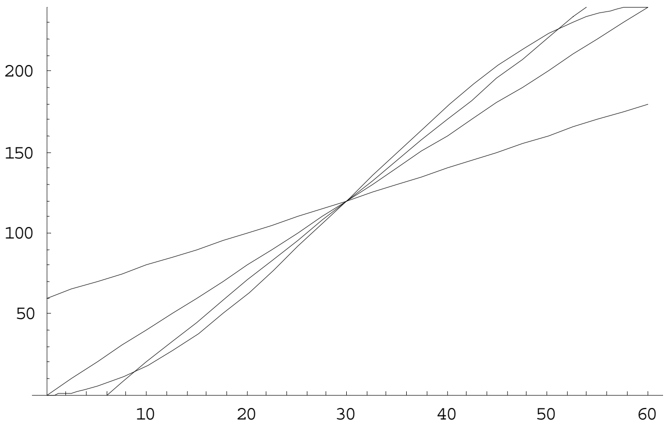
ergeben sich die oben aufgeführten Werte.

</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

Die Drohne hat grundsätzlich ein lineares Steigverhalten, ihr Höhengewinn ist also (vom Beginn des beschriebenen Vorgangs an) proportional zur vergangenen Zeit. Im *h*(*t*) Diagramm ist dieses Steigverhalten immer durch eine Gerade wiedergegeben.
Der Helikopter hingegen steigert seinen Höhengewinn bis $t = 30$ s, dann schwächt sich der Höhenzuwachs wieder ab, bis sich bei $t = 60$ s die Höhe nicht mehr ändert.

Die Steiggeschwindigkeit v ist die Steigung der die Flugbahn beschreibenden Geraden.
Aufgrund der Aufgabenstellung ist die Geschwindigkeit v eine positive Größe.

Das nebenstehende Diagramm enthält zusätzlich zur schon gezeigten Flugbahn des Helikopters drei mögliche Flugbahnen der Drohne, und zwar für die Geschwindigkeiten $v = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $v = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$:



Grundsätzlich gilt $h_v(30) = 120$.

Die oben gegebene Stammfunktion $h_{vertikal}$ ist genau die Stammfunktion, die den Helikopter zum Zeitpunkt $t = 0$ s auf dem Boden starten lässt, und es ergibt sich $h_{vertikal}(30) = 120$.

</td><td>5</td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>

Nur beim Maximum der $v_{vertikal}$ -Funktion (Scheitelpunkt) hat der entsprechende Funktionswert nur ein Urbild; alle anderen Steiggeschwindigkeiten des Helikopters in seinem Bereich (also $v_{vertikal} \in [0,6]$) tauchen zweimal auf.

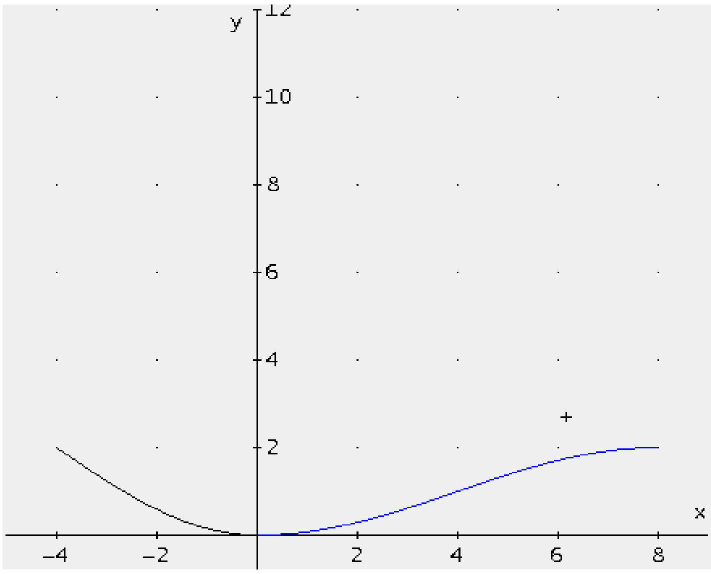
Wenn die Drohne also mit $v = 6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ steigt, haben die beiden Objekte zu genau einem Zeitpunkt dieselbe Steiggeschwindigkeit – nämlich 6 m/s.
Demzufolge hat die Drohne zweimal dieselbe Steiggeschwindigkeit wie der Helikopter, wenn ihre Steiggeschwindigkeit zwischen 0 m/s und 6 m/s liegt (letzterer Wert ist ausgeschlossen).

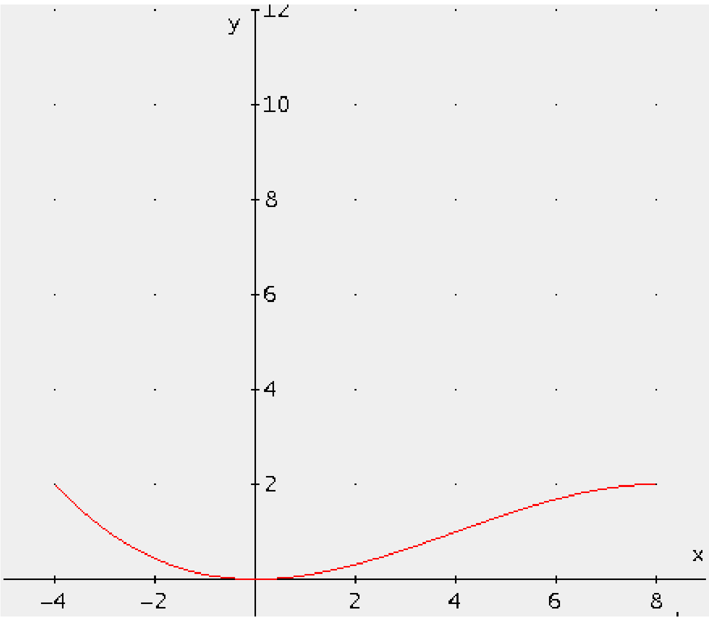
</td><td></td><td>5</td><td>10</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
g)	Hier müssen die Terme der Höhenfunktionen gleichgesetzt werden: $v\cdot(-15)+120=-\frac{1}{450}\cdot 15^3+\frac{1}{5}\cdot 15^2$. Es ergibt sich $v=5{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; die Drohne muss also eine Steiggeschwindigkeit von 5,5 m/s haben. Damit ist die gefragte Höhe 37,5 m. Um die Startverzögerung zu errechnen, muss die Gleichung $0=5{,}5\cdot(t_{Start}-30)+120$ gelöst werden. Es ergibt sich $t_{Start}=8\frac{2}{11}\text{ s}\approx 8{,}18\text{ s}$. Als Konsequenz aus e) wird die Drohne auch nach 30 s, in einer Höhe von 120 m, unmittelbar neben dem Helikopter sein. Sie wird – als Konsequenz der Symmetrie – aber auch noch ein drittes Bild liefern können, und zwar 45 s nach Start des Helikopters in einer Höhe von 203,5 m.		(10)	(10)
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 10 Kanalbett

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Einsetzen der Koordinaten –4, 0 und 8 für x in die Gleichung von h ergibt; $h(-4) = 2$, $h(0) = 0$ und $h(8) = 2$. Für den Nachweis der Extrempunkte gibt es mehrere Möglichkeiten: Vergleicht man die Funktion h mit der Kosinusfunktion, so erkennt man: Der Graph der Kosinusfunktion wird an der x-Achse gespiegelt und in x-Richtung um den Faktor 8 gestreckt. Zudem gilt – für $x \le 0$: Der Graph wird um den Faktor 2 in y- Richtung gestreckt und um 2 Einheiten nach oben verschoben. Der Wertebereich von h ist hier also das Intervall [0;2]. – für $x > 0$: Der Graph wird um eine Einheit nach oben verschoben. Der Wertebereich von h ist hier also das Intervall]0,2]. Damit ist der Koordinatenursprung der Tiefpunkt des Graphen von h, H ein Hochpunkt. <u>Oder:</u> Man betrachtet die Ableitungsfunktionen: Eine hinreichende Bedingung für Extremstellen ist: $h'(0)=0$ und $h''(0)>0$ bzw. $h'(8)=0$ und $h''(8)<0$. Die ersten zwei Ableitungen lauten:			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$h'(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{8}x\right), & -4\le x\le 0\\ \frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\pi}{8}x\right), & 0<x\le 8\end{cases}$ und $h''(x)=\begin{cases}\frac{\pi^2}{32}\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right), & -4\le x\le 0\\ \frac{\pi^2}{64}\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right), & 0<x\le 8\end{cases}$. Es gilt: $h'(0)=\frac{\pi}{4}\sin(0)=0$ bzw. $h'(8)=\frac{\pi}{8}\sin(\pi)=0$ und $h''(0)=\frac{\pi^2}{32}\cos(0)=\frac{\pi^2}{32}>0$ bzw. $h''(8)=\frac{\pi^2}{64}\cos(\pi)=-\frac{\pi^2}{64}<0$. Auf die zweite Ableitungsfunktion kann verzichtet werden, wenn die Art der Nullstellen von h' betrachtet wird. Es handelt sich jeweils um einfache Nullstellen, also mit Vorzeichenwechsel.	5	15	
b)			10	
c)	Die Graphen der trigonometrischen Funktionen vom obigen Typ sind achsensymmetrisch zur *y*-Achse. Sie gehen aus dem Graphen der Kosinusfunktion durch Vergrößerung der Periode, z. T. Vergrößerung der Amplitude, Spiegelung an der *x*-Achse und Verschiebung in Richtung der *y*-Achse hervor. Durch keine dieser Veränderungen ändert sich etwas an der Eigenschaft, dass der Graph achsensymmetrisch zur *y*-Achse ist. Das Kanalbett ist aber offensichtlich nicht achsensymmetrisch, also kann eine Funktion alleine nicht das Kanalbett beschreiben.		10	5
d)	Einsetzen der Koordinaten –4, 0 und 8 für *x* in die Gleichung von *f* ergibt: $f(-4)=2$, $f(0)=0$ und $f(8)=2$. $x = 0$ ist eine doppelte Nullstelle von *f*, also berührt der Graph von *f* die *x*-Achse im Koordinatenursprung. Da *P* und *H* oberhalb der *x*-Achse liegen, muss es sich um einen Tiefpunkt handeln. Es muss, da *f* eine Funktion 3.Grades ist, noch einen Hochpunkt geben. Dieser liegt an der zweiten Nullstelle von $f'(x)=-\frac{3}{128}x^2+\frac{3}{16}x$, an der Stelle $x = 8$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Oder: Mithilfe der beiden Ableitungsterme $f'(x) = -\frac{3}{128}x^2 + \frac{3}{16}x$ und $f''(x) = -\frac{3}{64}x + \frac{3}{16}$ erhält man $f'(0) = 0$ bzw. $f'(8) = -\frac{3}{128} \cdot 64 + \frac{3}{16} \cdot 8 = 0$ und $f''(0) = \frac{3}{16} > 0$ bzw. $f''(8) = -\frac{3}{64} \cdot 8 + \frac{3}{16} = -\frac{3}{16} < 0$. Oder man betrachtet wie in Teil a) lediglich die Art der Nullstellen von f und verzichtet auf die Untersuchung von f''.	15		
e)		5		
f)	$H(8 \mid 2)$ und $P(-4 \mid 2)$ liegen beide auf der Geraden $y = 2$. Deshalb ist die Querschnittsfläche gleich dem Flächeninhalt zwischen dieser Geraden und dem Graphen von f. $\int_{-4}^{8}(2 - f(x))dx = \int_{-4}^{8}\left(2 + \frac{1}{128}x^3 - \frac{3}{32}x^2\right)dx = \left[2x + \frac{1}{512}x^4 - \frac{1}{32}x^3\right]_{-4}^{8}$ $= 16 + 8 - 16 - (-8 + 0{,}5 + 2)$ $= 13{,}5$ Die Querschnittsfläche hat den Inhalt 13,5 FE.		15	
g)	Beide Graphen haben den Wendepunkt $W(4 \mid 1)$ und sind bezüglich W punktsymmetrisch. Damit hat die Fläche zwischen den Graphen von f und h über dem Intervall $[0 ; 4]$ den gleichen Inhalt wie die über dem Intervall $[4 ; 8]$. Für den Flächeninhalt der Querschnittsfläche bedeutet das also: was der Graph der Funktion h auf dem Intervall $[0 ; 4]$ mehr an Fläche mit der Parallelen zur x-Achse einschließt als der Graph der Funktion f, schließt dieser auf dem Intervall $[4 ; 8]$ mehr ein als der Graph von h.			20

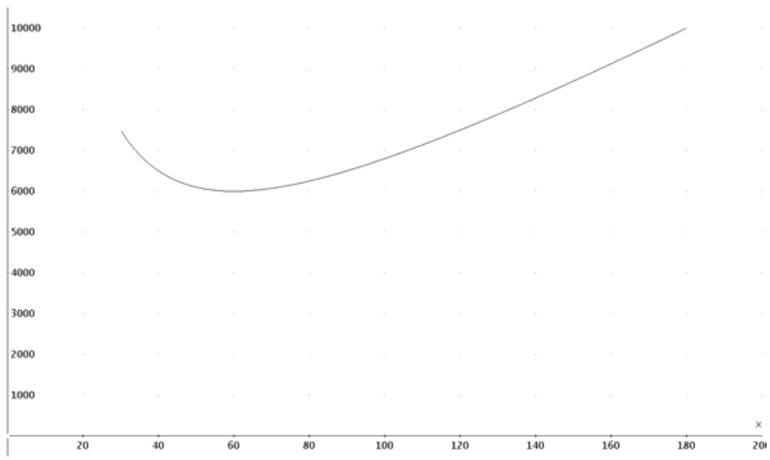
<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>g*)</td><td>
Zuerst wird die Steigung der Geraden durch B und H in Abhängigkeit von u bestimmt. Von dieser Funktion wird anschließend das Maximum gesucht.
$m(u)=\frac{2-f(u)}{8-u}=\frac{2-\left(-\frac{1}{128}u^3+\frac{3}{32}u^2\right)}{8-u}$. Die Ableitungsfunktion hat den Term:
$m'(u)=\frac{\left(\frac{3}{128}u^2-\frac{3}{16}u\right)\cdot(8-u)-\left(2+\frac{1}{128}u^3-\frac{3}{32}u^2\right)\cdot(-1)}{(8-u)^2}=\frac{-\frac{1}{64}u^3+\frac{9}{32}u^2-\frac{3}{2}u+2}{(8-u)^2}$.
Die notwendige Bedingung für eine Maximumstelle $m'(u)=0$ führt auf die Gleichung $-\frac{1}{64}u^3+\frac{9}{32}u^2-\frac{3}{2}u+2=0$ wobei nur die Nullstellen in $\mathbb{R}\setminus\{8\}$ zu beachten sind. Durch Probieren findet man $u_{M1}=2$ und kann mithilfe der Polynomdivision oder eines numerischen Verfahrens die anderen Nullstellen finden. Die weitere Rechnung zeigt, dass $u_{M2}=8$ eine doppelte Nullstelle ist. Da $m(8)$ nicht definiert ist, ist $u_{M1}=2$ genauer zu untersuchen. Lässt man den Punkt B auf dem Graphen von f zum Koordinatenursprung wandern, so erhält man zunächst Leitungen mit kleinen Steigungen. Die Leitungen verlaufen dann immer steiler, um dann wieder abzuflachen. Es muss zwischendurch genau ein Maximum geben, eben an der Stelle 2.

Oder: Eine hinreichende Bedingung ist z. B. ein Vergleich von Funktionswerten, die in der Nähe von u_{M1} liegen:
$m(1)=\frac{35}{128},\quad m(2)=\frac{9}{32}=\frac{36}{128},\quad m(3)=\frac{35}{128}$.
Also ist u_{M1} eine Maximumstelle. Die Koordinaten sind: $B\left(2\,\middle|\,\frac{5}{16}\right)$.

<u>Alternativer Lösungsweg:</u> Wenn man verschiedene Geraden durch H betrachtet, die mit dem Graphen von f den Punkt $B(u|f(u))$ <u>gemeinsam haben</u>, so ist die Gerade am steilsten, die den Graphen in B nur berührt, also Tangente an B ist. Dann lässt sich die Steigung dieser Geraden auf zwei Arten ausdrücken und es gilt: $\frac{f(u)-f(2)}{u-8}=f'(u)$. Umgeformt ergibt sich folgende Gleichung:
$-\frac{1}{128}u^3+\frac{3}{32}u^2-2=\left(-\frac{3}{128}u^2+\frac{3}{16}u\right)\cdot(u-8)$.

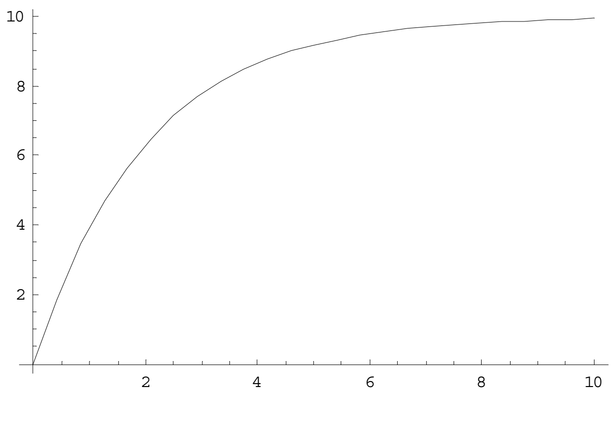
Nach u aufgelöst (durch Probieren und Polynomdivision bzw. ein numerisches Verfahren) ergeben sich die Lösungen $u = 2$ und $u = 8$. Da die Steigung der Geraden an der Stelle $u = 8$ nicht definiert ist, folgt: $u = 2$ ist die einzige Lösung und die Koordinaten von B lauten: $B\left(2\,\middle|\,\frac{5}{16}\right)$.
</td><td></td><td></td><td>(20)</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>

Aufgabe 11 Zäune

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Die Seitenlänge des Quadrats beträgt $x=\sqrt{3000}$ m. Der Außenzaun hat dann eine Länge von $4x$, die Innenzäune von $3x$. Die Gesamtkosten in € betragen also $4\cdot\sqrt{3000}\cdot 20+3\cdot\sqrt{3000}\cdot 10=110\cdot\sqrt{3000}\approx 6024{,}95$	5	5	
b)	Bezeichnet man mit y die Seite des Geheges, an die zwei Innenbereiche grenzen, so gilt: $x\cdot y=3000 \Leftrightarrow y=\frac{3000}{x}$. Für die Kosten K gilt: $K(x,y)=2\cdot(x+y)\cdot 20+(x+2y)\cdot 10=50x+60y$, also $K(x)=50x+\frac{180\,000}{x}$. *Hinweis:Es wird nicht erwartet, dass Schülerinnen und Schüler die Schreibweise $K(x,y)$ benutzen.*		10	5
c)	Für $x\to 0$ gilt: $K(x)\to\infty$, da der zweite Summand beliebig groß wird. Für das Gehege bedeutet dies, dass, wenn die Seite x des Rechtecks verkleinert wird, die Seite y wegen des konstanten Flächeninhalts vergrößert wird. Vernachlässigt man die Dicke der Zäune, so werden die Zäune der Länge y beliebig lang und damit die Kosten entsprechend riesig. Jede nachvollziehbare, auf das Gehege bezogene Festlegung kann akzeptiert werden, nicht jedoch $D_K=\mathbb{R}^*$ oder $D_K=\mathbb{R}^+$. Da ein Gebiet eingezäunt wird, entstehen in jedem Fall Kosten. $K(x)>0$. Für $x\to\infty$ gilt analog zu oben: $K(x)\to\infty$. Es muss also mindestens ein lokales Minimum geben.		10	10
d)	$K'(x)=50-\frac{180\,000}{x^2}$. Da es nur eine positive Nullstelle der ersten Ableitung gibt und zwar bei $x=60$, liegt hier nach den Überlegungen aus c) das lokale Minimum. Das Gehege hat dann die Maße 60 m x 50 m . $K(60)=6\,000$. Die Kosten für die Zäune betragen also mindestens 6 000 €.	10		
e)	Für den Definitionsbereich $[30\,;180]$ erhält man: 	10	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	Die Kosten dürfen nur 5 000 € betragen. Es muss also gelten: $50x + 60y = 5000 \iff y = \frac{500}{6} - \frac{5}{6}x$. $A(x,y) = x \cdot y$ bzw. $A(x) = \frac{500}{6}x - \frac{5}{6}x^2$ beschreibt den Flächeninhalt des eingezäunten Rechtecks. Der Graph dieser Funktion ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt $\left(50 \mid 2083,\overline{3}\right)$. Die maximale Fläche ist also ca. $2083\ \mathrm{m}^2$ groß.		10	5
g)	Durch den Einbau der 6 Tore entstehen Mehrkosten von 960 € im Vergleich zu f). Analog ergibt sich: $50x + 60y = 4040 \iff y = \frac{202}{3} - \frac{5}{6}x$ sowie $A(x) = \frac{202}{3}x - \frac{5}{6}x^2$ mit dem Scheitelpunkt $\left(40,4 \mid 1360,1\overline{3}\right)$. Jetzt können nur noch ca. $1360\ \mathrm{m}^2$ eingezäunt werden, also etwa $720\ \mathrm{m}^2$ weniger.		10	5
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 12 Kondensator

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	 Es muss gelten: $0,9 = \frac{U(t)}{U_0} = 1 - e^{-t/2} \iff t = -2 \cdot \ln 0,1$. Damit ergibt sich $t \approx 4,605s$.	15	5	
b)	Die Beschreibung des Vorgangs liefert: • Die Spannung am Kondensator wächst ständig. • Sie kann aber höchstens den Wert der Batteriespannung (also U_0) annehmen.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	• Das Wachstum wird immer langsamer und nähert sich dem Endwert an. Die gegebene Funktion *U* erfüllt diese Kriterien: • Da der Term $e^{-t/\tau}$ monoton mit wachsenden *t* kleiner wird, wächst der Term $(1-e^{-t/\tau})$ monoton. • Da der Term $e^{-t/\tau}$ für wachsendes *t* gegen Null geht, geht der Term $(1-e^{-t/\tau})$ für wachsendes *t* gegen 1. Also geht der Funktionsterm $U_0 \cdot (1-e^{-t/\tau})$ gegen U_0. • Da der Term $e^{-t/\tau}$ für wachsendes *t* immer langsamer fällt, steigt der Term $(1-e^{-t/\tau})$ für wachsendes *t* immer langsamer. Also geht der Funktionsterm $U_0 \cdot (1-e^{-t/\tau})$ immer langsamer gegen U_0. *Bemerkung: Die Beschreibung des Vorgangs sagt nicht, dass die Änderungsrate der beschreibenden Funktion proportional zum Abstand vom Endwert ist. Insofern ist aus der Beschreibung die Funktion nicht eindeutig zu gewinnen. Aber dies ist auch nicht gefordert – es ist lediglich gefordert, zu zeigen, dass die Funktion die angegebenen Eigenschaften wiedergibt.*		15	
c)	Der Wert der (zeitlichen) Änderung der Spannung ist der Wert der Ableitung der Funktion *U* zu dem entsprechenden Zeitpunkt. Da im angegebenen Fall $U'(t) = 5 \cdot e^{-t/2}$, ergibt sich $U'(0) = 5$. Allgemein gilt $U'(t) = \frac{U_0}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}$ und damit $U'(0) = \frac{U_0}{\tau}$. Die Tangente an die *U* – Funktion bei *t* = 0 geht durch den Ursprung und hat die Steigung $U'(0)$. Damit hat sie die Gleichung $tg(t) = \frac{U_0}{\tau} \cdot t$, und diese Funktion erreicht den Wert U_0 bei $t = 1\,\tau$.. *Hinweis: Dass in der Physik üblicherweise die zeitliche Ableitung mit* $\dot{U}$ statt mit U' *dargestellt wird, kann hier nicht erwartet werden. Ebenso muss unberücksichtigt bleiben, dass* U' *eben keine Spannung ist, sondern eine Spannungsänderung, die die Einheit 1 V/s trägt.*		15	
d)	Die Beschreibung des Vorgangs liefert: • Die Stromstärke sinkt, von einem Anfangswert beginnend, ständig. • Die Stromstärke ist an die Spannung am Kondensator so gekoppelt, dass sie direkt von der Differenz Kondensatorspannung – Batteriespannung abhängt. • Wenn $U(t) = U_0$, ist die Stromstärke Null. Die gegebene Stromstärke-Funktion erfüllt diese Bedingungen: • Eine Exponential-Funktion mit negativem Exponenten für positive Argumente fällt monoton und geht für wachsende Argumente gegen Null. • Die gegebene Funktion lässt die Stromstärke sogar proportional zur Differenz Kondensatorspannung – Batteriespannung sein.			

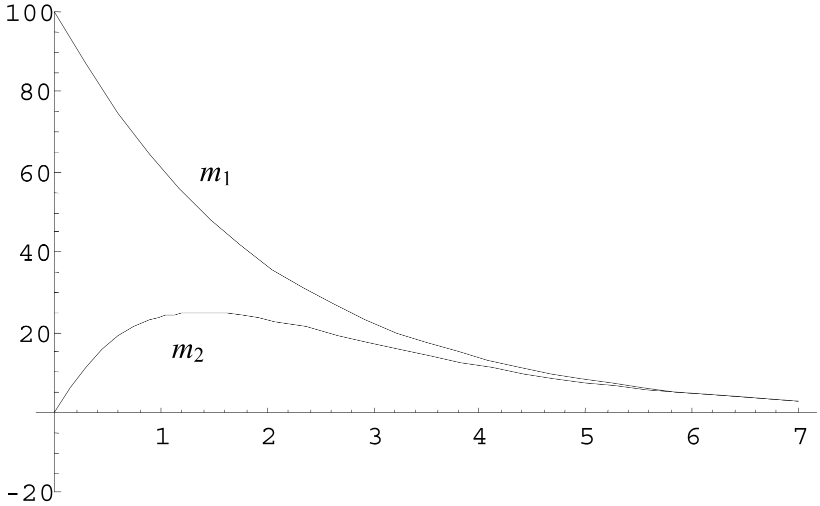
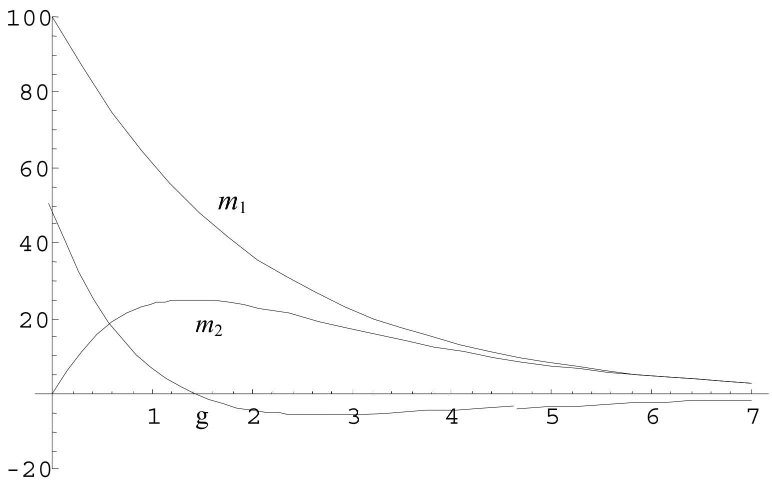
<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung, Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td></td><td>Bemerkung: Diese Proportionalität ist in der Beschreibung nicht gefordert – die Beschreibung spricht nur von je – desto. Sie liegt aber nahe, wird normalerweise unmittelbar angenommen und ist auch physikalisch korrekt.

Für den Zeitpunkt $t_{0,1}$, zu dem die Stromstärke auf 10 % ihres Anfangswertes abgefallen ist, muss gelten:
$e^{-t_{0,1}/2} = \frac{I(t_{0,1})}{I_0} = 0{,}1 \;\Leftrightarrow\; t_{0,1} = -2\cdot\ln 0{,}1 \approx 4{,}605$.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Die Aufgabe führt die Funktion Q als Integralfunktion ein:
$Q(t) = \int_0^t I(h)dh$.
Mit der bekannten Stromstärke-Funktion ergibt sich
$\int I(t)dt = -I_0\cdot\tau\cdot e^{-t/\tau} + c_0$
und damit mit den gegebenen Werten $Q(t) = 4 - 4e^{-t/2} = 4\cdot(1-e^{-t/2})$.
Der Wert der gefragten Ladung ergibt sich als $Q(4)$:
$Q(4) = 4\cdot(1-e^{-2}) \approx 3{,}569$.

Die maximal aufnehmbare Ladung ist der Wert für $Q(t)$, der sich ergibt, wenn man t über alle Grenzen wachsen lässt.
Wenn t immer größer wird, so wird $e^{-t/2}$ immer kleiner und konvergiert gegen Null.
Also ist der gesuchte Wert für die maximale Ladungsmenge $Q_{\max} = 4$.
Bemerkung: Diese Argumentation ist auch ohne eine streng formale Einführung des Begriffs des uneigentlichen bestimmten Integrals durchführ- und nachvollziehbar.</td><td>5</td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Mit $U(t) = U_0\cdot(1-e^{-t/\tau})$, $I(t) = I_0\cdot e^{-t/\tau}$ sowie $R = \frac{U}{I}$ ergibt sich
$R(t) = \frac{U_0(1-e^{-t/\tau})}{I_0 e^{-t/\tau}} = \frac{U_0}{I_0}\cdot(e^{t/\tau}-1)$.
Diese Funktion beginnt bei $t = 0$ mit $R(0) = 0$, steigt streng monoton und verhält sich für große t-Werte wie eine Exponentialfunktion.
Also:
Beim Einschalten hat der Kondensator praktisch überhaupt keinen Widerstand.
Während des Aufladens wächst der Widerstand des Kondensators stetig und steigt schließlich exponentiell an.</td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 13 Radioaktiver Zerfall

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Am Beginn, also bei $t = 0$, muss noch die gesamte Menge vorhanden gewesen sein, also 100 mg. Dies ergibt sich auch durch Einsetzen in die Gleichung für m_1. Zu lösen ist die Gleichung $0{,}5 = e^{-0{,}5 \cdot t}$. Die Lösung ist $t = 2 \cdot \ln(2) \approx 1{,}386$. Die Substanz S_1 hat also eine Halbwertszeit von etwa 1,386 Stunden. Vorhanden sind nach 6 Stunden $m_1(6)$ an Substanz, zerfallen demzufolge $100\,\text{mg} - m_1(6) \approx 95{,}02\,\text{mg}$.	5	10	
b)	Am Beginn, also bei $t = 0$, ist von der Ausgangssubstanz noch nichts zerfallen, also kann von Substanz S_2 noch nichts vorliegen. Einsetzen *von* $t = 0$ in die Funktionsgleichung von m_2 bestätigt diese Überlegung. S_2 entsteht aus der Ausgangssubstanz S_1, ihre Zuwachsrate ist also gleich der Abnahmerate von S_1. Diese ist anfangs am größten und wird immer kleiner; die Menge an „angesammeltem“ S_2 wächst also ständig und geht gegen den Anfangswert von S_1. Andererseits ist S_2 ja nicht stabil und zerfällt ebenfalls exponentiell. Das bedeutet, dass die Abnahme – die Zerfallsrate – von S_2 proportional zum momentanen Wert ist. m_2 beginnt damit bei Null, steigt wegen der anfänglich hohen „Lieferungsrate“ aus dem Zerfall von S_1 an und wird dann, da der eigene Zerfall irgendwann die „Nachlieferung“ überholen wird, wieder abnehmen und letztlich gegen Null gehen. Zur <u>Berechnung</u> des Maximums ist es notwendig, die Nullstelle von m_2' zu bestimmen: Mit $m_2'(t) = -50 \cdot e^{-0{,}5 \cdot t} + 100 \cdot e^{-t}$ ergibt sich $0 = -e^{-0{,}5 t_E} + 2 \cdot e^{-t_E} \Leftrightarrow t_E = \ln 4 \approx 1{,}386$. Hinreichende Argumente für die Extremaleigenschaft von t_E liefert z.B. die Beobachtung, dass t_E Durchgangsnullstelle von m_2' ist, oder die Tatsache, dass t_E die einzige Nullstelle von m_2' ist, zusammen mit dem oben angefügten Argument, dass m_2 ein Maximum haben muss. Einsetzen liefert $m_2(t_E) = 25$. Die maximale Menge der Substanz S_2 tritt also nach knapp 1,4 Stunden auf, und es sind 25 mg. *Hinweis* *Die Zerfallskonstante für den Zerfall von S_2 ist 1, die Halbwertszeit für den Stoff S_2 beträgt damit 0,69 Stunden.* *Es ist zwar interessant, nachzuvollziehen, wie sich m_2 aus m_1 unter diesen Bedingungen ergibt, aber im Rahmen einer Prüfungsaufgabe ist dies ganz unmöglich. Im Diagramm im Anhang ist die Funktion m_2.in Abhängigkeit des Zerfallsparameters wiedergegeben (Werte zwischen 0 und 3). Man sieht, dass für eine kleine Zerfallskonstante von S_2 (also eine große Halbwertszeit) die Menge an S_2 praktisch der Menge des zerfallenen S_1 folgt, bei einer kleinen Halbwertszeit von S_2 hingegen praktisch alles gelieferte S_2 sofort zerfällt und damit die Menge an S_2 der momentanen Lieferungsrate folgt.*	5	10	10

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>
</td><td>10</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Bestimmung der Nullstellen von g durch Nullsetzen des Funktionsterms:
$g(x)=0 \Leftrightarrow -50e^{-0,5x}+100e^{-x}=0 \Leftrightarrow e^{-0,5x}=2e^{-x}$
$\Leftrightarrow -0,5x=\ln(2)-x \Leftrightarrow x=\ln(4).$
Die einzige Nullstelle von g liegt bei $x=\ln(4)\approx 1,386$.
Überprüfung auf mögliche Extremstellen durch Nullstellensuche bei der ersten Ableitung:
$g'(x)=25e^{-0,5x}-100e^{-x}$,
$g'(x_E)=0 \Leftrightarrow 25e^{-0,5x_E}-100e^{-x_E}=0 \Leftrightarrow 1=4e^{-0,5x_E} \Leftrightarrow x_E=\ln(16)$.
Wiederum ergibt sich ein hinreichendes Argument für die Extremaleigenschaft von x_E daraus, dass x_E Durchgangsnullstelle von g' ist.
Hinweis: Natürlich kann auch mit der zweiten Ableitung argumentiert werden.
g hat also ein einziges Extremum (ein Maximum) mit den Koordinaten $(2,773\,|\,-6,25)$.
Für $x\to\infty$ geht der Term $e^{-0,5x}$ ebenso wie auch e^{-x} gegen Null und damit auch $g(x)\to 0$. Der Graph von g nähert sich also für zunehmende x-Werte der x-Achse.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	g ist die Ableitungsfunktion zu m_2. Betrachtet man z.B. die Graphen, so liegen der Hochpunkt des Graphen von m_2 und die Nullstelle von g bei dem gleichen x-Wert. Für $x \to \infty$ strebt $g(x)$ gegen Null. Ein anderer Weg führt über die Ableitung von m_2. $m_2' = g$.	10	10	5
e)	Der gesuchte Flächeninhalt A berechnet sich als Integral über g im Intervall von 0 bis ln(4): $A = \int_0^{\ln(4)} (-50e^{-0,5x} + 100e^{-x})dx = \left[100e^{-0,5x} - 100e^{-x}\right]_0^{\ln(4)} = 25$ und beträgt 25 Flächeneinheiten. Dieser Zahlenwert ist gleich dem Bestand an S_2 zum gleichen Zeitpunkt $t = \ln(4)$. Dies ist nicht zufällig: Da g ja die Ableitungsfunktion – die zeitliche Änderungsrate – von m_2 ist, muss $\int_0^t g(x)dx$ die vorhandene Menge an S_2 angeben.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	30	45	25

Aufgabe 14 Wassertank

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Legt man einen Zylinder mit einem Grundflächenradius von 30 cm und einer Höhe von 100 cm um den gesamten Tank, so erhält man eine Obergrenze für das Tankvolumen. $V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 900 \cdot 100 \approx 282\,743{,}338...$ 282 743 cm^3 sind knapp 283 Liter (da 1000 cm^3 = 1 l). Also gilt $V_{\text{Tank}} < 300$ Liter.	5	5	
b)	Die Funktion f ist quadratisch und ihr Funktionsterm in Scheitelpunktsform gegeben, ihr Graph muss eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt $(40 \mid 30)$ sein. Dieses trifft für den Graphen 2 zu. Der Graph 1 gehört zu der Wurzelfunktion g. Rotieren diese Graphenabschnitte um die x-Achse, so erhält man für beide Funktionen eine Kuppel. Bei der Funktion f weist die Kuppel eine Spitze auf, bei der Funktion g ist sie rund. Legt man ein Koordinatensystem mittig in den Wassertank, so beschreiben beide Funktionen im Intervall [40; 50] den Abschluss des rechten oberen Tankviertels, denn: $g(40) = f(40) = 30$ und $g(50) = f(50) = 0$ $g(50) = f(50) = 0$.	15	20	10

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Der Graph der Funktion g schließt an der Stelle $x = 40$ mit einem Knick an den Tankkörper an, so wie in der Skizze angedeutet. Spiegelt man den Graphen von g an der x-Achse, so ergibt sich kein Knick für $y = 0$, da die Wurzelfunktion dort eine senkrechte Tangente besitzt, was ebenfalls der Skizze entspricht.

Der Graph der Funktion f schließt an der Stelle $x = 40$ ohne Knick an den Tankkörper an, da dort der Scheitelpunkt der Parabel liegt, die Tangente also waagerecht ist.

Allerdings weist der Graph von f bei $y = 0$ bei der Spiegelung an der x-Achse einen Knick auf, da die Steigungen endlich, aber entgegengesetzt im Vorzeichen sind.

Die Funktion g gibt die in der Skizze erkennbaren charakteristischen Eigenschaften wieder und stellt damit, da Genaueres über die Tankform nicht bekannt ist, die bessere Näherung da.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Um das Volumen einer Tankkuppel zu erhalten, setzen wir die Funktion 9 für k in die angegebene Formel ein und integrieren über das Intervall [40; 50].

$$V_{\text{Kuppel}} = \pi \cdot \int_{40}^{50} (4500 - 90x)\,dx = \pi \cdot \left[4500x - 45x^2\right]_{40}^{50} = 14\,137\,.$$
Das Kuppelvolumen beträgt also ca. 14,14 Liter.

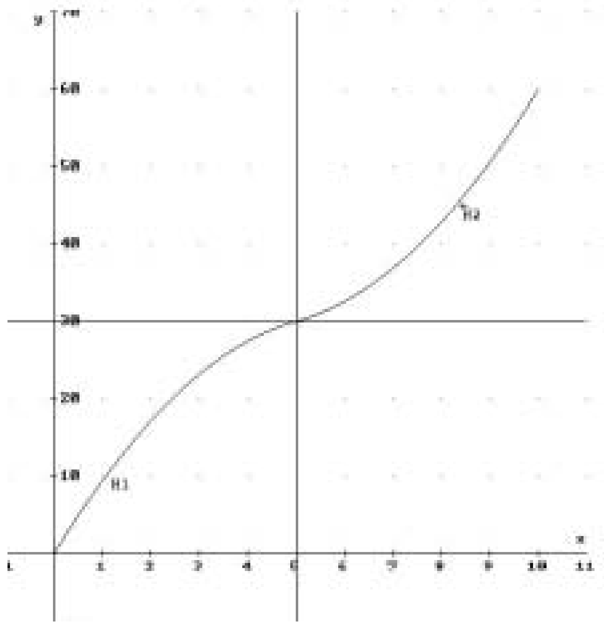
Um das Volumen des gesamten Wassertanks zu berechnen, benötigen wir zwei Mal das Kuppelvolumen sowie das Volumen des Mittelzylinders mit der Höhe 80 cm.

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 30^2 \cdot 80 \approx 226\,195\,,$$
d.h. der Mittelzylinder hat ein Volumen von ca. 226,2 Liter.

Damit ergibt sich das Gesamtvolumen zu: $V \approx 254{,}5$ l.</td><td>5</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Liegt der Tank auf der Seite, so setzt sich die Füllhöhenfunktion H aus zwei Teilfunktionen zusammen, wobei die Füllhöhe von H_1 sich von 0 bis 30 cm erstreckt und die von H_2 von 30 bis 60 cm.

Die Zunahme von H_1 (Ableitung) nimmt von der Füllhöhe 0 cm bis 30 cm ständig ab, da der Tankquerschnitt zunimmt.

Bei der Funktion H_2 nimmt die Zunahme von der Füllhöhe 30 cm bis 60 cm ständig zu, da der Tankquerschnitt nun wieder geringer wird.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Skizze: 		10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Aufgabe 15 Windanlage

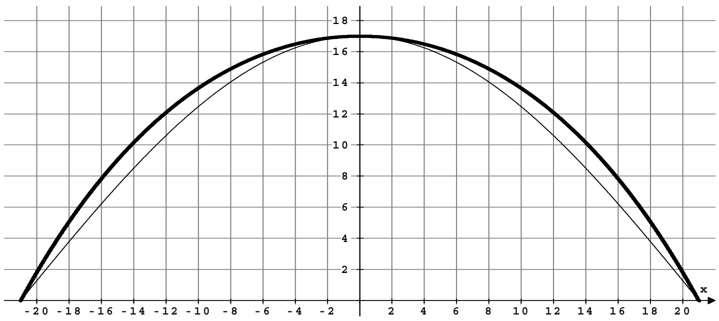
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Eine allgemeine Kosinusfunktion hat die Gleichung $f(x) = a \cdot \cos(bx + c)$, wobei a der Streckungsfaktor in y-Richtung ist, b der Streckungsfaktor in x-Richtung und c, die „Phasenverschiebung“, die Verschiebung der Maxima beschreibt. Hier liegt das Maximum bei $x = 0$, also ist auch $c = 0$. Da $f(0) = 17$, muss $a = 17$ gelten. Schließlich: Die erste Nullstelle soll bei $x = 21$ liegen, die “reine” Kosinusfunktion hat ihre „erste“ Nullstelle bei $x = \frac{\pi}{2}$. Also muss $b = \frac{\pi}{42}$ gelten. Alle drei Koeffizienten ergaben sich notwendig, also ist f eindeutig bestimmt. Durch Einsetzen eines Arguments, z.B. $x = 10$, in die beiden Funktionsgleichungen ergibt sich $g(10) = 13{,}66$ und $f(10) \approx 12{,}46$. Daraus folgt, dass zu f der innere (dünnere) Graph gehört und zu g der äußere (dickere) Graph.	5	15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>g ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades und weist nur Terme in gerader Ordnung in x auf.
Damit ist g eine gerade Funktion (es gilt also für alle $x \in D_g : g(x) = g(-x)$), und damit ist der Graph von g achsensymmetrisch zur y-Achse.
Ebenso folgt sofort, dass bei $x = 0$ eine Extremstelle vorliegt.
Zur weiteren Prüfung auf Extrema wird die erste Ableitung benötigt:
$g'(x) = -0{,}00006 \cdot x^3 - 0{,}064 \cdot x = -x \cdot (0{,}00006 \cdot x^2 + 0{,}064)$.
Notwendig für Extremstellen ist $g'(x_E) = 0$.
Da der Term in den Klammern keine Nullstelle aufweist, ist die bereits bekannte Extremstelle bei $x_E = 0$ die einzige, und aufgrund des negativen (Leit-)Koeffizienten von der höchsten Potenz von g (bzw. der Linearität des Nullstellenterms in g') handelt es sich um eine Maximalstelle: $E_{\max}(0\,|\,17)$.
Hinweis: Es gibt natürlich noch weitere Möglichkeiten des Nachweises, z. B. über die zweite Ableitung.
Einsetzen von $x = 21$ in die Funktionsgleichung von g liefert $g(21) \approx 0{,}029$; diese Differenz von 2,9 cm erlaubt davon zu sprechen, dass 21 „in guter Näherung“ eine Nullstelle von f ist.. (Aufgrund der Symmetrie von g gilt dies ebenso für -21 .)
Hinweis: Die Nullstellen liegen tatsächlich bei $\pm 20{,}985$.</td><td>20</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td><u>Winkel:</u>
Der gesuchte Winkel ist mit der jeweiligen ersten Ableitung verbunden durch $\tan\alpha_f = f'(21)$ bzw. $\tan\alpha_g = g'(21)$, d. h.
$\alpha_f = \tan^{-1}(f'(21))$ bzw. $\alpha_g = \tan^{-1}(g'(21))$
Mit $f'(x) = -\frac{17\pi}{42}\sin\left(\frac{\pi}{42}x\right)$ und $g'(x) = -0{,}00006 \cdot x^3 - 0{,}064x$ ergeben sich:
$\alpha_f \approx 52°$ und $\alpha_g \approx 62°$.
Hinweis: Wenn man als Ergebnis Winkel von 0,905 bzw. 1,086 herausbekommt, so sind die Winkel fälschlicherweise in Bogenmaß angegeben worden.

<u>Länge:</u>
Da Achse, Boden und Seil ein rechtwinkliges Dreieck bilden, bei dem ein Winkel und eine Kathete bekannt sind, lässt sich die Hypotenuse berechnen, und es ergibt sich jeweils mit $l = \frac{56}{\cos\alpha}$: $l_f \approx 90{,}6\,m$ und $l_g \approx 120{,}2\,m$.
Wird die Funktion f zugrunde gelegt, ist das Abspannseil ungefähr 90,6 m lang, bei der Funktion g wäre das Abspannseil etwa 102,2 m lang.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Zeichnet man eine Tangente ein und misst den entsprechenden Winkel, so erhält man links (am oberen Ende) etwa 57° und rechts (am unteren Ende) etwa 59°. Das spricht weder für die eine noch die andere Funktion.
Die Krümmung von g in der Nähe des Einlaufpunkts ist deutlich zu groß; deshalb stimmt die Kosinusfunktion dort eher mit der tatsächlichen Form überein.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

Andererseits formen die Blätter im Bereich des Maximums der Funktion (also im Bereich des größten Abstands) deutlich einen weiteren Bogen als ihn die Kosinusfunktion aufweist. Dieser Bogen wird von der ganzrationalen Funktion g weitaus besser beschrieben.



</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

Wie im Aufgabenteil b) gezeigt, sind 21 und -21 in guter Näherung als Nullstellen von g anzusehen.

Die Querschnittsfläche A bestimmt sich über

$$\begin{aligned} A &= 2\cdot\int_0^{21} g(x)dx \\ &= 2\cdot\left[-0{,}000003x^5-\frac{0{,}32}{3}x^3+17x\right]_0^{21} \\ &\approx 2\cdot 245{,}96 \\ &\approx 492\ \text{m}^2. \end{aligned}$$

Die Querschnittsfläche ist also etwa 492 m^2 groß.

</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>

Eine mögliche Lösung wäre ein Polygonzug-Verfahren, bei dem die Funktion der Blätter stückweise durch Strecken genähert wird und die Verbindungspunkte zwischen den Streckenabschnitten auf dem Graphen liegen.
Bei einer symmetrischen Einteilung in fünf Strecken ist rechnerisch günstig, dass die mittlere waagerecht liegt, ihre Länge also einfach der Abstand ihrer Stützstellen ist.
Für eine Einteilung in fünf Strecken ist es eine Möglichkeit, die Stützstellen (so sollen die x-Koordinaten der Verbindungspunkte bezeichnet werden) gleichabständig zu wählen, also mit

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	$x_1 = -12,6, x_2 = -4,2, x_3 = 4,2$ und $x_4 = 12,6$ zu rechnen. Der Abstand zwischen je zwei Verbindungspunkten ergibt sich dann mit $l_i = \sqrt{8,4^2 + (g(x_i) - g(x_{i-1}))^2}$ und $l = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5$ zu $l = 56,44$ m. *Hinweis: Will man die Näherung verbessern, so ist es sinnvoll, die Streckenabschnitte zu verkürzen, auf denen g stark gekrümmt ist, und dafür die Streckenabschnitte zu verlängern, auf denen g weniger stark gekrümmt ist. Praktisch bedeutet dies, alle Stützstellen nach innen zu verlagern.* *Konkretes Nachrechnen zeigt allerdings, dass der äquidistante Ansatz bis auf etwa 4 cm die optimale Lösung für vier Stützstellen ergibt.* *Die Idee, die Steigung der Funktion auszunutzen – was letztlich zum Wegintegral* $s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$ *führt – wird nicht erwartet.* *Die hiermit ermittelte Blattlänge ist übrigens* $l = 56,86\,m$. *Jede andere sinnvolle Lösung ist ebenfalls als richtig anzusehen.*		5	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

Aufgabe 16 Molkerei

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	<u>Kostenfunktion:</u> Die ganzrationale Funktion möglichst niedrigen Grades, die den gegebenen Bedingungen genügt, ist eine Funktion dritten Grades. $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $K''(x) = 6ax + 2b$ fixe Kosten: 400 GE $\quad d = 400$ Wendepunkt (10 | 700) $\quad K(10) = 700$ $\quad K''(10) = 0$ Wendetangente $t_w(x) = 20x + 500$ $\quad K'(10) = 20$ Daraus ergibt sich das folgende Gleichungssystem: $1000a + 100b + 10c + 400 = 700$ $300a + 20b + c = 20$ $60a + 2b = 0$ mit den Lösungen: $a = 0{,}1,\ b = -3,\ c = 50$ und $d = 400$, also $K(x) = 0{,}1x^3 - 3x^2 + 50x + 400$			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Man kann zur Ermittlung der Kostenfunktion auch ausnutzen, dass eine Entwicklung um den Wendepunkt möglich ist.

<u>Definitionsbereich</u>: $D = [0 ; 50]$</td><td>10</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td><u>Erlösfunktion</u>: $E(x) = 70x$

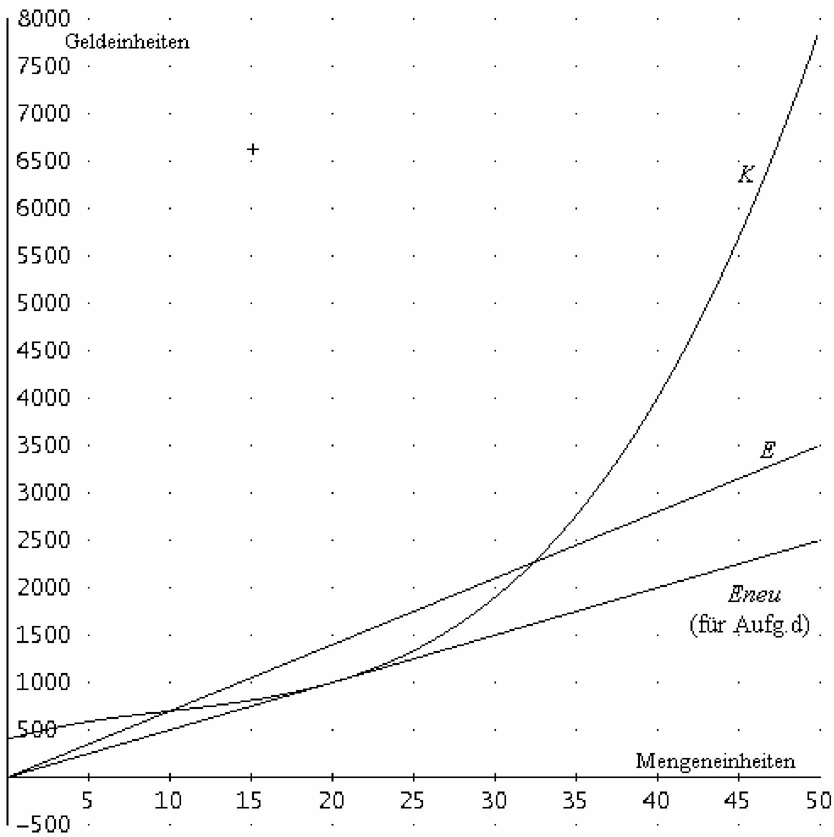
<u>Gewinnfunktion</u>:
$G(x) = E(x) - K(x)$, also
$G(x) = 70x - (0,1x^3 - 3x^2 + 50x + 400)$
$= -0,1x^3 + 3x^2 + 20x - 400$

<u>Skizze</u> am Ende der Musterlösung.

<u>Gewinngrenze</u>: Schnittstelle von Erlös- und Kostenfunktion bzw. Nullstelle der Gewinnfunktion
Eine Lösung ist mit $x = 10$ (Gewinnschwelle) gegeben, die anderen Lösungen lassen sich durch Polynomdivision bzw. mit dem Horner Schema ermitteln:
$-0,1 \cdot (x^3 - 30x^2 - 200x + 4000) = -0,1 \cdot (x-10) \cdot (x^2 - 20x - 400)$
$x^2 - 20x - 400 = 0$
ergibt $x = 10 + \sqrt{500} \approx 32,36$
oder $x = 10 - \sqrt{500} \notin D$
Die Gewinngrenze liegt bei 32,36 ME.

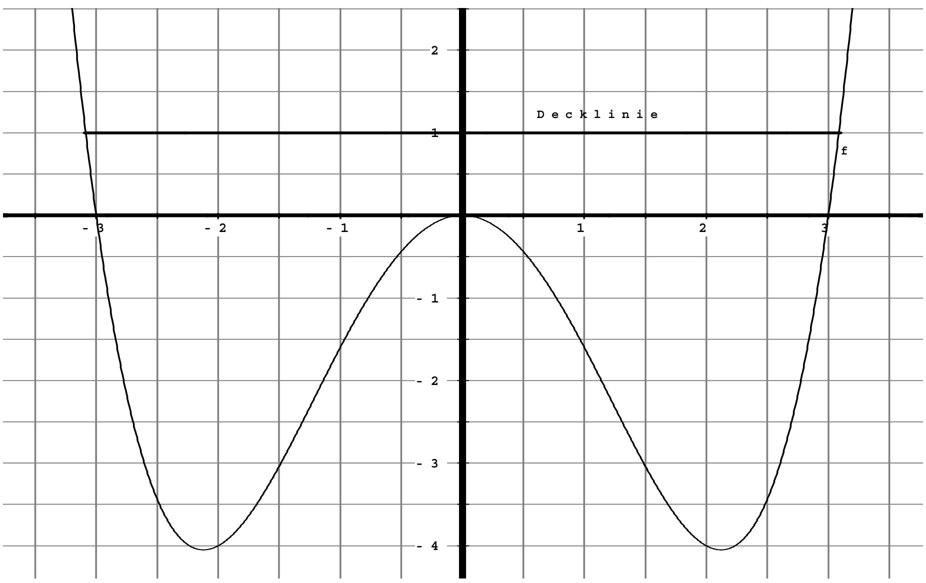
<u>Maximaler Gewinn</u>: $G'(x) = 0 \wedge G''(x) < 0$
$G'(x) = -0,3x^2 + 6x + 20$
$G''(x) = -0,6x + 6$
$-0,3x^2 + 6x + 20 = 0$ ergibt
$x = 10 + \sqrt{\frac{500}{3}} \approx 22,91$
oder $x = 10 - \sqrt{\frac{500}{3}} \notin D$
$G''(22,91) = -0,6 \cdot 22,91 + 6 < 0$
$G(22,91) = 430,33\text{GE}$.
Bei einer Produktion von ca. 22,9 ME wird ein maximaler Gewinn von ca. 430,33 GE erzielt.</td><td>10</td><td>35</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>In dem angenommenen Modell handelt es sich bei der Erlösfunktion um eine lineare Funktion, die Steigung dieser Funktion entspricht dem Preis pro ME, dieser ist konstant und unabhängig von der Produktionsmenge x.
Hier kann u.a. wie folgt argumentiert werden: Da die Produktion bei ca. 22,9 ME zu einem optimalen Gewinn führt, würde jede Veränderung des Verkaufspreises auch die absetzbare Menge verändern und eine Verringerung des Gewinns bewirken.</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
d)	1. Lösungsvariante (über die Steigung der Erlösfunktion): Der geforderte Preis entspricht der Steigung der Erlösfunktion. Da es sich hier um den niedrigsten Preis handelt, der gerade die Gesamtkosten deckt, kann die Steigung so lange verringert werden, bis aus der Sekante eine Tangente geworden ist. Damit entspricht der Preis dem Wert der ersten Ableitung von K an der Stelle 20. $K'(20)=50$ Bei einer Produktion von 20 ME deckt ein Mindestpreis von 50 GE die Gesamtkosten. Damit ist die Aussage des Abteilungsleiters bestätigt. 2. Lösungsvariante (über das Stückkostenminimum; der Mindestpreis muss das Minimum der Kosten pro ME abdecken): Funktion der Stückkosten: $k(x)=0{,}1x^2-3x+50+\frac{400}{x}$ Berechnung des Stückkostenminimums: $k'(x)=0: \quad 0{,}2x-3-\frac{400}{x^2}=0$ $0{,}2x^3-3x^2-400=0$ $x^3-15x^2-2000=0$ $(x-20)(x^2+5x+100)=0$ Die Gleichung hat genau eine reelle Lösung, nämlich $x = 20$. $k''(x)=0{,}2+\frac{800}{x^3} > 0$ für alle $x > 0$. Mindestpreis $k(20) = 40 – 60 + 50 + 20 = 50$. Bei einer Produktions- bzw. Absatzmenge von 20 ME deckt ein Mindestpreis von 50 GE die Gesamtkosten. Damit ist die Aussage des Abteilungsleiters bestätigt. 3. Lösungsvariante (über den Berührpunkt der Graphen von K und E): Die Steigung des Graphen der Erlösfunktion entspricht in diesem Sachkontext dem Preis pro ME. Bei $x = 20$ berühren sich die Graphen von K und E. $K(20) = 0{,}1\cdot 8000-3\cdot 400+50\cdot 20+400 = 1000$. Der Graph der Erlösfunktion geht also durch den Punkt (20 | 1000) und hat damit die Steigung $\frac{1000}{20} = 50$. Dieser Wert entspricht dem gesuchten Mindestpreis. Bei einer Produktions- bzw. Absatzmenge von 20 ME deckt ein Mindestpreis von 50 GE die Gesamtkosten. Damit ist die Aussage des Abteilungsleiters bestätigt.		5	10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Skizze 			
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

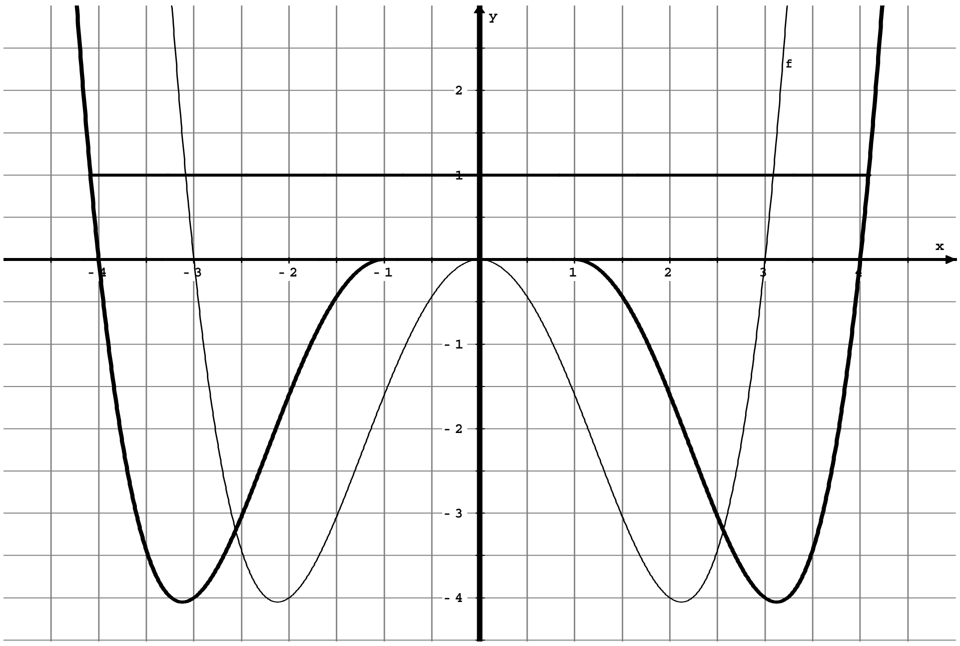
Aufgabe 17 Schiffbau

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Achsensymmetrie bedeutet, dass $f(x) = f(-x)$ gilt. Bei geraden Exponenten ist diese Bedingung immer erfüllt. Ermittlung der Tiefpunkte: Es sind die Lösungen von $f'(x) = 0$ zu suchen. Mit Hilfe des Ableitungsterms $f'(x) = 0{,}8x^3 - 3{,}6x$ ergibt sich: $0{,}8x^3 - 3{,}6x = 0{,}8x(x^2 - \frac{9}{2}) = 0$. Also hat der Graph an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} \approx 2{,}12$ und $x_3 = -\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} \approx -2{,}12$ waagerechte Tangenten.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Da diese ganzrationale Funktionen 4. Grades einen positivem Leitkoeffizienten hat und demnach nach oben geöffnet ist, liegt bei $x_1 = 0$ ein Maximum und jeweils bei x_2 und x_3 ein Minimum. Der Hochpunkt *H* hat die Koordinaten (0 | 0) und die Tiefpunkte die Koordinaten $\left(3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \mid \frac{81}{20}\right) \approx (2{,}12 \mid -4{,}05)$ sowie $\left(-3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \mid \frac{81}{20}\right) \approx (-2{,}12 \mid -4{,}05)$. Da die Decklinie laut Aufgabenstellung 1 Einheit über dem Hochpunkt liegt, beträgt der Abstand zwischen Decklinie und Tiefpunkt 5,05 Einheiten. <u>Länge der Decklinie:</u> Zu lösen ist folgende biquadratische Gleichung: $0{,}2x^4 - 1{,}8x^2 = 1$. Es sei $x^2 = z$, und man erhält die quadratische Gleichung in *z*: $0{,}2z^2 - 1{,}8z = 1$ mit den Lösungen $z_1 \approx 9{,}52$ und $z_2 \approx -0{,}52$. Zurückgerechnet auf die Variable *x* ergeben sich die beiden Lösungen $x_1 \approx 3{,}09$ und $x_2 \approx -3{,}09$. Da z_2 negativ ist, gibt es keine weiteren Lösungen. Die Länge der Decklinie beträgt also 6,18 Einheiten.  	10	25	
b)	Die gesuchte Gerade *t* verläuft durch den Koordinatenursprung, der mit *H* identisch ist, sie hat also die Gleichung $t(x) = m \cdot x$. Gesucht ist die Gerade mit maximaler Steigung durch *H* und durch einen auf dem Graphen von *f* liegenden Punkt $S\left(s \mid 0{,}2s^4 - 1{,}8s^2\right)$. Die Gerade durch *H* und *S* hat als Term $m(s)\cdot x$, wobei *m*(*s*) die von *s* abhängige Steigung der Geraden ist. Da *S* auf dem Graphen liegt, gilt $m(s)\cdot s = 0{,}2s^4 - 1{,}8s^2$. Nach Division durch $s \neq 0$ ergibt sich $m(s) = 0{,}2s^3 - 1{,}8s$. Die Ableitung der Steigung der Geraden $m'(s) = 0{,}6s^2 - 1{,}8$ wird Null gesetzt: $m'(s) = 0{,}6s^2 - 1{,}8 = 0$, um die maximale Steigung zu bestimmen: $0{,}6s^2 - 1{,}8 = 0 \mid : 0{,}6$ $s^2 - 3 = 0$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Damit sind $s_1 = \sqrt{3}$ und $s_2 = +\sqrt{3}$ Lösungen der Gleichung und diejenigen Stellen, an denen die Steigung extremal sind. Die Steigung der Geraden erhält man durch die Steigung der Funktion f an den Stellen s_1 und s_2: eingesetzt ergibt sich $f'(\sqrt{3}) = 0{,}8\sqrt{3}^3 - 3{,}6\sqrt{3} \approx -2{,}08$ Eine der gesuchten Geraden hat somit die Gleichung $t_1(x) = -2{,}08x$. *Hinweis: Eine Lösungsalternative führt über die Tangentengleichung* $t(x) = f'(s)\cdot(x-s) + f(s)$ *zur Lösung.* Der Winkel zwischen der Tangenten und der x-Achse berechnet sich aus $\tan\alpha_x = f'(\sqrt{3})$ bzw. $\alpha_x = \tan^{-1}(f'(\sqrt{3}) \approx 64{,}3°$. Der Winkel α_y zwischen der y-Achse und der Tangente ist somit etwa $90° - 63{,}4° = 26{,}6°$ groß. Der Blickwinkel hat nun die doppelte Größe wie α_y, er ist also etwas 53,2° groß.		15	10
c)	Zu berechnen ist zuerst die Querschnittsfläche. Dazu müssen die Nullstellen von f ausgerechnet werden. $0{,}2x^4 - 1{,}8x^2 = 0$ $0{,}2x^2(x^2 - 9) = 0$ Die Nullstellen ergeben sich zu $x_{N1} = 0$ und $x_{N2} = \sqrt{9} = 3$ und $x_{N3} = -\sqrt{9} = -3$ Unter Ausnutzung der Symmetrie ergibt sich die Querschnittsfläche A aus: $A = 2\cdot\left\vert\int_0^3 \left(0{,}2x^4 - 1{,}8x^2\right) dx\right\vert = 12{,}96.$ Da $V = A\cdot l$ und l = 12 m, ergibt sich ein Volumen von ca. 156 m³.	5	10	
d)	Hier werden zwei Lösungsvarianten vorgestellt. 1.Lösungsvorschlag: So wie die Aufgabe gestellt ist, besteht eine einfache Lösungsvariante darin, den Schiffsrumpf in der Mitte „aufzuschneiden“ und einen quaderförmigen Rumpfteil einzuschweißen (im Schiffsbau durchaus üblich). Dann müsste man die gesuchte neue Querschnittsfunktion stückweise definieren, also: $g_1(x) = \begin{cases} f(x+1), & \text{falls } x \le -1 \\ 0, & \text{falls } -1 < x \le 1 \\ f(x-1), & \text{falls } 1 < x \end{cases}$ *Diese Lösungsvariante wird vermutlich selten von den Schülern gewählt, sie sollte aber voll anerkannt werden, obwohl sie im Gegensatz zu den folgenden Varianten keinen Rechenaufwand erfordert, da sie von inhaltlichem und nicht von formalem Denken bestimmt ist.*			

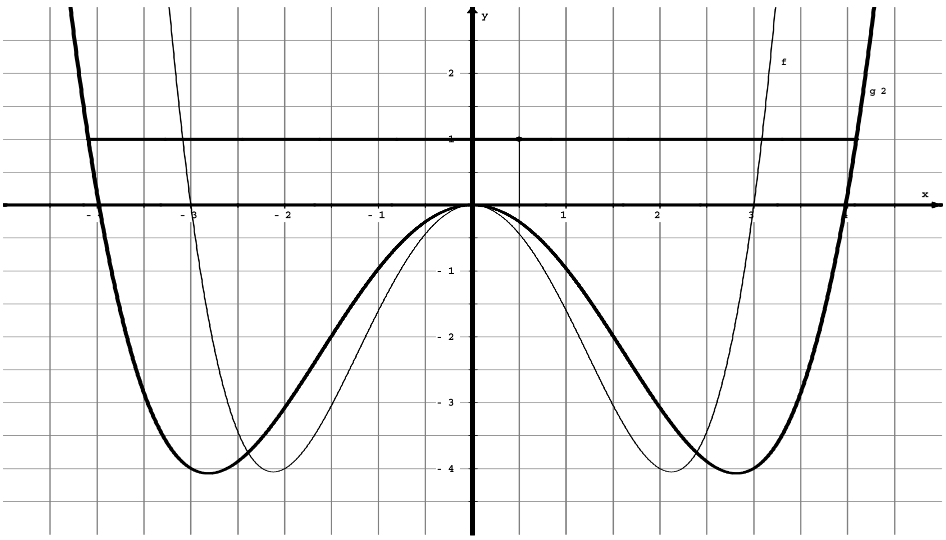
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III



2. Lösungsvorschlag:
Da sich die Extremwerte der gesuchten neuen Funktion g_2 für den Querschnitt des verbreiterten Schiffrumpfes nicht verändern sollen, bietet es sich an, die Originalfunktion f in x-Richtung zu „strecken“ also mit folgendem Ansatz zu arbeiten: $g_2(x) = f(a \cdot x)$. Wenn die Breite des Schiffes in Höhe der Decklinie um 2 Einheiten größer werden soll, so rücken die entsprechenden x-Werte jeweils um eine Einheit von der y-Achse weg, also z.B. von 3,08 auf 4,08 Einheiten.

Dies erreicht man, indem man $a = \frac{3,09}{4,09} \approx 0,756$ wählt.

Also:. $g_2(x) = 0,2(0,756x)^4 - 1,8(0,756x)^2 \iff g_2(x) = 0,065x^4 - 1,029x^2$.



		I	II	III
		5	10	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

5.2 Kurs auf erhöhtem Niveau

Aufgabe 1 Neubesiedlung von Biotopen

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

a) **Nullstellen, Randverhalten**

Die Funktionen haben keine Nullstellen, da der Zähler nie Null wird, allerdings nähern sich die Graphen beliebig der x-Achse (aus dem Positiven):

Für $t \to \infty$ gilt: $1+e^t \to e^t \Rightarrow k\cdot\frac{e^t}{(1+e^t)^2} \to k\cdot\frac{1}{e^t}$. Da für $t \to \infty$ $k\cdot\frac{1}{e^t} \to 0$ gilt, ist die x-Achse die Asymptote. Zusammen mit dem ersten Resultat ergibt sich, dass die Funktionswerte aus dem Positiven gegen diese Asymptote gehen.

Extrem- und Wendepunkte

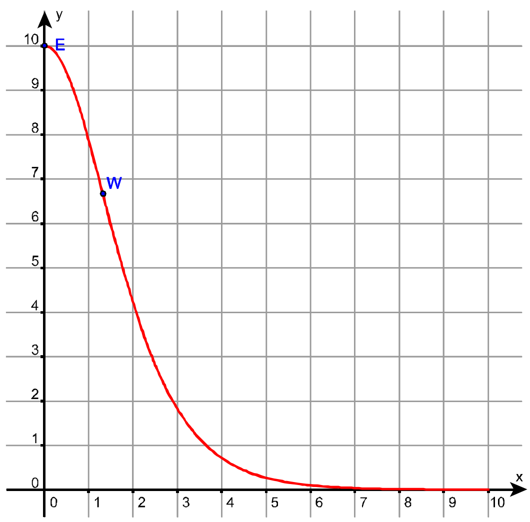
Ableiten liefert $f_k'(t) = k\cdot\frac{e^t(1-e^t)}{\left(1+e^t\right)^3}$.

Diese Funktion hat eine einzige Nullstelle bei $t = 0$. Für die 2. Ableitung gilt $f_k''(0) = k\cdot\frac{(1-4+1)}{(1+1)^4} < 0$, denn k ist positiv, es handelt sich um ein Maximum *(genauer ein Randmaximum mit waagerechter Tangente, da der Definitionsbereich auf nichtnegative t beschränkt ist)*.

Da $f_k(0) = k\cdot\frac{1}{2^2} = \frac{k}{4}$, gilt für das Maximum: $E\,(0 \mid \frac{1}{4}k)$.

Auswertung der gegebenen 2. Ableitung führt zur Lösung der quadratischen Gleichung $u^2-4u+1=0$ mit $u=e^t$. Diese Gleichung hat im Positiven eine Lösung mit $x_W \approx 1{,}3$. Damit ist gerundet $W\,(1{,}3|0{,}17\cdot k)$, denn bedingt durch den Hochpunkt E (Rechtskrümmung) und das Verhalten für $t\to\infty$ (Linkskrümmung) muss sich die Krümmungsrichtung ändern.

Skizze von f_{40}



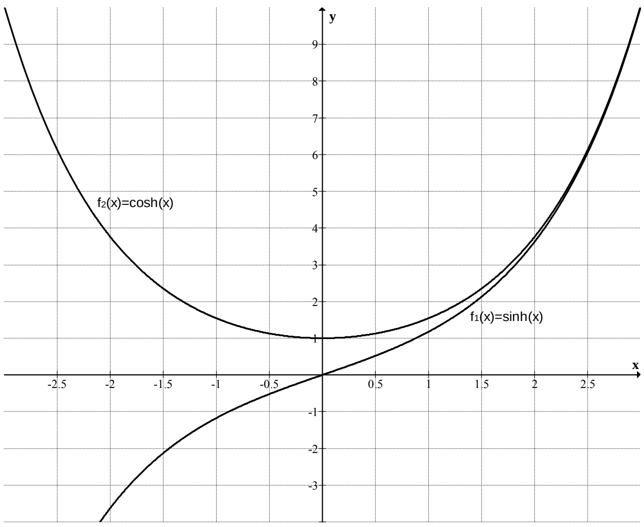
	I	II	III
a)	20	10	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>Interpretation im Sachkontext (Vorschlag)
Mit $t = 0$ beginnt eine plötzliche, starke Populations- bzw. Dichtezunahme. Die Populationszunahme verringert sich zunächst immer stärker (bis zum Wendepunkt – nach mehr als 5 Wochen), danach verringert sie sich langsamer; die Dichte wächst zwar immer weiter, aber auch in immer kleinerem Maße, bis das Wachstum der Dichte schließlich gegen Null geht.
Anfangs kommt eine große Menge an Ruderfußkrebsen hinzu; deren Dichte vermehrt sich kontinuierlich – sei es durch Fortpflanzung, sei es durch weitere Einschwemmung – jedoch geschieht die Dichteerhöhung in immer kleiner werdendem Umfang. Nach einigen Monaten hat sich die Entwicklung der Dichte beruhigt, die Ruderfußkrebs-Dichte bleibt dann annähernd gleich (im Modell).</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Die Ableitung von F_k belegt die Aussage:
$F_k'(t) = \frac{k \cdot e^t}{(1+e^t)^2} = k \cdot \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = f_k(t)$</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Parameter k bestimmen
Hier ist zum Ersten die Gesamtpopulationsdichte D als eine Stammfunktion zu f gefragt. Mit der Vorgabe aus c) folgt: $D_k(t) = \int_0^t f_k(z)dz = F_k(t) - F_k(0)$.
Da $F_k(t) = k \cdot \frac{-1}{1+e^t}$ und $D_k(0) = 0$, gilt $F_k(0) = \frac{-k}{2}$. Also ist
$D_k(t) = k \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^t}\right)$.
Damit ist hier die Gleichung $40000 = D_k(3) = k \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^3}\right)$ zu lösen:
Da $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^3}\right) = \frac{1+e^3-2}{2+2\cdot e^3} = \frac{e^3-1}{2e^3+2}$, folgt $k = 40000 \cdot \frac{2e^3+2}{e^3-1} \approx 88400$.
Das Ergebnis ist $k \approx 88400$.
Dichte nach einer Woche
Die Dichte im ersten Viertelmonat ergibt sich durch
$D_{88400}(0{,}25) = 88400 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^{0{,}25}}\right)$ zu etwa 5500 Krebsen pro m³.
Dichte nach „langer Zeit“
Für $t \to \infty$ gilt $D_{88400}(t) \to \frac{88400}{2} \approx 44200$, da der zweite Term in der Klammer gegen Null geht.</td><td></td><td>15</td><td>5</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
e)	**Modelländerung** Der Stammfunktion ist eine additive Konstante hinzu gefügt. Sie steht offenbar für die zur Zeit $t = 0$ bereits vorhandene Dichte an Krebsen. **Voraussetzungen** Grundsätzlich setzt dieses Modell eine <u>plötzliche Zunahme im Zeitpunkt $t = 0$</u> voraus. Das ist auch bei einem bereits besiedelten See denkbar – z. B. auch hier durch eine Einleitung einer weiteren Population von Krebsen durch eine plötzliche Änderung der Strömungsverhältnisse oder auch durch eine durch Menschen verursachte Zufuhr. Ebenso muss allerdings diese <u>Zunahme noch eine Weile anhalten</u>, auch wenn diese dabei immer geringer wird.		10	
f)	**Neue Änderungsrate** Wenn die Sterberate *st(t)* proportional zum Bestand nach dem bisherigen Modell sein soll, so gilt $st(t) = s \cdot B_k(t) = s \cdot k \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^t}\right)$. Da die Sterberate in der Bilanz ein negatives Vorzeichen haben muss, ergibt sich die angegebene Beziehung $f^*_{k;\,s}(t) = k \cdot \left(\frac{e^t}{(1+e^t)^2} - s \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^t}\right)\right)$. Für $s = 0{,}04$ folgt dann $f^*_{k;\,0{,}04}(t) = k \cdot \left(\frac{e^t}{(1+e^t)^2} - 0{,}04 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^t}\right)\right)$. **Maximum der Population** Sinnvoll ist es, diesen Ausdruck zu $f^*_{k;\,0{,}04}(t) = k \cdot \left(\frac{0{,}02 + e^t - 0{,}02 \cdot e^{2t}}{(1+e^t)^2}\right)$ zu vereinfachen. Da $f^*_{k;\,0{,}04}(0) = \frac{k}{4} > 0$ und z.B. $f^*_{k;\,0{,}04}(6) \approx -0{,}0174k < 0$, weist die Änderungsrate in diesem Bereich eine Nullstelle auf und die Population aufgrund des Monotonieverhaltens in ihrer Umgebung ein Maximum. Die Berechnung der Nullstelle führt auf folgende Gleichung: $0{,}02 + e^t - 0{,}02 \cdot e^{2t} = 0$. Über die Substitution $e^t = u$ sowie anschließende Umwandlung in die Normalform einer quadratischen Gleichung erhält man: $u^2 - 50u - 1 = 0$ sowie $u = 25 \pm \sqrt{626}$. Eingesetzt für e^t ergibt sich schließlich $t = 3{,}91...$ Ein hinreichend genaues Rechnen z. B. mit einem Intervall-Verkleinerungsverfahren liefert ebenfalls in kurzer Zeit das hinreichend genaue Ergebnis. Die Population erreicht also nach etwa vier Monaten ihr Maximum.			

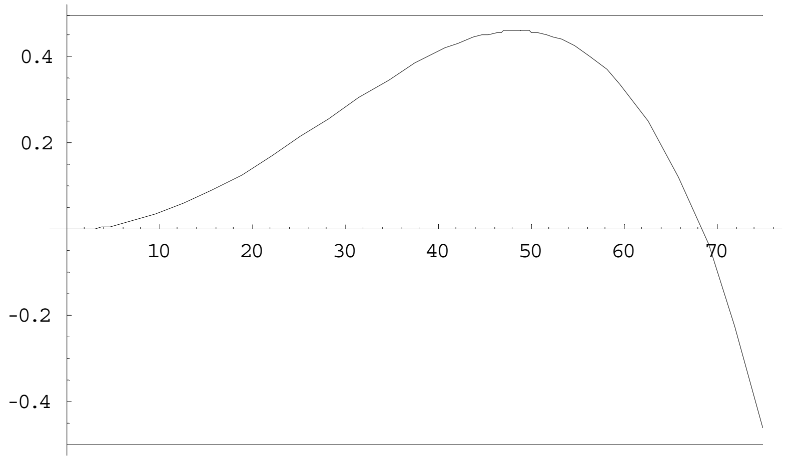
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Hinweis: Die Ergebnisse in diesem Aufgabenteil gelten unabhängig vom Wert des Parameters a, eine Lösung von d) ist hier also nicht erforderlich.		10	15
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Aufgabe 2 Kettenlinie

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Sinus hyperbolicus: $\frac{1}{2}\left(e^{x_0}-e^{-x_0}\right)=0 \Rightarrow e^{x_0}=e^{-x_0} \Rightarrow e^{2x_0}=1 \Rightarrow x_0=0$, Nullstelle bei $x_N=0$. Da $\sinh(-x)=0{,}5\cdot(e^{-x}-e^{x})=-\sinh(x)$, ist Sinus hyperbolicus eine ungerade Funktion und sein Graph damit zum Ursprung punktsymmetrisch. Mit $x\to\infty$ geht $e^{-x}\to 0$, und damit gilt $\sinh(x)\to 0{,}5\cdot e^{x}$. Cosinus hyperbolicus: Keine Nullstelle, da der Term in der Klammer als Summe zweier positiver Zahlen immer positiv ist. Da $\cosh(-x)=0{,}5\cdot(e^{-x}+e^{x})=\cosh(x)$, ist der Cosinus hyperbolicus eine gerade Funktion und sein Graph damit zur y-Achse spiegelsymmetrisch. Mit $x\to\infty$ geht $e^{-x}\to 0$, und damit gilt $\cosh(x)\to 0{,}5\cdot e^{x}$. Aufgrund der Geradheit des cosh ist dies auch die Asymptote für $x\to-\infty$. Graphen der Funktionen:  	10	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
b)	Nachrechnen liefert: • $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 0{,}5^2\left(\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2\right)$ $= 0{,}25 \cdot (2+2) = 1$. • $\sinh'(x) = 0{,}5 \cdot (e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$ und $\cosh'(x) = 0{,}5 \cdot (e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$. • Die beiden hyperbolischen Funktionen sind damit mit ihrer 2. Ableitung identisch. Damit sind sie Lösungen der angegebenen Differentialgleichung. Für die Winkelfunktionen gilt (Tafelwerk!) • $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. • $\sin'(x) = -\cos(x)$ und $\cos'(x) = -\sin(x)$. Die beiden Winkelfunktionen sind damit mit ihrer 4. Ableitung identisch. • Die entsprechende Differentialgleichung lautet damit $f'' + f = 0$.	5	5	
c)	Mit der Beachtung der Symmetrie der Kettenlinie und der Tatsache, dass das Seil in der Mitte am tiefsten hängt: $k(0) = a \cdot \cosh(b \cdot 0) = a \cdot 0{,}5 \cdot (2e^0) = a \cdot 0{,}5 \cdot 2 = a$. Dies ist das gewünschte Resultat. Wenn bei festgehaltenem a der Parameter b vergrößert wird, so ändert sich bei $x = 0$ nichts. Der Tiefpunkt der Funktion bleibt also erhalten. Für größere x-Werte vergrößern sich der Betrag der Argumente in der Exponentialfunktion. Da e^x im Wesentlichen den Funktionswert bestimmt, weil e^{-x} für große x-Werte sehr klein ist, wird auch der Funktionswert größer: Der Graph wird bei gleichem Minimum nach beiden Seiten steiler; er erreicht bei festgehaltenem x größere Höhen.		10	
d)	• Mit dem gegebenen Bodenabstand in der Mitte ergibt sich sofort $a = 80$. Einsetzen liefert: $80 \cdot 0{,}5 \cdot \left(e^{0{,}0125 \cdot 75} + e^{-0{,}0125 \cdot 75}\right) \approx 117{,}808$. Da vorausgesetzt war, dass es sich um eine Kettenlinie handelt, ist damit alles gezeigt. • Der Winkel ergibt sich aus der Steigung der Kettenlinie an der Stelle $x = 75$: $k'(75) = 80 \cdot \sinh(0{,}0125 \cdot 75) \cdot 0{,}0125 \approx 1{,}08099$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Damit ergibt sich das Winkelmaß zu $\alpha = 90° - \arctan(k'(75)) \approx 42{,}77°$. • Wenn das Seil straffer gespannt wird, so hängt es in der Mitte höher. Also wächst der Parameter *a*. Da zugleich das Höhenwachstum zwischen Mitte und Türmen abnimmt, muss (mit dem Ergebnis von c) oder z.B. durch Nachrechnen an einem Beispiel) der Parameter *b* abnehmen. Da das Seil „waagerechter" in den Aufhängungspunkten ankommt, wird der Winkel größer, bleibt aber unter 90°.	5	15	
e)	Da hier $k'(x) = (80 \cdot \cosh(0{,}0125 \cdot x))' = \sinh(0{,}0125 \cdot x)$, ist $\sqrt{1+(k'(x))^2} = \cosh(0{,}0125 \cdot x)$. Damit ergibt sich $l = 2 \cdot \int_0^{75} \cosh(0{,}0125 \cdot x)dx = 2 \cdot 80 \cdot \left[\sinh(0{,}0125 \cdot x)\right]_0^{75}$ $\approx 172{,}96$ Das Seil ist also fast 173 m lang *(und damit etwa 23 m länger als die direkte Verbindung zwischen den Aufhängungspunkten).*		15	5
f)	Sei $diff(x) := p(x) - k(x)$. Gefragt ist, ob der Betrag von *diff* im Intervall [0, 75] immer unter 0.5 bleibt. Ersichtlich ist *diff*(0) = 0 und *diff* (75) ≈ 0. Weiter erkennt man an der Skizze, dass etwa im Intervall [37 , 65] die Genauigkeit nicht ausreicht. So ist z.B. $diff(50) \approx 0{,}66$ - hier ist die maximale Abweichung also weit überschritten. *(Die Methode, diff abzuleiten, dann z.B. mit dem Newton-Verfahren die Nullstelle der Ableitung zu finden – diese Extremstelle liegt bei $x_E \approx 53{,}15$ – und schließlich den Funktionswert an dieser Stelle zu bestimmen – er beträgt etwa 0,669, ist ebenso sinnvoll.)* Zur Verbesserung der Näherung gibt es mehrere Möglichkeiten. Zunächst kann man die beiden Parameter von *p* verändern. Leicht einzusehen ist, dass die veränderte quadratische Funktion p_1 mit $p_1(x) = 79{,}7 + 0{,}00672x^2$ die Differenzfunktion einfach um 30 cm nach unten schiebt; damit bleibt das Maximum der Differenz mit knapp 40 cm im genügenden Bereich, während in der Mitte (mit –30 cm Differenz) und am Rand (mit -31 cm Differenz) ebenfalls noch eine genügende Genauigkeit erreicht wird. Allerdings stimmt p_1 mit *k* gerade an den „empfindlichen" Stellen nicht mehr so gut überein.			

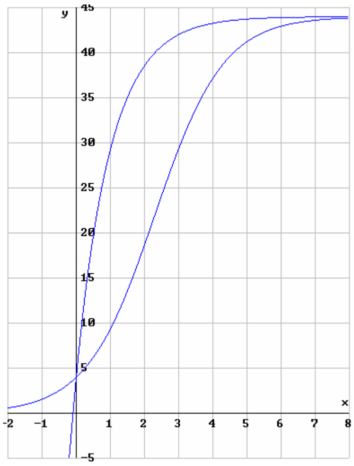
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	• Möchte man die Übereinstimmung bei $x = 0$ erhalten, so muss der Koeffizient des quadratischen Terms verändert werden – genauer gesagt, er muss kleiner werden. Aber Vorsicht! Hiermit wird der „genäherte“ Aufhängungspunkt am Turm nach unten verlegt! Deswegen ist der Raum für die Anpassung klein. Die folgende Abbildung zeigt die Differenz für $p_2(x) = 80 + 0{,}00664x^2$:  • Ebenso sinnvoll ist es, statt einer Funktion 2. Grades eine gerade Funktion 4. Grades zu verwenden und hier z.B. $x = 0$, $x = 50$ und $x = 75$ als Stützstellen zu verwenden. Bei diesen Stützstellen ergibt sich für die Näherungsfunktion (durch Lösung des zugehörigen 2 x 2 LGS) $p_4(x) = 80 + 0{,}006244 \cdot x^2 + 8{,}49 \cdot 10^{-8} \cdot x^4$. Diese Funktion weicht übrigens um höchstens 6 mm von der Kettenlinie ab. Generell ist die Kettenlinie durch eine ganzrationale Funktion 4. Grades deutlich besser zu nähern! *Hinweis: Die Aufgabenstellung verlangt nicht die Angabe mehrerer Verbesserungsmöglichkeiten für die Näherung von k. Auch die „einfachste“ Lösung ist, wenn sie denn richtig begründet ist, eine vollständige Aufgabenlösung.*		5	15
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 3 Hecken

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	<u>Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen</u>: Mit der x-Achse gibt es keinen Schnittpunkt, da der Zähler nie Null wird. Schnittpunkt mit der y-Achse: Durch Einsetzen $S_y(0 \mid \frac{1}{121}c)$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Extrempunkte: Ableiten liefert $f_c'(x)=\frac{c\cdot e^x\cdot(e^x+10)^2-c\cdot e^x\cdot 2\cdot(e^x+10)\cdot e^x}{(e^x+10)^4}$ $=\frac{c\cdot e^x\cdot(e^x+10-2e^x)}{(e^x+10)^3}$ $=\frac{c\cdot e^x}{\left(10+e^x\right)^3}\cdot\left(10-e^x\right).$ Die einzige Nullstelle dieser Funktion liegt bei $x_E=\ln 10\approx 2{,}30$. Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion ist dies eine Durchgangsnullstelle, deswegen handelt es sich bei $E\left(\ln 10\,\vert\,\frac{c}{40}\right)$ um einen Extrempunkt. *Selbstverständlich ist auch eine Argumentation mit* $f_c''(\ln 10)=-\frac{1}{80}c\neq 0$ *möglich.* Fallunterscheidung: Für $c>0$ gilt: Nenner ist positiv, $c\cdot e^x>0$, $10-e^x$ monoton fallend, Vorzeichenwechsel $+\to-$. E ist somit Hochpunkt. Für $c<0$ gilt: Nenner ist positiv, $c\cdot e^x<0$, $10-e^x$ monoton fallend, Vorzeichenwechsel $-\to+$. E ist somit Tiefpunkt. Der Graph besitzt den Hochpunkt $E_H\ (ln 10\,\vert\,11)$ für $c=440$.	10	10	
b)	Schnittpunktbestimmung: $\frac{440\cdot e^x}{(e^x+10)^2}=40\cdot e^{-x}\Leftrightarrow 440\cdot e^{2x}=40\cdot(e^x+10)^2\ \Leftrightarrow 11\cdot e^{2x}=e^{2x}+20e^x+100$ $\Leftrightarrow e^{2x}-2\cdot e^x-10=0$. Nach Substitution $z=e^x$ erhält man die quadratische Gleichung $z^2-2z-10=0$ mit den Lösungen $z_{1,2}=1\pm\sqrt{11}$ und damit $e^x=1\pm\sqrt{11}$. Da e^x nicht negativ sein kann, lautet die einzige Schnittstelle $x_s=\ln\left(\sqrt{11}+1\right)\approx 1{,}46$. Damit ist $f\ (\ln\left(\sqrt{11}+1\right)=4\sqrt{11}-4\approx 9{,}27$. Die Graphen schneiden sich in $S(\ln\left(\sqrt{11}+1\right)\vert\ 4\sqrt{11}-4)$ bzw. $S(1{,}46\ \vert\ 9{,}27)$.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	<u>Berechnung der Stammfunktionen von *f*:</u> Substitution: $u(x)=e^x+10 \Leftrightarrow e^x=u(x)-10,\ du=e^x\,dx \Leftrightarrow dx=\frac{du}{e^x}$. Damit folgt für das unbestimmte Integral $\int f_{440}(x)dx=\int\frac{440e^x}{\left(e^x+10\right)^2}dx=\int\frac{440\cdot(u-10)}{u^2\cdot(u-10)}du=\int\frac{440}{u^2}du=-\frac{440}{u}+c_0$ $=-\frac{440}{e^x+10}+c_0$. *Bemerkung: Dass die angegebene Stammfunktion von f wirklich eine solche ist, kann durch Ableiten oder durch Umrechnung entsprechend zu a) gezeigt werden. Dies ist aber nicht gefordert!* Die Stammfunktion *F* von f_{440} gibt die Höhe der Sträucher *F* zum Zeitpunkt *x* an. Mit der Anfangsbedingung *F*(0) = 4 erhält man: $F(0)=\frac{-440}{e^0+10}+c_0=-40+c_0=4 \Rightarrow c_0=44$. Die gesuchte Funktion *F* lässt sich somit folgendermaßen darstellen: $F(x)=\frac{-440}{e^x+10}+44=\frac{-440+44e^x+440}{e^x+10}=\frac{44e^x}{e^x+10}=\frac{44}{1+10e^{-x}}$. <u>Berechnung der Stammfunktionen von *g*:</u> $\int 40\cdot e^{-x}dx=-40\cdot e^{-x}+c_0$. Es folgt für die gesuchte Funktion *G*: $G(x)=-40e^{-x}+44$. <u>Momentane Wachstumsgeschwindigkeiten:</u> Die momentanen Wachstumsgeschwindigkeiten werden durch die erste Ableitung *F'* bzw. *G'*, also durch *f* und *g*, berechnet. Durch Gleichsetzen von *f* und *g* erhält man den Zeitpunkt *x*; die Lösung ($x\approx 1,46$) wurde bereits im Teil b) berechnet. Nach etwa eineinhalb Jahren sind also die Wachstumsgeschwindigkeiten beider Straucharten gleich. <u>Strauchhöhen zum Zeitpunkt gleicher Wachstumsgeschwindigkeiten:</u> $F\left(\ln\left(\sqrt{11}+1\right)\right)=\frac{44}{\frac{10}{1+\sqrt{11}}+1}=\frac{44\cdot\left(1+\sqrt{11}\right)}{10+1+\sqrt{11}}=\frac{44\cdot\left(1+\sqrt{11}\right)}{11+\sqrt{11}}$ $=\frac{44\cdot\left(1+\sqrt{11}\right)\left(11-\sqrt{11}\right)}{110}=\frac{44\cdot\left(10\cdot\sqrt{11}\right)}{110}=4\sqrt{11}\approx 13,27$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	$G\left(\ln\left(\sqrt{11}+1\right)\right)=\frac{-40}{\sqrt{11}+1}+44=\frac{-40\left(\sqrt{11}-1\right)}{\left(\sqrt{11}+1\right)\left(\sqrt{11}-1\right)}+44=\frac{-40\left(\sqrt{11}-1\right)}{10}+44$ $=-4\sqrt{11}+4+44=48-4\sqrt{11}\approx 34{,}73$. Die Sträucher der Sorte *F* haben also eine Höhe von ca. 1,30 m, die der Sorte *G* eine Höhe von ca. 3,50 m. *Zur Information rechts die (nicht geforderten) Graphen der Funktionen F und G.*  	10	15	
d)	Strauchhöhen im ausgewachsenen Zustand: Strauchsorte F: $F(8)\approx 43{,}85$ und $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{44}{10\cdot e^{-x}+1}=44$. Strauchsorte G: $G(8)\approx 43{,}98$ und $\lim\limits_{x\to\infty}G(x)=44$. Im Alter von 8 Jahren weichen beide Strauchsorten nur noch geringfügig von ihren endgültigen Höhen im ausgewachsenen Zustand ab.		15	
e)	Das Wachstumsverhalten beider Sorten unterscheidet sich deutlich: Während Sorte *F* logistisch wächst, wächst Sorte *G* exponentiell beschränkt. Im Laufe der Zeit ändert sich der Höhenunterschied der Sträucher in der Hecke gravierend. Zum Zeitpunkt des Pflanzens sind beide Sträucher gleich hoch. Wegen der unterschiedlichen Wachstumsgeschwindigkeiten nimmt der Höhenunterschied in der Folgezeit deutlich zu. Da beide Sorten aber nach 8 Jahren als ausgewachsen gelten und dann die gleiche Höhe erreicht haben (vgl. Teil e)), kann der Höhenunterschied nach acht Jahren nur sehr klein sein. Hier könnten exemplarisch einige Differenzen $F(x)-G(x)$ berechnet werden. Um den Zeitpunkt des größten Höhenunterschied zu ermitteln, wird zunächst die Differenzenfunktion $D(x):=F(x)-G(x)$ bestimmt. Die notwendige Bedingung $D'(x)=0$ führt auf das bereits gelöste Problem $f\left(x_s\right)=g\left(x_s\right)$ mit der bekannten Lösung $x_s=\ln\left(\sqrt{11}+1\right)\approx 1{,}46$ *(vgl. Teil b))*. Nach etwa eineinhalb Jahren haben also die Sträucher den größten Höhenunterschied.		5	15

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Laut Definition ist die Wachstumsgeschwindigkeit $w_F = \frac{f}{F}$ *bzw.* $w_G = \frac{g}{G}$. Durch Einsetzen ergibt sich $w_F(x) = \frac{10}{e^x + 10}$ und $w_G(x) = \frac{10}{11 \cdot e^x - 10}$. Die Funktion *w* gibt die relative Wachstumsgeschwindigkeit an; ihre Werte tragen die Einheit (Jahre^{-1}).		5	5
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 4 Sprungschanze

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	• *Die Schar besteht bekanntlich aus „Gaußschen Glockenkurven“. Deren Eigenschaften sollen untersucht werden:* Man erkennt unmittelbar, dass alle Graphen symmetrisch zur *y*-Achse sind, da $f_k(-x) = e^{-k \cdot x^2} = f_k(x)$ gilt. Wegen der Eigenschaften der *e*-Funktion sind die Funktionswerte stets positiv und für kein *k* existieren Nullstellen. Außerdem gilt: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_k(x) = 0$. • <u>Extrema:</u> $f_k'(x) = -k \cdot 2x \cdot e^{-k \cdot x^2} = 0$, also kommt nur $x = 0$ als Extremstelle in Frage. Man kann nun mit dem bisherigen Wissen um die Symmetrie oder mit Hilfe der zweiten Ableitung argumentieren und feststellen, dass unabhängig von *k* der Punkt $(0 \mid 1)$ ein Maximalpunkt ist. <u>Wendepunkte:</u> $f_k''(x) = 0$ $e^{-k \cdot x^2} \cdot \left(4k^2 \cdot x^2 - 2k\right) = 0$ $4k^2 \cdot x^2 = 2k$ $x^2 = \frac{1}{2k}$ $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2k}}$			

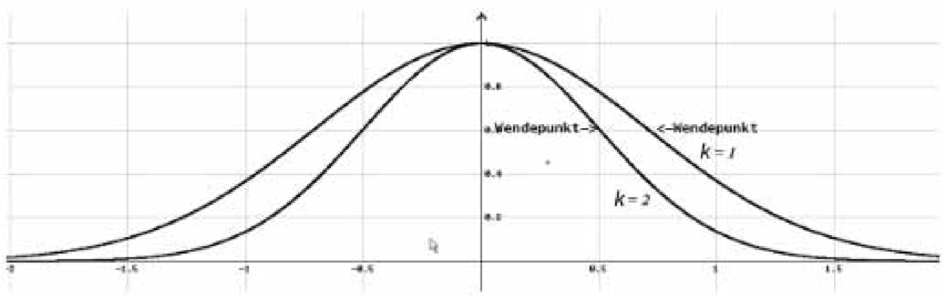
<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

Die zweite Ableitung hat die beiden Nullstellen $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2k}}$, die auch tatsächlich Wendestellen von f_k sind, was wieder direkt aus dem bisherigen Wissen folgt.

$$f_k\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = e^{-k\cdot\frac{1}{2k}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Die beiden Wendepunkte haben die Koordinaten: $W_{1,2} = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2k}} \mid \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

<u>Skizzen:</u>



</td><td>15</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Der gekrümmte Teil des Anlaufs muss monoton fallen und ständig flacher werden, also linksgekrümmt sein. Dann kommt nur ein Teil des Graphen rechts vom rechten Wendepunkt in Frage. Der rechte Wendepunkt von f_1 liegt bei

$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707...$. Da $0{,}8 > \frac{1}{\sqrt{2}}$, erfüllt die vorgeschlagene Anfangstelle 0,8 also die Bedingung.

<u>Anfangssteigung des gekrümmten Teils:</u>

Es gilt:

$$f_a'(x) = -2x\cdot e^{-x^2}$$
$$f_1'(0{,}8) = -1{,}6\cdot e^{-0{,}64} = -0{,}8436...$$

Um zu dieser Steigung den Steigungswinkel zu berechnen, verwendet man den Arcustangens:

$$\arctan\,(-0{,}8436...) \approx -40{,}15° \approx -40°.$$

Damit ist auch diese Bedingung erfüllt. (Das negative Vorzeichen bringt das „Fallen" des Graphen zum Ausdruck).

<u>Steigung an der Absprungstelle:</u>

Es gilt $\tan(-10°) = -0{,}176326...$.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Um das Ende der Anlaufbahn zu finden, muss also die Gleichung $f_1'(x) = -0{,}176326...$ gelöst werden. Das kann durch Probieren oder mit Hilfe des Newton-Verfahrens geschehen: Mit dem Anfangswert $x_0 = 1{,}7$ liefert das Newton-Verfahren die folgenden Werte: 1,7 ; 1,7238 ; 1,7244 ; 1,7244 ; … Mit der geforderten Genauigkeit sollte die Anlaufbahn also bei $x_e = 1{,}72$ enden. <u>Geeigneter Maßstab:</u> Der Länge von $1{,}72 - 0{,}8 = 0{,}92$ soll die Länge von gut 90 m in der Realität entsprechen, also gilt: 1 LE entspricht 100 m.	5	15	
c)	Die durchschnittliche Steigung wird durch $\overline{m} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f'(x) \cdot dx$ bestimmt. Die Stammfunktion ist mit *f* bereits bekannt. Als mittlere Steigung ergibt sich: $\overline{m} = \frac{1}{0{,}92} \cdot \left[e^{-x^2} \right]_{0{,}8}^{1{,}72}$ $\overline{m} = \frac{1}{0{,}92} \cdot \left[e^{-1{,}72^2} - e^{-0{,}8^2} \right]$ $\overline{m} = \frac{-0{,}47539...}{0{,}92}$ $\overline{m} = -0{,}51672...$ $\alpha \approx -27{,}3°$ Der durchschnittliche Steigungswinkel des gekrümmten Teils der Anlaufbahn beträgt –27,3°.		15	
d)	Aus der Kurvendiskussion von a) geht hervor, dass mit wachsendem *k* der Wendepunkt nach links wandert und die Kurve im Wendepunkt steiler wird. Da der erste Vorschlag b) einen Kurvenausschnitt rechts vom Wendepunkt verwendet hat, wäre die Kurve von f_1 im Wendepunkt zu steil. Es muss also eine Funktion gewählt werden, die im Wendepunkt flacher als f_1 ist, also muss der Parameter *k* kleiner als 1 gewählt werden.			10

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	Lösungsstrategie:			

Lösungsstrategie:

Für den Übergang von a_1 zu a_2 muss gewährleistet sein, dass die Funktionswerte und die ersten Ableitungen der beiden Funktionen an der Stelle 2,75 übereinstimmen. Im Punkt $P(2{,}75|a_1(2{,}75))$ kann die Tangentengleichung aufgestellt werden. Über die Normale zur Tangente in diesem Punkt gelangt man zum Mittelpunkt des Kreisbogens als Nullstelle der Normalen. Der Radius r des Kreisbogens entspricht der Länge der Normalen zwischen $P(2{,}75|a_1(2{,}75))$ und dem Mittelpunkt M. Die Konstante a_3 hat den Wert $-r$, da der Übergang von a_2 zu a_3 im Punkt $(x_M\,|\,-r)$ erfolgen muss und der Kreisbogen dort eine waagerechte Tangente hat.

Für den Kreisbogen a_2 müssen der Mittelpunkt und der Radius gefunden werden. Der Mittelpunkt liegt auf der Geraden g, die durch den Punkt $K(2{,}75|a_1(2{,}75))$ und senkrecht zur Tangente von a_1 verläuft. Der Radius des Kreises bestimmt die Krümmung des Teils der Aufsprungbahn.

$$a_1(2,75) = -0,069\cdot 2,75^3 + 0,175\cdot 2,75^2 - 0,175\cdot 2,75 + 0,14$$
$$a_1(2,75) \approx -0,453$$

Die Tangentengleichung t in dem Punkt K ergibt sich zu

$$t(x) = mx + b$$

mit

$$m = a_1'(2,75)$$
$$= -0,207\cdot 2,75^2 + 0,35\cdot 2,75 - 0,175$$
$$m \approx -0,778$$

und

$$t(2,75) = -0,778\cdot 2,75 + b$$
$$-0,453 = -0,778\cdot 2,75 + b$$
$$b \approx 1,687.$$

Senkrecht zur Tangentengleichung t durch den Punkt K ergibt sich die Gerade g

$$g(x) = \frac{1}{0,778}x - 3,988\,.$$

Der Mittelpunkt M des Kreisbogens a_2 liegt auf dieser Geraden g. Jeder Kreis mit M schließt nahtlos und ohne Ruck an der Bahn a_1 an. Die Nullstelle von g ist die x-Koordinate von M:

$$M \approx (3,102/0)\,.$$

Die Funktionsgleichung für den Kreisbogen lautet

$$(x-3,102)^2 + y^2 = r^2 \quad .$$

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

Mit $y<0$ und $r^2 = (3{,}102-2{,}75)^2 + 0{,}453^2$ (Pythagoras) ergibt sich schließlich der gesuchte Kreisbogen mit gerundeten Parametern:

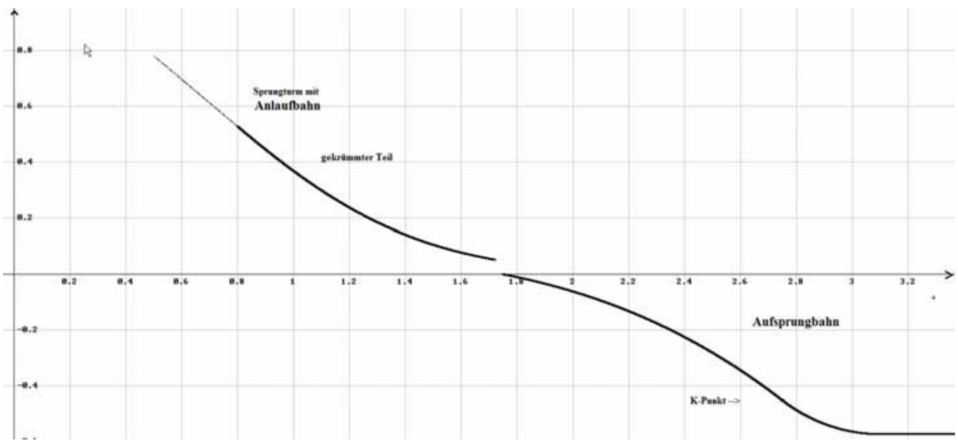
$$(x-3{,}102)^2 + y^2 = 0{,}574^2 \quad \text{mit} \quad y<0 \text{ und } 2{,}75<x<3{,}102 .$$

Der Funktionswert y an der Stelle des x-Wertes des Mittelpunktes M ist die gesuchte Konstante der Waagerechten a_3:

$$a_3(x) = -0{,}574 .$$

Lösungsvariante:

Geht man aus von $a_1(2{,}75) = a_2(2{,}75)$, $a_1'(2{,}75) = a_2'(2{,}75)$, $M(x_M/0)$ und $a_2(x) = -\sqrt{r^2 - (x-x_M)^2}$ *, so folgt aus den Bedingungen direkt ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten. Auf Tangente und Normale kann so verzichtet werden.*



	I	II	III
	10	10	

f) Um die Sprungweite $w = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$ auszurechnen, muss ein Näherungsverfahren ausgewählt werden. Da der Integrand der genannten Formel w in dem betrachteten Intervall für die Bogenlänge eine monotone Funktion ist, ist jedes in der Formelsammlung genannte Verfahren adäquat.
Z.B. ergibt die Keplersche Fassregel für eine Einteilung des Intervalls $[1{,}75\,;2{,}75]$ in $n = 2$ Teilintervalle mit der Teilintervalllänge d von

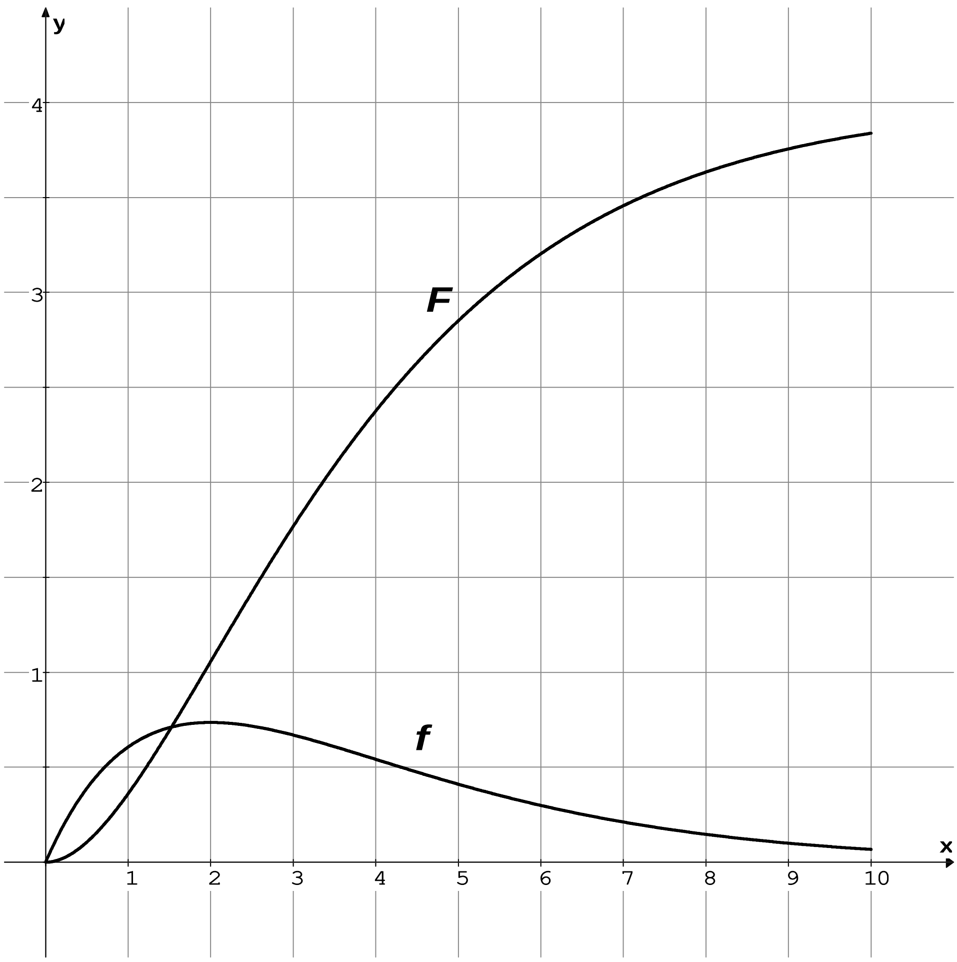
$$d = \frac{x_2 - x_0}{2}$$
$$= \frac{2{,}75-1{,}75}{2}$$
$$d = \frac{1}{2}$$

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	und der Formel für die Keplersche Regel $A \approx \frac{d}{3}\cdot(f(x_0)+4\cdot f(x_1)+f(x_2))$ $\approx \frac{1}{6}\cdot(1{,}019+4\cdot 1{,}091+1{,}267)$ $A \approx 1{,}108$. eine Sprungweite bis zum *K*-Punkt von ca. 111 Meter.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

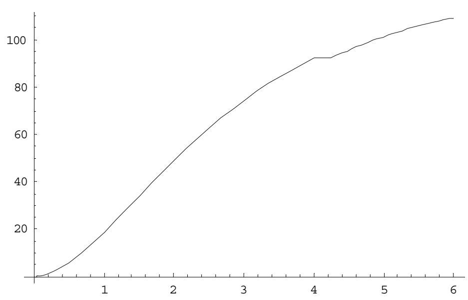
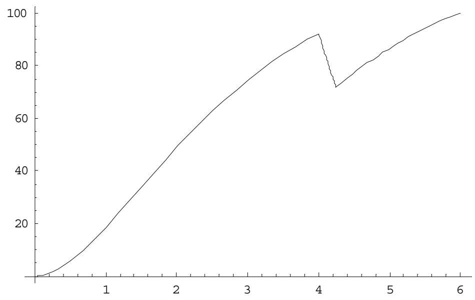
Aufgabe 5 Wachtstumsverhalten von Bakterien

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	• Für kleine t ist der Faktor e^{-kt} praktisch konstant, so dass hier der lineare Faktor t zusammen mit einem anderen, auch linearen Faktor das Wachstum bestimmt: lineares Wachstum bei kleinem t. • Für große t sinkt der Faktor e^{-kt} viel schneller als der lineare Faktor t wächst, denn der Term $t\cdot e^{-kt}$ konvergiert für wachsendes t gegen Null. Hier tritt im Wesentlichen ein exponentielles Verhalten auf. Der Parameter a stellt lediglich eine Streckung des Graphen in vertikaler Richtung dar, beschreibt also die Gesamtskala des Wachstums, während der Parameter k eine inverse Zeitkonstante darstellt: Je größer k ist, desto schneller wirkt die exponentielle Abschwächung, weil bei größerem k der Exponent schneller wächst. *Hinweis:* *Die exponentielle Abschwächung wird ebenfalls mit wachsendem k früher wesentlich, da der praktisch lineare Bereich der Exponentialfunktion früher verlassen wird.*	5	10	
b)	Gesucht ist das Maximum von $f_{1,k}(t)=t\cdot e^{-k\cdot t}$. Die Ableitungsfunktion hat die Gleichung $f_{1,k}\,'(t)=\left(1-k\cdot t\right)\cdot e^{-k\cdot t}$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Für $(1-k\cdot t)\cdot e^{-k\cdot t}=0$ gilt $(1-k\cdot t)=0$ und $t=\frac{1}{k}$. Da $0=f_{1,k}(0)=\lim\limits_{t\to\infty} f_{1,k}(t)$ und $f_{1,k}(t)\geq 0$ für alle $x\geq 0$, muss es sich bei dieser Nullstelle um eine Maximalstelle von *f* handeln. *Hinweis: Andere Begründungen sind denkbar und zulässig.* $f_{1,k}\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k}\cdot e^{-k\cdot\frac{1}{k}}=\frac{1}{k\cdot e}$. Zum Zeitpunkt $t=\frac{1}{k}$ beträgt die höchste Wachstumsrate $\frac{1}{k\cdot e}$.	10		
c)	Es gilt: $f_{1,k}''(t)=(k\cdot t-2)\cdot k\cdot e^{-k\cdot t}$. $(k\cdot t-2)\cdot k\cdot e^{-k\cdot t}=0$ $k\cdot t-2=0$ $t=\frac{2}{k}$. Da diese Nullstelle zwischen der Maximalstelle und dem asymptotischen Wert 0 liegt, handelt es sich um eine Wendestelle (mit R-L-Krümmungswechsel). $f_{1,k}\left(\frac{2}{k}\right)=\frac{2}{k}\cdot e^{-k\cdot\frac{2}{k}}=\frac{2}{k\cdot e^2}$. Der Wendepunkt *W* hat damit die Koordinaten $W\left(\frac{2}{k}\mid\frac{2}{k\cdot e^2}\right)$. Wenn die Bakterienkultur bei ihrer Entwicklung die Wendestelle der Wachstumsfunktion durchläuft, ist doppelt so viel Zeit vergangen wie zum Zeitpunkt des stärksten Wachstums. Während dieser Zeit – zwischen Wachstumsmaximum und Wendestelle – hat sich das Wachstum immer schneller abgeschwächt; ab jetzt lässt die Abschwächung des Wachstums wieder nach.		10	
d)	• Ableiten von $F_{1,k}(t)$ ergibt $F'_{1,k}(t)=\frac{-k\cdot e^{-k\cdot t}-(1+k\cdot t)\cdot(-k)\cdot e^{-k\cdot t}}{k^2}$ $=\frac{-k\cdot e^{-k\cdot t}+k\cdot e^{-k\cdot t}+k^2\cdot t\cdot e^{-k\cdot t}}{k^2}$ $=t\cdot e^{-k\cdot t}=f_{1,k}(t)$ Da $f_{1,k}$ eine Wachstumsfunktion ist, also die Bestandsänderung pro Zeit beschreibt, ist ihr bestimmtes Integral über die Zeit der Bestand selbst, wenn man aus den Stammfunktionen die auswählt, die am Anfang den Wert 0 aufweist, genauer den Grenzwert 0 für t → 0.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Hinweis dies ist eine Schwäche des gewählten Modells, da ja „am Anfang“ eine vermehrungsfähige Anzahl von Bakterien hinzugefügt werden muss. Andererseits erleichtert es die Lösungen der nachfolgenden Teilaufgaben. Der Vermehrungsprozess ist ein diskreter Vorgang, sodass jede stetige Funktion mathematisches Modell bleibt.“ • Es gilt: $\lim\limits_{t\to\infty} F_{1,k}(t) = \frac{1-(1+k\cdot t)\cdot e^{-k\cdot t}}{k^2} = \frac{1}{k^2}$, da der Exponentialfaktor im Zähler und damit der zweite Summand im Zähler gegen Null geht. • Also hat der Grenzwert den Wert $\frac{1}{k^2}$. • Der Grenzwert beschreibt den Endbestand der Bakterienpopulation.		20	
e)		10		

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	• Wiedereinführung von a ergibt $\lim\limits_{t\to\infty} F_{a,k}(t) = \frac{a}{k^2}$. Für den Endbestand gilt: $\frac{a}{0{,}49} = 120$ und damit $a = 58{,}8$. • 6 Minuten sind 0,1 Stunden, also $t = 0{,}1$. Zu vergleichen sind $f_{58{,}8;0{,}7}(0{,}1) \approx 5{,}48$ und $58{,}8 \cdot 0{,}1 = 5{,}88$. Der Einfluss des Exponentialterms senkt also den Funktionswert lediglich um sieben Prozent. Damit weicht das Wachstum in den ersten 6 Minuten nicht wesentlich vom linearen Wachstum ab. • Einsetzen liefert die zu lösende Gleichung: $0{,}9 \cdot \frac{a}{0{,}7^2} = \frac{a}{0{,}7^2} \cdot \left(1 - (1 + 0{,}7 \cdot t) \cdot e^{-0{,}7 \cdot t}\right) \Leftrightarrow 0{,}9 = 1 - (1 + 0{,}7t) \cdot e^{-0{,}7 \cdot t}$. Verschiedene mögliche Verfahren führen zu $t \approx 5{,}557$. Also ist der Bestand nach knapp 5,6 Stunden auf 90 % des Endbestandes angewachsen.		10	5
g)	• Im ersten Fall – wenn also während der Dunkelheit nichts passiert – ändert sich im Gesamtverhalten letztlich auch nichts – die Wachstumsfunktionen weisen für die Zeit der Dunkelheit den Wert Null auf, die Bestandsfunktionen haben (demzufolge: Nullwachstum!) für die Zeit der Dunkelheit einen konstanten Verlauf. Alle Bestandswerte treten um die Dunkelzeit, also um eine Viertelstunde, verspätet auf. • Im zweiten Fall folgt der Bestand während der Dunkelheit der Funktion $F(t) = F_0 \cdot e^{-d \cdot t}$, wobei d die Konstante der exponentiellen Abnahme ist (diese muss nicht k sein) und der Index 0 jeweils den Eintritt der Dunkelheit bezeichnet. Dies bedeutet zunächst, dass die Wachstumsfunktion während der Dunkelzeit $f(t) = -d \cdot F_0 \cdot e^{-d \cdot t}$ ist. Wesentlicher ist aber, dass die Gesamt-Abnahme proportional zum Bestand im Augenblick des Eintretens der Dunkelheit ist. Wenn das Experiment schon länger läuft (z.B. im Graphen bei $t = 8$), ist die absolute Abnahme größer als am Anfang (z.B. bei $t = 2$). Dies bedeutet, dass die Erholungszeit – also die Zeit, in der der Bestand, der am Beginn der Dunkelheit bestand, wieder erreicht wird – um so größer ist, je weiter das Experiment fortgeschritten ist. Der Endbestand hingegen ist von der Unterbrechung unabhängig.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Die Skizzen müssen diesen Sachverhalten entsprechen; hier sind Bestandsfunktionen für beide Fälle für eine Lichtunterbrechung nach 4 Stunden gegeben: Fall (1)  Fall (2) 		5	15
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Aufgabe 6 Funktionenschar exponentieller Funktionen

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<u>Berechnung der Nullwerte:</u> $n=1$: $f_1(0)=\frac{3\cdot e^0}{\left(1+e^0\right)^1}=\frac{3}{2}=1{,}5$ $n=2$: $f_2(0)=\frac{3\cdot e^0}{\left(1+e^0\right)^2}=\frac{3}{4}=0{,}75$ $n=3$: $f_3(0)=\frac{3\cdot e^0}{\left(1+e^0\right)^3}=\frac{3}{8}=0{,}375$ $n=4$: $f_4(0)=\frac{3\cdot e^0}{\left(1+e^0\right)^4}=\frac{3}{16}=0{,}1875$ $n=5$: $f_5(0)=\frac{3\cdot e^0}{\left(1+e^0\right)^5}=\frac{3}{32}=0{,}09375$ Dargestellt sind (von oben nach unten) die Graphen der Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_4(x)$. oder: Der Grafik werden die Nullwerte der drei Graphen entnommen: 1,5 , 0,75 und (etwa) 0,2. Diese werden in die Funktionsgleichung eingesetzt:			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$f_n(0)=\dfrac{3}{(1+1)^n}=1{,}5 \quad\Leftrightarrow\quad 2^n=2 \quad\Leftrightarrow\quad n=1$ $f_n(0)=\dfrac{3}{(1+1)^n}=0{,}75 \quad\Leftrightarrow\quad 2^n=4 \quad\Leftrightarrow\quad n=2$ $f_n(0)=\dfrac{3}{(1+1)^n}\approx 0{,}2 \quad\Leftrightarrow\quad 2^n\approx 15 \quad\Leftrightarrow\quad n\approx 4$ $f_3(0)$ = 0,375 und $f_5(0)\approx$ 0,09, so dass die Ableseungenauigkeit hier keine Rolle spielen sollte.	15		
b)	Fallunterscheidung: $n=1$: $f_1(x)=\dfrac{3\cdot \mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$. Es gilt: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)=0$, da der Zähler gegen Null und der Nenner gegen 1 geht. Es gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x)=3$, da für große x der Summand 1 im Nenner zu vernachlässigen ist. $n>1$: $f_n(x)=\dfrac{3\cdot \mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^n}$. Das Verhalten der Funktionen der Schar im Unendlichen kann man über das Wachstum von Zähler und Nenner untersuchen. Der Nenner lässt sich nach unten abschätzen durch $e^{n\cdot x}$, der ganze Bruch lässt sich dann nach oben abschätzen durch $\dfrac{3}{e^{(n-1)\cdot x}}$, so dass $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, da der Zähler gegen Null und der Nenner gegen 1 geht. Auch andere Argumentationen wie „der Zähler wächst mit e^x, während der Nenner mit $e^{x\cdot n}$ wächst“, sind zulässig.	10	10	5
c)	F_n ist eine Stammfunktion, wenn $F_n'(x)=f_n(x)$. F_n lässt sich schreiben als $F_n(x)=\dfrac{3\,(1+\mathrm{e}^x)^{1-n}}{1-n}$, so dass für $F_n'(x)$ folgt: $F_n'(x)=\dfrac{3}{1-n}\cdot(1-n)\,\mathrm{e}^x\cdot(1+\mathrm{e}^x)^{-n}$ $=f_n(x)$.	5	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
d)	Da f_2 und f_3 keinen gemeinsamen Punkt haben und f_2 oberhalb von f_3 liegt (siehe Aufgabenteil a), ergibt sich der gesuchte Flächeninhalt durch Integration der Differenz der Funktionsterme. $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 \left(f_2(x)-f_3(x)\right)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\left[\frac{3\,(1+e^x)^{1-2}}{1-2}-\frac{3\,(1+e^x)^{1-3}}{1-3}\right]_a^0$ $=\lim\limits_{a\to-\infty}\left[\frac{3\,(1+e^0)^{-1}}{-1}-\frac{3\,(1+e^0)^{-2}}{-2}-\left(\frac{3\,(1+e^a)^{-1}}{-1}-\frac{3\,(1+e^a)^{-2}}{-2}\right)\right]$ $=\lim\limits_{a\to-\infty}\left[-1{,}5+0{,}375+3\,(1+e^a)^{-1}-1{,}5\,(1+e^a)^{-2}\right]$ $=0{,}375.$		20	
e)	• f_2 ist symmetrisch zur y-Achse, wenn $f_2(x)=f_2(-x)$. Dazu führt man folgende Äquivalenzumformungen durch: $f_2(x)=f_2(-x)$ $\Leftrightarrow\ \frac{3\cdot e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{3\cdot e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ $\Leftrightarrow\ \frac{3\cdot e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{(e^x)^2\cdot 3\cdot e^{-x}}{(e^x)^2\cdot(1+e^{-x})^2}$ $\Leftrightarrow\ \frac{3\cdot e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{3\cdot e^x}{(e^x+1)^2}$ w.z.b.w. • f_1 ist symmetrisch zu (0 | 1,5), wenn $f_1(x)-1{,}5=-\left[f_1(-x)-1{,}5\right]$. Dazu führt man folgende Äquivalenzumformungen durch: $f_1(x)-1{,}5=-\left[f_1(-x)-1{,}5\right]$ $\Leftrightarrow\ f_1(x)=-f_1(-x)+3$ $\Leftrightarrow\ \frac{3\cdot e^x}{1+e^x}=\frac{-3\cdot e^{-x}}{1+e^{-x}}+3$ $\Leftrightarrow\ \frac{3\cdot e^x}{1+e^x}=\frac{-3\cdot e^{-x}+3\cdot(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}$ $\Leftrightarrow\ \frac{3\cdot e^x}{1+e^x}=\frac{3}{1+e^{-x}}$ $\Leftrightarrow\ \frac{3\cdot e^x}{1+e^x}=\frac{3\cdot e^x}{e^x+1}$ w.z.b.w.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	• f_n ist für $n \geq 3$ nicht symmetrisch zur y-Achse, da dann $f_n(x) = f_n(-x)$ gelten müsste, also $\frac{3 \cdot e^x}{(1+e^x)^n} = \frac{3 \cdot e^{-x}}{(1+e^{-x})^n}$. Erweitert man die rechte Seite mit $\left(e^x\right)^n$, so ergibt sich $\frac{3 \cdot e^x}{(1+e^x)^n} = \frac{(e^x)^n \cdot 3 \cdot e^{-x}}{(e^x+1)^n}$. Wegen der Nennergleichheit müssten die Zähler $3 \cdot e^x$ und $3 \cdot (e^x)^n \cdot (e^x)^{-1} = 3 \cdot (e^x)^{n-1}$ identisch sein. Dies ist nur für $n = 2$ erfüllt.		10	15
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

Aufgabe 7 Überführung

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Die Verbindung von P nach Q als Strecke hat die Steigung $$m = \frac{\Delta h}{\Delta l} = \frac{10}{400} = 2{,}5\%.$$ Der Anschauung entnimmt man, dass im Vergleich zur Strecke jede gekrümmte Rampenführung von P nach Q Stellen aufweisen muss, deren Steigung noch größer als 2,5 % ist. Der Maximalwert von 2,4 % auf der ganzen Rampenstrecke ist also keinesfalls einzuhalten.	5	10	
b)	• Die Amplitude beträgt die Hälfte von 10 m, also $\lvert a \rvert = 5$. Die Rampe beginnt mit dem Minimum, der Verlauf entspricht einer an der x-Achse gespiegelten Kosinusfunktion, also $a = -5$. Die Mittellinie ist um 5 m nach oben verschoben, also $c = 5$. Die halbe Periodenlänge beträgt 800 m, also muss in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b} = \frac{800}{\pi}$ gestreckt werden. Man kann auch so argumentieren: Dem x-Wert $b \cdot 800$ entspricht π, also $b \cdot 800 = \pi \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{800}$. Als Ergebnis erhalten wir: $k(x) = -5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{800} \cdot x\right) + 5.$ • Die Steigung wird durch die Ableitung von k dargestellt: $$k'(x) = \frac{\pi}{160} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{800} \cdot x\right).$$ Das Steigungsmaximum liegt aus Symmetriegründen „in der Mitte“ der Rampe bei der Wendestelle von k: $$k'(400) = \frac{\pi}{160} = 0{,}0196... \approx 2\%.$$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Dies ist genügend niedrig, die Strecke ist an keiner Stelle zu steil. *Man kann dieses Ergebnis natürlich auch mit Hilfe der 2. und 3. Ableitung bestätigen, das wird aber nicht erwartet.* $k''(x)=\frac{\pi^2}{128000}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{800}\cdot x\right)=0$ *führt im betrachteten Bereich zu x = 400.* $k'''(400)=-\frac{\pi^3}{102400000}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{800}\cdot 400\right)<0$*, also liegt hier ein Maximum vor.*	10	10	
c)	Für die geraden horizontalen Streckenabschnitte ist die erste und die zweite Ableitung jeweils die konstante Funktion mit dem Funktionswert Null. Die Kosinusfunktion hat an ihren Extremstellen auch Extremstellen in der zweiten Ableitung, die Werte der zweiten Ableitung sind dort ganz bestimmt nicht Null. Man kann auch konkret rechnen: $k''(x)=\frac{\pi^2}{128000}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{800}\cdot x\right)$ $k''(0)=\frac{\pi^2}{128000}\neq 0,\quad k''(800)=-\frac{\pi^2}{128000}\neq 0.$ Der Eisenbahnexperte hat also mit seinen Bedenken Recht in Bezug auf die 2. Ableitung.		10	
d)	• Die folgenden 6 Bedingungen sind zu beachten: Punkt *P*: $h(0)=0\ ;\ h'(0)=0\ ;\ h''(0)=0$ Punkt *Q*: $h(1)=10\ ;\ h'(1)=0\ ;\ h''(1)=0$. Das lässt sich nur mit einer ganzrationalen Funktion 5. Grades erreichen. • Ansatz: $h(x)=a\cdot x^5+b\cdot x^4+c\cdot x^3+d\cdot x^2+e\cdot x+f$. Aus den Bedingungen für den Punkt *P* folgt: $d=e=f=0$. • Es bleibt also: $h(x)=a\cdot x^5+b\cdot x^4+c\cdot x^3$ Aus den drei Bedingungen für *Q* erhält man das folgenden linearen Gleichungssystem für die Koeffizienten *a, b* und *c*: $a+b+c=10$ $5\cdot a+4\cdot b+3\cdot c=0$ $10\cdot a+6\cdot b+3\cdot c=0$ Dieses Gleichungssystem hat die Lösung: $a=60\ ;\ b=-150\ ;\ c=100$. Also gilt $h(x)=60\cdot x^5-150\cdot x^4+100\cdot x^3$. (*Das* ***Lösen*** *des LGS sollte bei der Bewertung nicht mehr als 15 Punkte umfassen. Die nicht erwartete maßstabsgerechte Funktionsgleichung lautet übrigens:*			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$\hat{h}(x) = h\left(\frac{x}{800}\right) = \frac{3}{1{,}6384 \cdot 10^{13}} \cdot x^5 - \frac{3}{8{,}192 \cdot 10^9} \cdot x^4 + \frac{1}{5{,}12 \cdot 10^6} \cdot x^3)$ • Die Steigungen der Trasse werden durch die Ableitung von *h* ausgedrückt: $h'(x) = 300 \cdot x^4 - 600 \cdot x^3 + 300 \cdot x^2$. Aus Symmetriegründen liegt das Maximum von h' (der Wendepunkt von *h*) in der Mitte der Rampe, also bei $x = \frac{1}{2}$. *Man kann dieses Ergebnis natürlich auch mit Hilfe der 2. und 3. Ableitung bestätigen, das wird aber nicht erwartet:* $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{75}{4}$. Indem wir die Maßstabsveränderung rückgängig machen, erhalten wir den tatsächlichen Maximalwert für die Steigung der Rampe $\frac{75}{4 \cdot 800} \approx$ 2,34%. Dieser Wert ist noch zulässig.	10	25	
e)	Statt des konkreten Wertes von $r = 1$ (in Wirklichkeit: $\hat{r} = 800$*)* kann man eine Variable *r* (für die Rampenlänge) einführen. Dann argumentiert und rechnet man entweder genau wie in d) und erhält den Maximalwert für die Steigung als Funktion *max s(r)* von *r*. Nun löst man die Gleichung: $max\ s(r) = 800 \cdot 2{,}4\%$. Oder man kann auch direkt in das Gleichungssystem eine weitere Gleichung $h'\left(\frac{r}{2}\right) = 800 \cdot 0{,}024$ mit der weiteren Unbekannten *r* einführen und erhält dann die minimale Rampenlänge direkt als ein Element des Lösungsvektors. (*Zuatzinformation für Korrektoren:* *Beide Wege führen auf das Ergebnis* $r \approx 0{,}977$ bzw. $(\hat{r} \approx 781{,}25)$. *Die Rampe kann also nur unwesentlich um knapp 19 m verkürzt werden.*)			20
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Aufgabe 8 Minigolfbahn

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

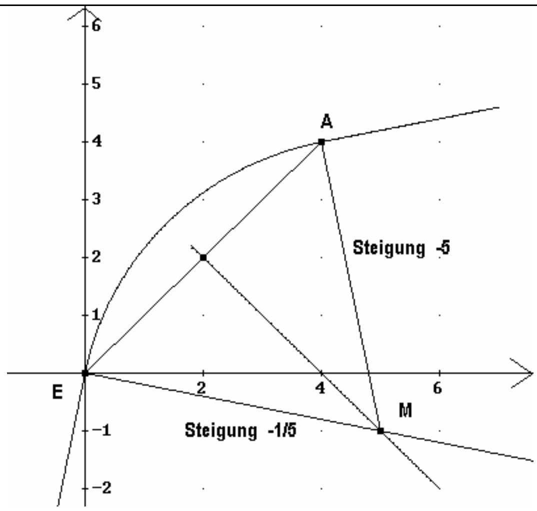
Der Mittelpunkt M des Kreisbogens liegt einerseits auf der Mittelsenkrechten m der Sehne $\overline{EA}$:
Sehne $\overline{EA}$: $y = x$.

Die Mittelsenkrechte m geht durch (2 | 2) und hat die Steigung –1. Eingesetzt in die allgemeine Gleichung linearer Funktionen erhält man:

$$2 = -2 + b \Leftrightarrow b = 4$$

Damit gilt:

$$m(x) = -x + 4$$



Andererseits liegt M auf dem Lot zur Einlaufstrecke durch E mit der Gleichung

$$l(x) = -\frac{1}{5}x.$$

Man berechnet leicht, dass M als Schnittpunkt die Koordinaten (5 | –1) hat.

$$-\frac{1}{5}x = -x + 4 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x = 4 \Leftrightarrow x = 5 \text{ und } y = -5 + 4 = -1.$$

Oder man konstruiert die beiden Geraden (mit Lineal und Geodreieck) und liest die Koordinaten des Schnittpunktes ab.

Dann hat der Radius $\overline{MA}$ die Steigung $\frac{y_A - y_M}{x_A - x_M} = \frac{4-(-1)}{4-5} = -5$.

Die Auslaufstrecke ist als Tangente senkrecht zu diesem Radius. Sie hat also die Steigung $\frac{1}{5}$.

Oder man konstruiert (mit Lineal und Geodreieck) das Lot zum Radius $\overline{MA}$ durch den Punkt A und liest die Steigung im Karonetz ab.

<u>Korrekturhinweis:</u> Wenn der Weg über die geometrischen Konstruktionen gewählt wurde, müssen die einzelnen Schritte explizit beschrieben werden.

</td><td>10</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

- Der Winkel zwischen der Einlauf- und der Auslaufrichtung ergibt sich aus den Winkeln, die die Ein- und Auslaufstrecke jeweils mit der x-Achse bilden. Über den Arcustangens der Steigungen erhält man diese Winkel:
  $\alpha_E = \arctan(5) \approx 78{,}7°$ und $\alpha_A = \arctan(-2) \approx -63{,}4°$.
  Für den Winkel zwischen Einlauf- und Auslaufrichtung erhält man (über die Winkelsumme im Dreieck) das Maß 37,9°.
  Oder direkte Berechnung über die Formel:
  $$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{-2-5}{1-10} = \frac{7}{9}$$
  $$\alpha = 37{,}87...°$$
  Einlauf- und Auslaufstrecke bilden einen Winkel von ca. 37,9°.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	• Eine ganzrationale Funktion *f* dritten Grades hat die Form: $$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$ Um die vier Koeffizienten zu bestimmen, werden 4 Bedingungen benötigt. Aus diesen lässt sich ein lineares Gleichungssystem mit vier Gleichungen und vier Unbekannten formulieren: aus i) folgt $f(0)=0$ und damit sofort $d=0$. aus iii) folgt $f'(0)=5$ und damit sofort $c=5$. aus ii) folgt $f(4)=4$ und zusammen mit den bisherigen Ergebnissen die Gleichung $64a+16b=-16$ aus iv) folgt $f'(4)=-2$ und zusammen mit den bisherigen Ergebnissen die Gleichung $48a+8b=-7$. Dieses Gleichungssystem hat die Lösung $a=\frac{1}{16}$ und $b=-\frac{5}{4}$. Die gesuchte Funktionsgleichung lautet $f(x)=\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{4}x^2+5x$. • Es gilt $f'(x)=\frac{3}{16}x^2-\frac{5}{2}x+5$ mit den Nullstellen $x_{1,2}=\frac{20}{3}\pm\frac{4}{3}\cdot\sqrt{10}$, d.h. $x_1\approx 10{,}88$ und $x_2\approx 2{,}45$. Da *f* kubische Funktion mit positivem Leitkoeffizienten ist, liegt damit bei x_2 ein Hochpunkt. Es gilt: $f(x_2)=-\frac{100}{27}+\frac{80}{27}\cdot\sqrt{10}\approx 5{,}67$ Der Hochpunkt liegt in diesem Bandenbereich und hat die Koordinaten (2,45 | 5,67). Es ist nun noch zu zeigen, dass der Wendepunkt von *f* nicht im Bandenbereich, also nicht zwischen $x=0$ und $x=4$, liegt: Es gilt $f''(x)=\frac{3}{8}x-\frac{5}{2}$ mit der Nullstelle $x_3=\frac{20}{3}>6$. Diese Wendestelle liegt in der Tat außerhalb des Bandenbereichs.	15	20	5
c)	• Eine ganzrationale Funktion fünften Grades hat die Form: $$h(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+g$$ Um die sechs Koeffizienten zu bestimmen, werden jetzt sechs voneinander unabhängige Bedingungen benötigt. Aus diesen lässt sich ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem mit sechs Gleichungen und sechs Unbekannten formulieren: Es gelten weiterhin die Forderungen i) bis iv). Daraus folgt zunächst wieder: $g=0$ und $e=5$. Neu hinzu kommen die Bedingungen, dass bei *E* und *A* keine sprunghafte Änderung der Krümmung auftritt, also			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

v) $h''(0) = 0$ und vi) $h''(4) = 0$

Aus v) folgt sofort $d = 0$.

Für *a*, *b* und *c* ergibt sich dann folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lll} 1024a + 256b + 64c + 20 = 4 & & I \quad 1024a + 256b + 64c = -16 \\ 1280a + 256b + 48c + \;\; 5 = -2 & \text{bzw.} & II \quad 1280a + 256b + 48c = -7 \\ 1280a + 192b + 24c \qquad = 0 & & III \quad 1280a + 192b + 24c = 0 \end{array}$$

Elimination z.B. von *c*: $\begin{array}{ll} -3 \cdot I + 4 \cdot II : I' & 2048a + 256b = 20 \\ -II + 2 \cdot III : II' & 1280a + 128b = 7 \end{array}$,

danach von *b*: $-I' + 2 \cdot II'$ $512a = -6$, gekürzt $256a = -3$. Daraus folgt

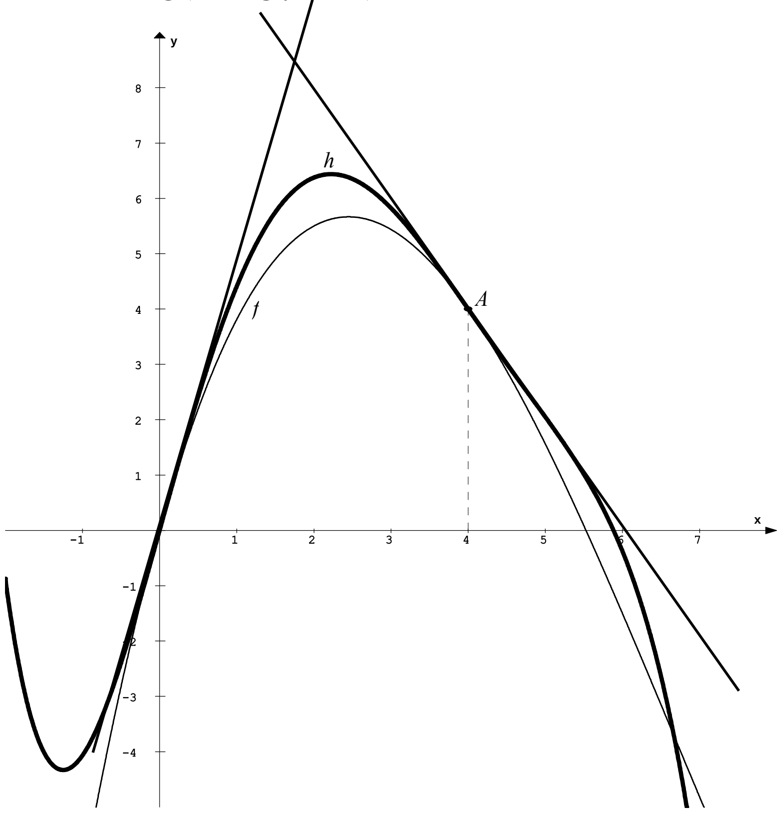
$a = -\frac{3}{256}$. Eingesetzt in *I'*: $256b = 44$ oder $64b = 11$. Damit ist

$b = \frac{11}{64}$. Eingesetzt in *I*: $64c = -48$, also gekürzt $c = -\frac{3}{4}$.

Zusammen mit $e = 5$ (s.o.) lautet die Gleichung der ganzrationalen Funktion

$$h(x) = -\frac{3}{256}x^5 + \frac{11}{64}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + 5x$$

Grafische Darstellung (nicht gefordert):



		I	II	III
			15	20
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 9 Schulhofgestaltung

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Der Graph ist symmetrisch zur x-Achse, d.h. bis auf die drei Nullstellen $(-2\|0)$, $(0\|0)$ und $(2\|0)$ gibt es zu jeder x-Koordinate im Intervall $[-2;2]$ zwei Punkte, die sich nur im Vorzeichen der y-Koordinate unterscheiden. Das trifft für die angegebene Gleichung zu, da die y-Koordinate quadriert ist, das Vorzeichen also keine Rolle spielt. Der Graph ist jedoch auch symmetrisch zur y-Achse, welches die rechte Seite der Gleichung garantiert, die aus einem Polynom mit nur graden Exponenten besteht. Damit geht der Graph auch durch den Ursprung. Die konkrete Form des Graphen hängt von a ab. Aus der Nullstelle bei $(2\|0)$ folgt $0 = 4a - 16$, also $a = 4$. Die Koordinaten von A sind nach der Skizze etwa $x_A \approx 1{,}4$ und $y_A = 2$. Damit erfüllt auch A wohl die Gleichung, denn $4 \approx 4 \cdot 1{,}96 - 3{,}8416 = 3{,}9984$ und damit aus Symmetriegründen auch B, C und D. Für $\|x\| > 2$ wird $4x^2 - x^4 = x^2\,(4 - x^2)$ negativ, weil dann $x^2 > 4$ ist. In diesem Fall ist $y \notin \mathbb{R}$. Sonst ist der Term nicht negativ. Die gesuchte Menge ist daher $x \in [-2;2]$. Das entspricht ebenfalls dem Graphen. *<u>Hinweis:</u> An dieser Stelle könnte auch der 1. Teil von Aufgabenteil c) bearbeitet werden, um die Übereinstimmung Term-Graph besser zu belegen.*	10	10	5
b)	Bei einer Funktion ist jeder x-Koordinate (aus der Definitionsmenge) genau eine y-Koordinate zugeordnet, hier bis auf die Nullstellen zwei, die man je einer Funktion zuordnen kann, also z.B. den Graphen oberhalb der x-Achse der Funktion f, den Graphen unterhalb der x-Achse der Funktion g. Die Doppeldeutigkeit in der Gleichung $y^2 = 4x^2 - x^4$ kann durch Radizieren beseitigt werden und bei g_a durch zusätzliche Multiplikation mit -1: $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$ und $g(x) = -\sqrt{4x^2 - x^4}$ mit $D_f = D_g = [-2;2]$.	5	5	
c)	Gemeinsame Punkte der beiden Graphen sind bei den 3 Nullstellen: -2, 0, 2. Die Graphen gehen an diesen Stellen jeweils stetig in einander über. Um das Steigungsverhalten zu untersuchen, betrachtet man die erste Ableitung. Diese bildet man mit der Kettenregel. Es folgt dann: $f'\colon x \to \dfrac{4x - 2x^3}{\sqrt{4x^2 - x^4}}$ mit $D_{f'} = D_f \setminus \{-2;0;2\}$. Da der Nenner der ersten Ableitung an den Definitionsrändern nicht definiert ist, besitzt die erste Ableitung dort jeweils eine Polstelle. Der Graph von f trifft also senkrecht auf die x-Achse. Da dies auch entsprechend für $g(x)$ gilt, gehen die beiden Graphen an den Rändern ohne Knick und Sprung in einander über. Auch die Nullstelle $x_3 = 0$ von $f(x)$ ist eine Definitionslücke von $f'(x)$. Im Fall $x < 0$ gilt: $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(4 - 2x^2\right)}{\|x\|\sqrt{4 - x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\left(4 - 2x^2\right)}{\sqrt{4 - x^2}} = -2$. Im Fall $x > 0$ gilt: $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(4 - 2x^2\right)}{\|x\|\sqrt{4 - x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(4 - 2x^2\right)}{\sqrt{4 - x^2}} = 2$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>$f'(x)$ ist somit an der Stelle $x = 0$ nicht stetig ergänzbar und f an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar.

Der Graph von f besitzt dort also einen Knick.

Entsprechende Überlegungen gelten auch für $g(x)$ an der Stelle 0.

Nähert man sich nun aber der Stelle 0 von rechts und betrachtet die Steigung von f und ebenso der Stelle 0 von links und betrachtet $g(x)$, so erkennt man, dass die Graphen ohne Knick und Sprung an der Stelle 0 in einander übergehen. Entsprechendes gilt für die spiegelbildliche Variante.

Nähert man sich nun von A kommend der Stelle 0, so kann man ohne die Geschwindigkeit zu vermindern über diese Stelle zum Punkt C fahren – vorausgesetzt, man ist allein auf der Bahn. Will man jedoch von A direkt nach B fahren, muss man, da der Bahnverlauf einer „spitzen Kehre“ folgt, zunächst die Geschwindigkeit deutlich verringern, um nicht aus der Bahn getragen zu werden.</td><td>5</td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Wenn der Punkt für das Pflanzloch sowohl nach unten wie nach oben den gleichen maximalen Abstand zur Bahn hat, dann muss er sich auf Grund des Symmetrieverhaltens auf der x-Achse befinden. Die genaue Stelle wird durch den x-Wert des Maximums angegeben. Um diese Stelle zu bestimmen, berechnet man die Nullstellen der 1. Ableitung, die in diesem Fall die Nullstellen des Zählerpolynoms der 1. Ableitung sind. Man erhält:
$$x \cdot (4-2x^2)=0$$
Da 0 nicht zum Definitionsbereich der 1. Ableitung gehört, kann nur der 2. Faktor den Wert 0 annehmen. Nach einfachen Umformungen folgt für die mögliche Extremstelle: $x=\sqrt{2}$. Weitere Extremstellen gibt es nicht, da nur die rechte Teilfläche betrachtet werden soll.

Um nachzuweisen, dass dort tatsächlich ein Maximum vorliegt, bildet man z.B. die 2. Ableitung an dieser Stelle. Dazu muss man innerhalb der Quotientenregel die Kettenregel anwenden. Mit einigen Umformungen folgt:
$f''(x)=\dfrac{2x^6-12x^4}{\sqrt{4x^2-x^4}^3}$.
Das Vorzeichen der 2. Ableitung wird hier bestimmt durch den Zähler, denn der Nenner kann nicht negativ werden. Setzt man in den Zähler für x den Wert $\sqrt{2}$ ein, so erhält man $2\cdot 8-12\cdot 4<0$. Folglich liegt dort ein Maximum.

Der Nachweis für ein Maximum kann auch über einen Vorzeichenwechsel der 1. Ableitung nachgewiesen werden. Das Vorzeichen im Bereich von $\sqrt{2}$ wird bestimmt durch den Faktor $(4 - 2x^2)$ im Zähler: für $0 < x < \sqrt{2}$ ist der Faktor positiv, der Graph steigt also monoton. Für $x > \sqrt{2}$ ist der Faktor negativ, der Graph fällt. Damit liegt ein Maximum vor.

Der Pflanzpunkt P liegt also bei $P(\sqrt{2}\mid 0)$.

Um den Abstand in y-Richtung zu berechnen, bestimmt man $f(\sqrt{2})$ und erhält den Wert 2.</td><td>5</td><td>10</td><td>5</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
e)	Aus Symmetriegründen gilt für den gesuchten Flächeninhalt A: $A = 4\int_0^2 f(x)\,dx \;=\; 4\int_0^2 \sqrt{4x^2 - x^4}\,dx \;=\; 4\int_0^2 \sqrt{x^2\left(4 - x^2\right)}\,dx.$ Die Berechnung des Integrals erfolgt mit Hilfe der Substitutionsregel unter Verwendung der Substitution $t = 4 - x^2$. $A = 4\cdot(-\frac{1}{2}\int_4^0 \sqrt{t}\;dt) = -2\cdot\left[\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_4^0 = \frac{4}{3}\sqrt{4^3} = \frac{32}{3}.$ Da eine Längeneinheit 10 m entspricht, benötigt man ungefähr 26,7 kg Samen.		10	5
f)	Wenn die Bahn wie angegeben unter Beibehaltung der Form verkleinert werden soll, so bedeutet dies eine Stauchung um den Faktor $\frac{3}{4}$. Also folgt für den Funktionsterm des Graphen im 1. Quadranten: $f(x) = \frac{3}{4}\cdot\sqrt{4x^2 - x^4}$. Die Multiplikation mit einem konstanten Faktor hat keine Auswirkungen die Lage der Extremstelle und damit auf die Lage des Pflanzloches. Die „spitze Kehre“ wird etwas abgeflacht. Die Größe der Rasenfläche wird um diesen Faktor verändert, so dass man nun eine Fläche von 3 200 m² einsäen kann, also 80 kg Samen kaufen muss.		5	5
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 10 Tumorwachstum

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Lösung der Gleichung (2): $r(t) = k\cdot e^{-c\cdot t}$, denn $r'(t) = k\cdot(-c)\cdot e^{-c\cdot t} = -c\cdot r(t)$. Es reicht als Lösung auch $r(t) = e^{-c\cdot t}$, da der „Fehler“ bei der Berechnung von V' bemerkt wird und k als Faktor ergänzt werden kann. Vorgegebene Funktion V erfüllt (1): V wird (nach t) abgeleitet: $V'(t) = V(0)\cdot\left[\frac{b}{c}\cdot\left(1 - e^{-c\cdot t}\right)\right]'\cdot e^{\frac{b}{c}\cdot\left(1 - e^{-c\cdot t}\right)} = V(t)\cdot b\cdot e^{-c\,t}$. Dies entspricht der Behauptung (mit der speziellen Lösung von $r(t) = b\cdot e^{-c\cdot t}$, also $k = r(0) = b$).		10	5

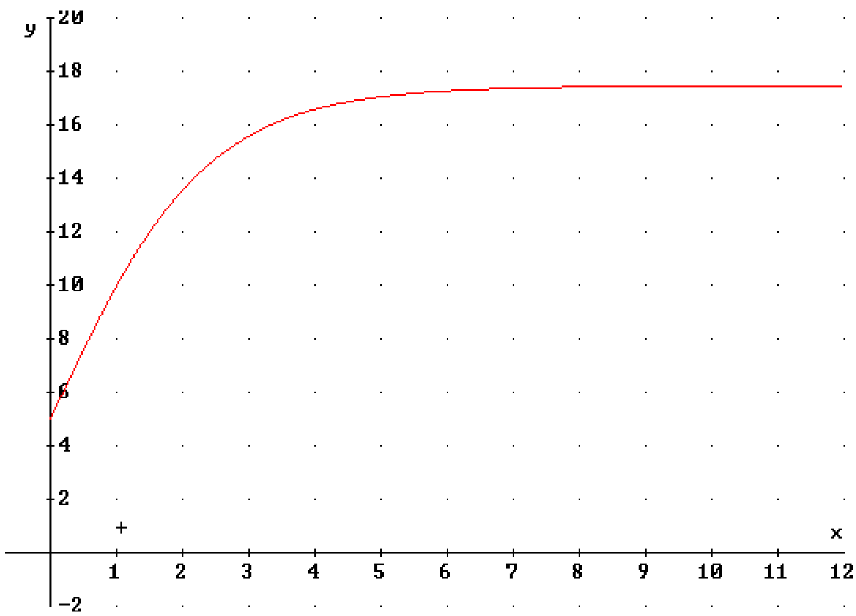
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

b) Untersuchung der speziellen Funktion $V_{\text{speziell}}(t) = 5 \cdot e^{1{,}25 \cdot (1-e^{-0{,}8t})}$

Definitionsbereich nach dem Text der Aufgabe $\mathbb{R}_0^+$, Wertebereich $V(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{D}$, da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Rechter Rand ($t \to \infty$): $e^{-0{,}8t}$ strebt gegen 0, daher gilt : $V(t) \to 5 \cdot e^{1{,}25} \approx 17{,}45$.

Extrema:
$V(0) = 5$ (Startwert gegeben).
$V'(t) = V(t) \cdot e^{-0{,}8 \cdot t}$ stets > 0 für alle t, also keine Extremwerte.
$V'(0) = 5$: Steigung an der y-Achse beträgt fast 80°.

Wendepunkt:
$V''(t) = V'(t) \cdot e^{-0{,}8 \cdot t} - 0{,}8 \cdot V(t) \cdot e^{-0{,}8 \cdot t} = V(t) \cdot e^{-0{,}8 \cdot t} \cdot (e^{-0{,}8 \cdot t} - 0{,}8)$.
$V''(t)$ kann nur 0 werden, wenn die rechte Klammer 0 ist, denn die anderen beiden Faktoren sind stets positiv:
$e^{-0{,}8 \cdot t} - 0{,}8 = 0 \Leftrightarrow -0{,}8 \cdot t_W = \ln 0{,}8 \Leftrightarrow t_W \approx 0{,}28$, $V(t_W) = 5 \cdot e^{0{,}25} \approx 6{,}42$.
Also Wendepunkt in $W(0{,}28 \mid 6{,}42)$, da Vorzeichenwechsel von V'' bei t_W.



Verallgemeinerung:
Definitions- und Wertebereich unverändert.

Rechter Rand analog: $V(t) \to V(0) \cdot e^{\frac{b}{c}}$.
$V(0)$ gegebener Startwert.

Extrema:
$V'(t) = V(t) \cdot b \cdot e^{-ct} > 0$, daher keine Extremwerte.
$V'(0) = V(0) \cdot b$: Steigung an der y-Achse.

Wendepunkt:
$V''(t) = V'(t) \cdot b \cdot e^{-ct} - c \cdot V(t) \cdot b \cdot e^{-ct} = V(t) \cdot b \cdot e^{-ct} \cdot (b \cdot e^{-ct} - c)$
$V''(t)$ kann analog nur 0 werden, wenn die rechte Klammer 0 ist:
$b \cdot e^{-ct} - c = 0 \quad \Rightarrow \quad t_W = -\frac{1}{c} \cdot \ln \frac{c}{b}$.

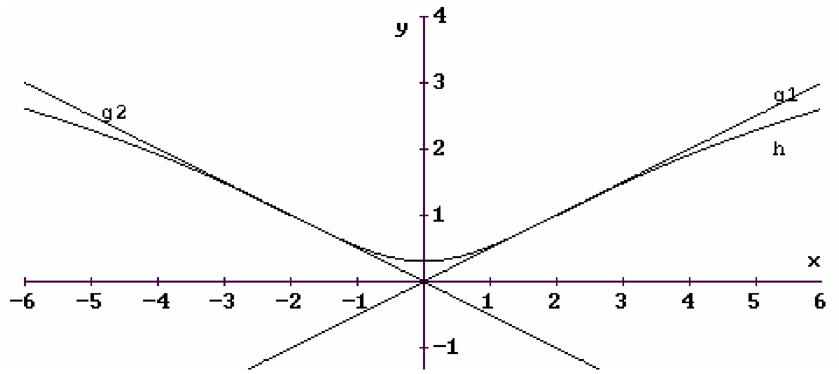
I	II	III
20	35	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Fall 1: $b < c \Rightarrow$ t_W ist negativ und daher nicht im Definitionsbereich. Keine Wendepunkte. Fall 2: $b \geq c \Rightarrow W\left(-\frac{1}{c} \cdot \ln\frac{c}{b} \,\middle|\, V(0) \cdot e^{\frac{b}{c}\cdot\left(1-\frac{b}{c}\right)}\right)$, Begründung wie bei b1). Der Graph der allgemeinen Funktion V verläuft daher prinzipiell so wie in b1).			
c)	Gleichung (2) drückt aus, dass die Wachstumsrate exponentiell abnimmt ($c > 0$, also $-c < 0$ und $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Gleichung (1) bedeutet, dass das Volumen des Tumors entsprechend der Wachstumsrate wächst: Volumenänderung *(lokal)* = Wachstumsrate · Volumen. Die Untersuchungen in b) haben gezeigt, dass das Wachstum nach dem Modell nicht nur stets langsamer wird, sondern dass der Tumor gegen ein maximales Ausmaß strebt, welches nicht überschritten wird *(Verhalten am rechten Rand)*.		5	10
d)	Zu untersuchen bleibt das Verhalten am linken Rand, also $t \to -\infty$. $e^{-\text{große Zahl}} \to \infty$, damit geht der gesamte Exponent gegen $-\infty$, also $V(t) \to 0$. Die x-Achse ist daher Asymptote am linken Rand des Definitionsbereiches. Nach b2) liegt in Abhängigkeit von der Größe der Parameter b und c mit $b > c$ noch der Wendepunkt links von der y-Achse. (Auch eine Untersuchung der konkreten Funktion von b1) wäre angemessen.)		15	
	Insgesamt 100 BWE	20	65	15

Aufgabe 11 Straßenkreuzung

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Gerade g_1 schließt mit der positiven x-Achse den Winkel $\alpha = \tan^{-1}(\frac{1}{2}) \approx$ $\approx 26{,}6°$ ein. Da g_1 und g_2 achsensymmetrisch zueinander sind, schließen sie einen Winkel von etwa $2 \cdot 26{,}6° = 53{,}2°$ ein, also etwa 53°. • <u>Bedingungen für f:</u> Die Funktion f muss an der Stelle –2 den gleichen Funktionswert wie g_2 haben, d. h. $f(-2) = g_2(-2) = 1$. Entsprechend gilt: $f(2) = g_1(2) = 1$. Außerdem muss f in den Punkten $P(-2\|1)$ bzw. $Q(2\|1)$ die Geraden nur berühren, also die gleiche Steigung wie die Geraden haben. D. h. $f'(-2) = g_2'(-2) = -\frac{1}{2}$ und $f'(2) = g_1'(2) = \frac{1}{2}$. Zum Krümmungssprung siehe Hinweis in der Aufgabe. • <u>Nachweis des Ansatzes $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$:</u> Die beiden Geraden g_1 und g_2 sowie die beiden Berührpunkte liegen symmetrisch zur y-Achse. Wählt man einen ganzrationalen Ansatz mit einer			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Funktion vierten Grades, so treten nur gerade Potenzen von x auf. Auf Grund der Symmetrie müssen nur noch die Bedingungen $f(2)=1$, $f'(2)=\frac{1}{2}$ und $f''(2)=0$ erfüllt werden. Diese drei Bedingungen führen auf drei lineare Gleichungen für die Koeffizienten der ganzrationalen Funktion f. Für eine eindeutige Lösung benötigt man also als Ansatzfunktion eine ganz rationale Funktion mit drei Koeffizienten, z. B. $f(x)=ax^4+bx^2+c$. Es gilt mit diesem Ansatz: $f'(x)=4ax^3+2bx$ und $f''(x)=12ax^2+2b.$ Man erhält nun die drei Bedingungen: $f(2)=1=16a+4b+c$ (I) $f'(2)=\frac{1}{2}=32a+4b$ (II) $f''(2)=0=48a+2b$ (III) $(32a+4b)-2(48a+2b)=\frac{1}{2}-2\cdot 0$ folgt aus $\text{II}-2\cdot\text{III}$ $-64a=\frac{1}{2}$ $a=-\frac{1}{128}.$ Dieses Ergebnis eingesetzt in (II) ergibt $32\cdot\left(-\frac{1}{128}\right)+4b=\frac{1}{2}$, also $b=\frac{3}{16}.$ Dieses Ergebnis in I eingesetzt ergibt $c=\frac{3}{8}.$ Also erhält man: $f(x)=-\frac{1}{128}x^4+\frac{3}{16}x^2+\frac{3}{8}$.	15	15	
b)	Die Bedingungen werden nacheinander überprüft. $h(-2)=1+\ln(\frac{1}{8}(-2)^2+\frac{1}{2})=1+\ln(1)=1$. Entsprechend $h(2)$=1. $h'(x)=\frac{\frac{1}{8}2x}{\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}}=\frac{2x}{x^2+4}$. Damit folgt $h'(-2)=\frac{2\cdot(-2)}{(-2)^2+4}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$ und entsprechend $h'(2)=\frac{1}{2}$. $h''(x)=\frac{2(x^2+4)-2x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2}$. Damit folgt $h''(-2)=\frac{-2(-2)^2+8}{((-2)^2+4)^2}=0$ und entsprechend $h''(2)=0$.			

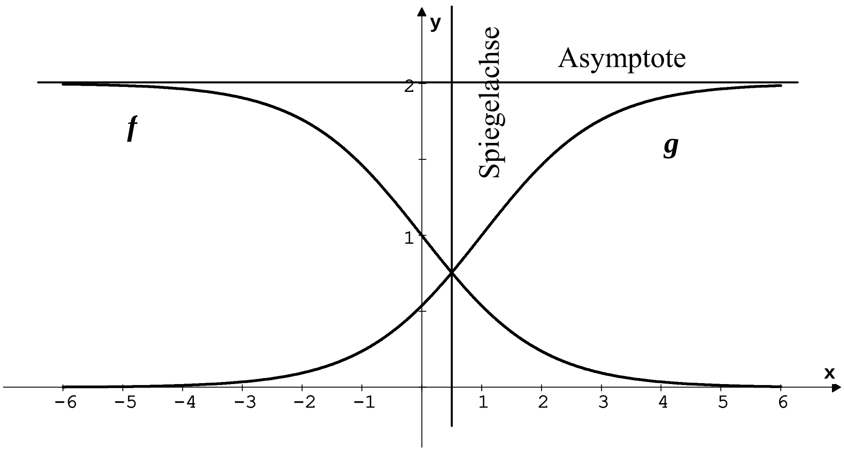
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	 Hinweis: Hier wäre auch eine Symmetrieüberlegung zur Abkürzung der Rechnungen möglich.	10	10	
c)	• <u>Fläche mit Vorschlag aus Teil a):</u> Auf Grund der Symmetrie von f und von g_1 und g_2 zueinander reicht es, die Berechnung des Integrals auf dem Intervall [0;2] vorzunehmen. Alle Funktionen sind im untersuchten Intervall nicht negativ und haben dort nur den Schnittpunkt $Q(2\|1)$. $FL_f = 2\int_0^2 \left(f(x) - g_1(x)\right)dx = 2\int_0^2 \left(-\frac{1}{128}x^4 + \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{8} - \frac{1}{2}x\right)dx$ $= 2\left[-\frac{1}{640}x^5 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x\right]_0^2 = \frac{2}{5} = 0{,}4$ Der gesamte verbrauchte Flächeninhalt FL_f bei der Streckenführung mit der Funktion f beträgt 0,4 FE. • <u>Fläche mit Vorschlag aus Teil b):</u> h ist symmetrisch zur y-Achse, weil x im Funktionsterm nur quadratisch auftritt. Entsprechend zum Vorschlag aus Teil a) kann man sich wieder auf das Intervall [0;2] beschränken. Da insgesamt 8 Unterteilungen zu berücksichtigen sind, kann man nun das Intervall in 4 Teile unterteilen. Als numerische Integrationsmethode wird hier die Rechteckmethode genommen. $FL_h \approx 2\cdot\frac{2}{4}\left((h-g_1)(\frac{1}{4}) + (h-g_1)(\frac{3}{4}) + (h-g_1)(\frac{5}{4}) + (h-g_1)(\frac{7}{4})\right)$ $= 0{,}1974 + 0{,}0634 + 0{,}0116 + 0{,}0004$ $= 0{,}2728.$ Der gesamte verbrauchte Flächeninhalt FL_h bei der Streckenführung mit der Funktion h beträgt 0,2728 FE.	10	15	
d)	Von den üblichen trigonometrischen Funktionen ist nur die Kosinusfunktion symmetrisch zur y-Achse. Deshalb wird der Einfachheit halber diese Funktion angepasst. Dazu muss der Graph an der x-Achse gespiegelt ($\cos(x) \to -\cos(x)$)und nach oben verschoben werden ($-\cos(x) \to -\cos(x) + v$). Zusätzlich müssen die Periode ($-\cos(x) + v \to -\cos(p\cdot x) + v$) und die Amplitude ($-\cos(p\cdot x) + v \to -a\cdot\cos(p\cdot x) + v$) angepasst werden.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Es wird nun der Ansatz $t(x) = -a \cdot \cos(p \cdot x) + v,\ mit\ a,\ p \neq 0$ untersucht. (I) $t'(x) = a \cdot p \cdot \sin(p \cdot x)$ und (II) $t''(x) = a \cdot p^2 \cdot \cos(p \cdot x)$. (III) Die Bedingungen aus Teil a) müssen erfüllt werden. $t(2) = 1 = -a \cdot \cos(p \cdot 2) + v \qquad (IV)$ $t'(2) = \frac{1}{2} = a \cdot p \cdot \sin(p \cdot 2) \qquad (V)$ $t''(2) = 0 = a \cdot p^2 \cos(p \cdot 2) \qquad (VI)$ Aus (VI) folgt $\cos(p \cdot 2) = 0$ und damit $p \cdot 2 = \frac{1}{2}\pi + 2\pi \cdot z$ mit $z \in \mathbb{Z}$. Dem Straßenverlauf gemäß ist $z = 0$ zu wählen, so dass $p = \frac{1}{4}\pi$ folgt. Dieses Ergebnis wird in (V) eingesetzt: $\frac{1}{2} = a \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot \sin(\frac{1}{2}\pi)$. Da $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$ gilt, erhält man $\frac{1}{2} = a \cdot \frac{1}{4}\pi$, also $a = \frac{2}{\pi}$. Die beiden Ergebnisse für p und a werden nun in (IV) eingesetzt: $1 = -\frac{2}{\pi} \cdot \cos(\frac{1}{2}\pi) + v$. Da $\cos(\frac{1}{2}\pi) = 0$ ist, folgt $v = 1$. Insgesamt erhält man $t(x) = 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{1}{4}\pi \cdot x\right)$.		10	15
	Insgesamt 100 BWE	35	50	15

Aufgabe 12 Energiebedarf

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Einsetzen des Funktionsterms von g in die rechte Seite der Differentialgleichung und einfache Termumformungen ergeben: $\frac{1}{2} g(x) \cdot [2 - g(x)] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1 + e^{1-x}} \cdot (2 - \frac{2}{1 + e^{1-x}}) = \frac{1}{1 + e^{1-x}} \cdot \frac{2 + 2e^{1-x} - 2}{1 + e^{1-x}}$ $= \frac{2e^{1-x}}{(1 + e^{1-x})^2} = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also erfüllt g die Differentialgleichung. Diese Differentialgleichung beschreibt ein logistisches Wachstum mit Sättigungsgrenze 2. Logistisches Wachstum, das durch eine Funktion h beschrieben wird, erfüllt die Differentialgleichung $h'(x) = k \cdot h(x) \cdot (S - h(x))$. Bei zunehmendem Argument nähert sich *h(x)* der Sättigungsgrenze *S*, bleibt aber stets darunter. Die momentane Änderungsrate von *h(x),* d .h. *h'(x),* nimmt zu, wenn *h(x)* < $\frac{1}{2}$ *S* ist und nimmt ab, wenn *h(x)* > $\frac{1}{2}$*S* gilt. Ihr Maximum ist bei *h(x)* = $\frac{1}{2}S$. Für kleine Argumente wird *h* näherungsweise durch ein exponentielles Wachstum beschrieben.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Für große Argumente wird h näherungsweise durch ein beschränktes Wachstum mit Sättigungsgrenze S beschrieben.		22	
b)	Der Sättigungswert von g ist 2. Zu berechnen ist das Argument x_1, für das der Funktionswert 1,96 beträgt. $1{,}96 = \frac{2}{1+e^{1-x_1}} \Leftrightarrow 1{,}96 + 1{,}96e^{1-x_1} = 2 \Leftrightarrow e^{1-x_1} = \frac{1}{49} \Leftrightarrow 1 - x_1 = \ln(\frac{1}{49})$ $\Leftrightarrow x_1 = 1 - \ln(\frac{1}{49}) \Rightarrow x_1 \approx 4{,}89$ 98% der Sättigungsgrenze wird also gegen Ende des Jahres 1994 erreicht. Die Zunahme der momentanen Änderungsrate verlangsamt sich ab dem Zeitpunkt x_2, für den der Funktionswert gleich der Hälfte des Sättigungswertes ist. $g(x_2) = 0{,}5 \cdot 2 \Leftrightarrow \frac{2}{1+e^{1-x_2}} = 1 \Leftrightarrow 1 = e^{1-x_2} \Leftrightarrow 0 = 1 - x_2 \Leftrightarrow x_2 = 1$ Ab dem Beginn des Jahres 1991 verlangsamt sich die momentane Änderungsrate des Energiebedarfs. Der gesamte Energiebedarf E wird als Integral von g über den Zeitraum von 0 bis 11 Jahren berechnet. $E = \int_0^{11} g(x)dx = \int_0^{11} \frac{2}{1+e^{1-x}} dx = 2 \cdot \int_0^{11} \frac{e^x}{e^x + e} dx = 2 \cdot \left[\ln(e^x + e)\right]_0^{11}$ $= 2 \cdot (\ln(e^{11} + e) - \ln(e^0 + e)) \approx 19{,}37$ Der gesamte Energiebedarf zwischen Anfang 1990 und Ende 2000 beträgt ca. 19,4 10^8 kWh.		10	16
c)	Da f in ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, kann der Graph von f keine senkrechten Asymptoten besitzen. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{1+e^x} = 0$, da die Exponentialfunktion für $x \to \infty$ auch gegen ∞ geht. Die x-Achse ist also waagerechte Asymptote für $x \to \infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{1+e^x} = 2$, da die Exponentialfunktion für $x \to -\infty$ gegen 0 geht. Die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ ist also waagerechte Asymptote für $x \to -\infty$. Die Ableitungen der Funktion f erhält man mit der Quotienten- und der Kettenregel: $f'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}$, $f''(x) = \frac{2e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$, $f'''(x) = \frac{-2e^{3x} + 8e^{2x} - 2e^x}{(1+e^x)^4}$. Die notwendige Bedingung für die Existenz einer Wendestelle ist $f''(x) = 0$. $\frac{2e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3} = 0 \Leftrightarrow 2e^x(e^x-1) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$, da $e^x > 0$ für alle $x \in \oplus$ gilt.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Da $f'''(0) = \frac{1}{4} \neq 0$ und $f(0) = 1$ gilt, besitzt der Graph von f den Wendepunkt (0 | 1). (Alternativ kann auf die Berechnung von $f'''(x)$ verzichtet werden, wenn der Vorzeichenwechsel von $f''(x)$ an der Stelle 0 gezeigt wird.) Da die erste Ableitung von f für alle $x \in \mathbb{R}$ negativ ist, ist die Funktion f streng monoton fallend. Der Wertebereich von f ist]0; 2[, da die waagerechten Asymptoten den Gleichungen $y = 2$ und $y = 0$ genügen und die Funktion f streng monoton fallend ist.  	16	20	
d)	Um die Achsensymmetrie zur Geraden $x = \frac{1}{2}$ nachzuweisen, zeigt man, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(\frac{1}{2} - x) = g(\frac{1}{2} + x)$ erfüllt ist. $f(\frac{1}{2} - x) = \frac{2}{1 + e^{\frac{1}{2} - x}} = \frac{2}{1 + e^{1 - (\frac{1}{2} + x)}} = g(\frac{1}{2} + x)$. Skizze siehe Lösung Teil c) Der Wertebereich von g entspricht dem von f, da der Graph von g durch Spiegelung an der Geraden $x = \frac{1}{2}$ aus dem Graphen von f entsteht. Die Funktion g ist streng monoton steigend, da f streng monoton fallend ist. Der Wendepunkt (0 | 1) des Graphen von f wird durch die beschriebene Achsenspiegelung auf den Wendepunkt (1 | 1) des Graphen von g abgebildet.		16	
	Insgesamt 100 BWE	16	68	16

Aufgabe 13 Schimmelpilz

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Bestimmung des Parameters a:
Der in der Aufgabe dargestellte Graph der Funktion f_a verläuft durch den Punkt (0 | 9). Damit gilt:

$$f_a(0)=9 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{a\cdot e^0}{\left(1+e^0\right)^2}=9$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{a}{4}=9$$

$$\Leftrightarrow\quad a=36.$$

</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Bestimmung des gemeinsamen Punktes der Graphen von g und f_{36}:
Die Schnittstellen der Graphen von g und f_{36} sind die Lösungen der Gleichung $f_{36}(x_s)=g(x_s)$. Dieser Ansatz ergibt:

$$\frac{36e^{x_s}}{\left(1+e^{x_s}\right)^2}=e^{x_s} \quad\Leftrightarrow\quad 36=\left(1+e^{x_s}\right)^2,\quad da\quad e^{x_s}>0$$

$$\Leftrightarrow\quad 1+e^{x_s}=6,\qquad da\quad 1+e^{x_s}>1$$

$$\Leftrightarrow\quad e^{x_s}=5$$

$$\Leftrightarrow\quad x_s=\ln(5).$$

Wegen $g(\ln(5)) = 5$ haben f_{36} und g den Punkt (ln(5) | 5) gemeinsam.

Bedingung für gemeinsame Punkte:
Eine beliebige Schnittstelle x_T der Graphen von g und f_a ist eine Lösung der Gleichung $f_a(x_T)=g(x_T)$. Dies liefert:

$$\frac{ae^{x_T}}{\left(1+e^{x_T}\right)^2}=e^{x_T} \quad\Leftrightarrow\quad a=\left(1+e^{x_T}\right)^2 .$$

Aus $e^{x_T}>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ folgt $\left(1+e^{x_T}\right)^2>1$.

Daher ist die Gleichung $a=\left(1+e^{x_T}\right)^2$ nur lösbar für $a > 1$.

Es gilt dann $1+e^{x_T}=\sqrt{a}$ und man erhält schließlich $x_T=\ln\left(\sqrt{a}-1\right)$.

Nur im Fall $a > 1$ besitzen die Graphen von f_a und g einen gemeinsamen Punkt und dies ist dann der Punkt $\left(\ln\left(\sqrt{a}-1\right) \mid \sqrt{a}-1\right)$.

</td><td>5</td><td>30</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

<u>Untersuchung der Symmetrie:</u>
Für jedes $a\neq 0$ und für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt:

$$f_a(-x)=\frac{ae^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}=\frac{ae^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}\cdot\frac{e^{2x}}{e^{2x}}=\frac{ae^x}{\left(\left(1+e^{-x}\right)e^x\right)^2}=\frac{ae^x}{\left(e^x+1\right)^2}=f_a(x).$$

Der Graph von f_a ist somit für jedes $a\neq 0$ symmetrisch zur y-Achse.

<u>Flächeninhaltsberechnung:</u>
Der gesuchte Flächeninhalt der beidseitig bis ins Unendliche reichenden Fläche zwischen dem Graphen von f_a und der x-Achse sei A. Aufgrund der Achsensymmetrie zur y-Achse gilt:

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

$$A=\left|2\cdot\int_0^\infty f_a(x)\,dx\right|=2\cdot\left|\lim_{z\to\infty}\int_0^z f_a(x)\,dx\right|=2|a|\cdot\lim_{z\to\infty}\int_0^z\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\,dx\,.$$

Somit wird zunächst eine Stammfunktion für $\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$ ermittelt. Hierzu wird die Substitutionsregel mit der Substitution $t=1+e^x$ verwendet. Wenige leichte Umformungsschritte ergeben:

$$\int\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\,dx=\int\frac{1}{t^2}\,dt=-\frac{1}{t}=\frac{-1}{1+e^x}\,.$$

Damit ergibt die Flächenberechnung:

$$A=2|a|\lim_{z\to\infty}\int_0^z\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\,dx=2|a|\lim_{z\to\infty}\left[\frac{-1}{1+e^x}\right]_0^z=2|a|\lim_{z\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+e^z}\right)=2|a|\cdot\frac{1}{2}=|a|.$$

</td><td></td><td>10</td><td>20</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

Die Funktion F mit $F(t)=\dfrac{36e^t}{1+e^t}$ gibt die zum Zeitpunkt t bedeckte Fläche an.
Dann ist $F'(t)$ die momentane Ausbreitungsgeschwindigkeit (oder Änderungsrate). Da die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schimmelpilzes ermittelt werden soll, muss F' auf lokale Extremstellen untersucht werden. Es gilt:

$$F'(t)=36\;\frac{e^t\left(1+e^t\right)-e^te^t}{\left(1+e^t\right)^2}=36\;\frac{e^t}{\left(1+e^t\right)^2}=f_{36}(t).$$

Zu dieser Funktion gehört der in der Aufgabenstellung angegebene Graph. Damit besitzt F' offensichtlich ein lokales Maximum an der Stelle $t=0$. Ferner gilt: $F'(0)=9$. Damit hat der Schimmelpilz zum Zeitpunkt $t=0$ die größte Ausbreitungsgeschwindigkeit von $9\,\frac{\text{cm}^2}{\text{Tag}}$.
Der Nachweis der Differentialgleichung erfolgt durch Einsetzen. Man erhält:

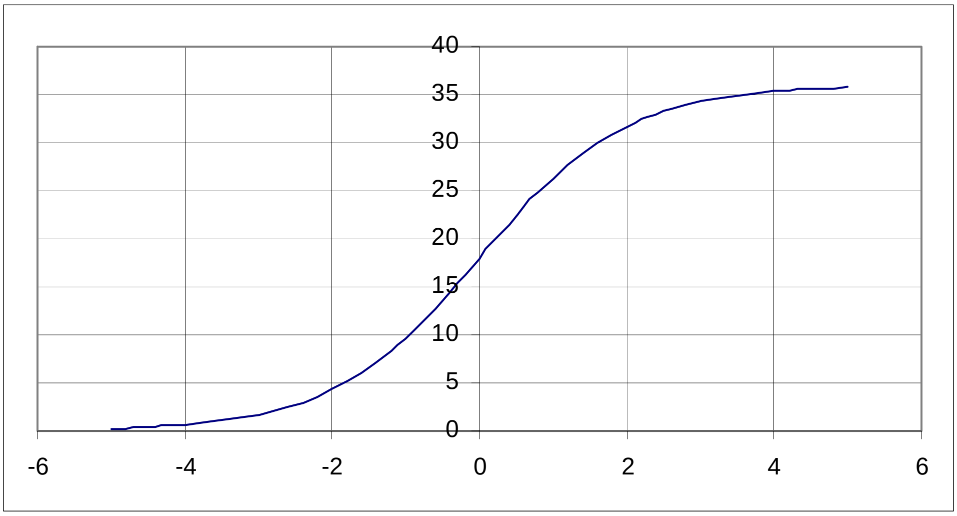
$$\begin{aligned}k\cdot F(t)\cdot\left[G-F(t)\right]&=k\cdot\frac{36e^t}{1+e^t}\cdot\left[G-\frac{36e^t}{1+e^t}\right]\\&=36k\cdot\frac{e^t}{1+e^t}\cdot\left[\frac{G\left(1+e^t\right)-36e^t}{1+e^t}\right]\\&=36k\cdot\frac{e^t}{1+e^t}\cdot\left[\frac{G+\left(G-36\right)e^t}{1+e^t}\right]\end{aligned}$$

Wählt man nun $G=36$ und $k=\frac{1}{36}$, erhält man $k\;F(t)\;[G-F(t)]=F'(t)$.

Offenbar handelt es sich um logistisches Wachstum. Zu Beginn des Beobachtungszeitraumes ($t=0$) hat sich der Schimmelpilz bereits so weit ausgedehnt, dass 50 % der Brotscheibenfläche vom Schimmel befallenen ist. Allerdings verlangsamt sich dann die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schimmels. Nach ca. 5 Tagen nach Beobachtungsbeginn ist praktisch die gesamte Brotfläche mit

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Schimmel befallen. Der Beginn der Schimmelbildung lässt sich etwa auf den 5. Tag vor Beobachtungsbeginn festlegen. Das Modell kann den exakten Beginn und das exakte Ende der Schimmelausbreitung nicht wiedergeben, da sich die Funktion F asymptotisch an den Rändern der mathematischen (maximalen) Definitionsmenge verhält.



</td><td></td><td>30</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>10</td><td>70</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 14 Beleuchtung

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Da sich der Beobachter im einfachsten Fall direkt unter der Lampe befindet bzw. unendlich weit von diesem Punkt befinden kann, folgt: $D = [10\,;\infty[$. Damit folgt für den Wertebereich: $W = [1\,000\,; 0[$. Da $S(b)$ umgekehrt proportional zu b^3 ist, nimmt die Beleuchtungsstärke sehr rasch mit größerer werdendem Abstand ab.	5		
b)	Aus a) folgt für die Beleuchtungsstärke unter der Lampe: $S(10) = 100$. Die halb so große Beleuchtungsstärke beträgt also 50 Lux. Setzt man diesen Wert in die gegebene Festlegung für S ein, so folgt nach einigen elementaren Umformungen: $b = \sqrt[3]{2\,000} \approx 12{,}6$. Wendet man den Satz des Pythagoras auf die gegebene Skizze an, so folgt: $x^2 = b^2 - 100$, also $x \approx 7{,}7$. Da wir Abstände berechnen, kommen jeweils nur die nichtnegativen Lösungen in Frage. Bezogen auf eine Lampe ist die Lichtstärke bei einem Abstand von etwa 7,7 m von der Lampe etwa halb so groß wie direkt unter der Lampe.	10		

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	Wie schon oben angegeben ist $b^2 = x^2 + 100$, also $b = \sqrt{x^2+100}$. Setzt man diesen Term für b in die gegebene Festlegung ein, so folgt: $S_2(x) = S\left(\sqrt{x^2+100}\right) = \dfrac{100\,000}{\left(x^2+100\right)^{1,5}}$.	10		
d)	Nach Voraussetzung befindet sich der Punkt P 6 m vom Fußpunkt des Lotes der linken und daher 14 m vom Fußpunkt des Lotes der rechten Lampe entfernt. Berechnet man die Beleuchtungsstärken in P in Abhängigkeit von diesen Entfernungen, so folgt: $S_2(6) \approx 63{,}05$ und $S_2(14) \approx 19{,}64$. Hinzu kommt aber auch noch Licht von weiter entfernten Lampen. Zunächst wird noch die nächste linke Lampe ($x_3 = 26$) und die nächste rechte ($x_4 = 34$) berücksichtigt. Berechnet man hierzu die Beleuchtungsstärken, so folgt: $S_2(26) \approx 4{,}63$ und $S_2(34) \approx 2{,}25$. Die Gesamtbeleuchtungsstärke im Punkt P durch diese 4 Lampen beträgt also 89,57 Lux. Auch von den noch weiter entfernten Lampen kommt noch etwas Licht hinzu. Berechnet man die Werte für die folgenden Lampen, so erhält man für $S(46) \approx 0{,}96$ und $S(54) \approx 0{,}60$. Daher beträgt die Gesamtbeleuchtungsstärke bei 6 Lampen im Punkt P: 91,7 Lux. Die Berücksichtigung weiterer Lampen ist nicht mehr sinnvoll, da die Zunahme der Beleuchtungsstärke unter 1 % liegt.		20	5
e)	Man kann beispielsweise den Lampenabstand a und eine Stelle zwischen zwei Lampen mit dem Abstand x von der linken Lampe betrachten und den funktionalen Zusammenhang $S_3(x,a)$ untersuchen zwischen x und a als Argumenten und der an der Stelle herrschenden Beleuchtungsstärke S_3 als zugehörigem Wert. Bei Berücksichtigung von 4 benachbarten Lampen (vgl. d) erhält man folgenden Funktionsterm: $S_3(x,a) = S_2(x) + S_2(a-x) + S_2(a+x) + S_2(2a-x)$. Addiert die Beleuchtungsstärken der direkt benachbarten Lampen, so weicht der Wert um etwa 10% vom obigen Wert ab. Daher könnte man auch nur diese beiden Lampen berücksichtigen und käme zu $\widetilde{S_3}(x,a) = S_2(x) + S_2(a-x)$. Am dunkelsten wird es dann genau in der Mitte zwischen zwei Lampen sein, also für $x = \frac{a}{2}$. Darum berechnen wir einige für verschiedene Abstände a und für $x = 0$ und $x = \frac{a}{2}$ zugehörige Werte von S_3 bzw. $\widetilde{S_3}$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
Wir berechnen einige Werte von $S_3(x,a)$ und $\widetilde{S_3}(x,a)$:

a	15	17	20	25
$x = 0$	137	128	119	110
$x = \frac{a}{2}$	116	98	77	52

a	15	16	20	25
$x = 0$	117	115	109	105
$x = \frac{a}{2}$	102	95	71	49

Wenn wir davon ausgehen, dass der Wert 100 Lux unter einer einzelnen Lampe dort gut genug ausleuchtet, so hätte man für $a = 17$ ($a = 16$) in der Mitte (Minimum) zwischen 2 Lampen noch 98 (95) Lux, also fast 100 Lux.

Man käme dann für die 200 m mit 12 (13) Lampen aus.

Die Offenheit der Aufgabenstellung bringt es mit sich, dass natürlich auch ganz andere Argumentationen und Formalisierungen zu erfolgreichen Darstellungen führen können.
</td><td></td><td>15</td><td>15</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>

$$\int_0^{20} S_2(x)dx \approx 4 \cdot \sum_{k=0}^{4} S_2\big((2k+1)\cdot 2\big) \approx 895\,.$$

</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>g)</td><td>

$$2 \cdot \frac{\int_0^{20} S_2(x)dx}{20} \approx 89{,}5.$$

Bei einem Lampenabstand von 20 m hat man zwischen 2 Lampen ohne Berücksichtigung weiterer Lampen noch eine mittlere Ausleuchtung von ca. 90 Lux.
</td><td></td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>

Aufgabe 15 Luftvolumen der Lunge

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
Als Umkehrung der Differentialrechnung ist das Integral dann der Weg zurück zum „Bestand“, d.h. $F(t)$ beschreibt das Luftvolumen.

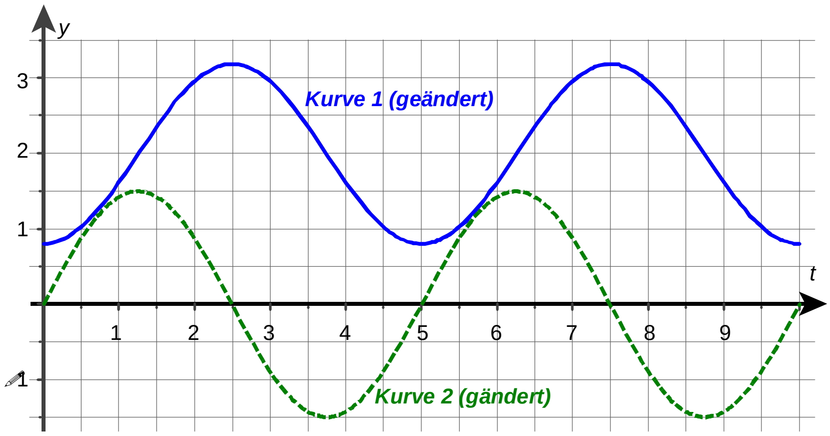
$$2 \cdot \int_0^t \sin(\tfrac{2}{5}\pi \cdot x)dx \;=\; 2 \cdot \left[-\cos(\tfrac{2}{5}\pi \cdot x) \cdot \frac{1}{\frac{2}{5}\pi}\right]_0^t \;=\; \frac{5}{\pi} \cdot \left[-\cos(\tfrac{2}{5}\pi \cdot x)\right]_0^t \;=$$

$$= \frac{5}{\pi} \cdot \left(1 - \cos(\tfrac{2}{5}\pi \cdot t)\right)$$
</td><td></td><td>15</td><td>15</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
b)	Das Luftvolumen nimmt beim Einatmen zu und beim Ausatmen ab. Es kann jedoch nicht negativ werden, also kommt nur Kurve 1 in Frage. Die Kurve 2 beschreibt dazu die lokale Änderung, ist also die Ableitung der Kurve 1. Das Intervall [0;5] beschreibt eine vollständige Periode. An der Stelle $t = 0$ ist nach Vereinbarung das Luftvolumen 0, also minimal, daher wegen der Periodizität auch bei t = 5. An der Stelle $t = 2{,}5$ hat f eine Nullstelle (von plus nach minus), daher hat F dort ein Maximum. Es ist $2 \cdot \int_0^{2{,}5} \sin(\tfrac{2}{5}\pi \cdot t)dt = \frac{5}{\pi} \cdot (1 - \cos \pi) = \frac{5}{\pi} \cdot 2 = \frac{10}{\pi} \approx 3{,}2.$ Das maximale Luftvolumen tritt im Modell nach 2,5 Sekunden ein und beträgt etwa 3,2 Liter. Das zum Zeitintervall [0 ; 2,5] gehörende Kurvenstück von f ist symmetrisch zu $t = 1{,}25$. Die Lunge ist also 1,25 Sekunden nach Beginn des Einatmens halb gefüllt, was analog auch für $t = 3{,}75$ oder 1,25 Sekunden vor dem Ende des Ausatmens gilt.	15	15	
c)	Die Berechnung des mittleren Luftvolumens kann mittels Integrieren gelöst werden: $\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{\pi} \int_0^5 \left(1 - \cos(\frac{2\pi}{5} \cdot x)\right) dx = \frac{1}{\pi} \cdot 5 - \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^5 \cos(\frac{2\pi}{5} \cdot x) dx = \frac{5}{\pi} - 0 = \frac{5}{\pi} \approx 1{,}6$. Das mittlere Luftvolumen beträgt also etwa 1,6 Liter.		15	
d)	<u>Beschreiben der Änderungen:</u> Kurve 1 verschiebt sich um 0,8 in y-Richtung und wird so gestaucht, dass das maximale Luftvolumen beim Wert $\frac{10}{\pi}$ aus Teilaufgabe b) bleibt. Kurve 2 wird ebenfalls gestaucht, weil der Bereich der Änderung verringert wurde. <u>Ermitteln des neuen Terms zu Kurve 1:</u> (1) Verschieben: Bisheriger Term + 0,8 = $\frac{5}{\pi} \cdot \left(1 - \cos(\frac{2\pi}{5} \cdot t)\right) + 0{,}8$ (2) Stauchen, sodass Maximum bleibt. $a \cdot \frac{5}{\pi} \cdot \left(1 - \cos(\frac{2\pi}{5} \cdot \frac{5}{2})\right) + 0{,}8 = \frac{10}{\pi} \Leftrightarrow a \cdot \frac{10}{\pi} = \frac{10}{\pi} - \frac{4}{5} \Leftrightarrow a = 1 - \frac{2}{25}\pi$. Die geänderte Funktionsgleichung lautet daher $F_2(t) = \left(\frac{5}{\pi} - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 - \cos(\frac{2\pi}{5} \cdot t)\right) + 0{,}8$. <u>Ermitteln des neuen Terms zu Kurve 2:</u> Mit der Ableitung von F_2 erhält man $f_2(t) = (2 - \frac{4}{25}\pi) \cdot \sin(\frac{2}{5}\pi t)$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

Grafische Darstellung:



</td><td>5</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>65</td><td>15</td></tr>
</table>

Aufgabe 16 ICE-Trasse

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Die Verbindungstrasse muss die Anschlusspunkte A und B mit der gleichen Steigung wie die Geraden und ohne Krümmungsruck verbinden.

Daraus ergeben sich folgende Bedingungen:

1. $f(-1) = f(1) = 0$
2. $f'(-1) = \tan 63{,}435 = 2, \quad f'(1) = -2$
3. $f''(-1) = f''(1) = 0$

</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Ein Kreisbogen kann die Bedingung 3.) nicht erfüllen, da die 2. Ableitung konstant ungleich Null ist, und scheidet daher aus.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

<u>1. Ganzrationale Funktion:</u>

Da die Verbindungstrasse achsensymmetrisch ist, hat die Funktion nur gerade Exponenten. Eine quadratische Funktion kann die dritte Bedingung nicht erfüllen (keine Wendepunkte). Die Funktion hat daher die Form

$$f_1(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$$

$$f_1(1) = 0: \quad 0 = a_4 + a_2 + a_0$$

$$f_1'(1) = -2: \quad -2 = 4a_4 + 2a_2$$

$$f_1''(1) = 0: \quad 0 = 12a_4 + 2a_2\,.$$

Durch Lösen des LGS ergeben sich die Koeffizienten:

$$a_4 = \frac{1}{4}\,,\ a_2 = -\frac{3}{2}\,,\ a_0 = \frac{5}{4}$$

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$f_1(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{4}$. <u>3. Winkelfunktion:</u> $f(x)= a\cdot\cos(b\cdot x)+c$ Da die Kosinusfunktion in ihren Wendepunkten den Funktionswert $f(x) = 0$ hat, ist $c = 0$. Die Nullstellen der Funktion liegen bei $x = -1$ und $x = 1$, daher ist $b=\frac{\pi}{2}$. $f'(x)=-\frac{\pi}{2}a\cdot\sin(\frac{\pi}{2}x)$ $f'(1)=-\frac{\pi}{2}a=-2 \quad\Rightarrow\quad a=\frac{4}{\pi}$ $f(x)=\frac{4}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}x)$ <u>4. Exponentialfunktion:</u> $f(x)=a\cdot e^{-b\cdot x^2}+c$ $f(1) = 0$: $\quad 0=a\cdot e^{-b}+c$ $f'(1) = -2$: $\quad -2=-2abe^{-b}$ $f'(x)=a(-2bx)\cdot e^{-bx^2}$ $f''(x)=e^{-bx^2}(-2ab+4ab^2x^2)$ $f''(1)=e^{-b}(-2ab+4ab^2)=0 \quad\Rightarrow\quad 2ab=4ab^2$ $\Rightarrow\quad b=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad a=2\sqrt{e} \quad\Rightarrow\quad c=-2$ $f(x)=2\sqrt{e}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2}-2$		15	15
d)	Die Krümmungsradien an der Stelle $x = 0$ betragen: 1. Ganzrationale Funktion: $\quad r=\frac{1}{3}$ 2. Winkelfunktion: $\quad r=\frac{1}{\pi}=0{,}318$ 3. Exponentialfunktion: $\quad r=\frac{1}{2\sqrt{e}}=0{,}303$ Da die ganzrationale Funktion an der Stelle x = 0 den größten Radius aufweist, kann diese Variante mit der größten Geschwindigkeit durchfahren werden und sollte aus dieser Sicht gewählt werden.		30	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
e)	$A=\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\cdot\left[\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{4}x+C\right]_0^1 = 1{,}6$ Die Fläche beträgt 1,6 km².	10		
	Insgesamt 100 BWE	10	65	25

Aufgabe 17 Preispolitik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Die „einfachste" Funktion, die den vorgegebenen Kostenverlauf mit einem Wendepunkt erfüllt, wäre eine ganzrationale Funktion 3. Grades: $K_A(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $K_A'(x)=3ax^2+2bx+c$ $K_A''(x)=6ax+2b$ $K_A(0)=20$: I. $d = 20$ $K_A(3)=56$: II. $27a+9b+3c+d = 56$ $K_A''(3)=0$: III. $18a+2b = 0$ $K_A(1)=42$: IV. $a+b+c+d = 42$ Nach Lösen des LGS erhält man: $a=1;\ b=-9;\ c=30;\ d=20$. Also gilt: $K_A:\ K_A(x)=x^3-9x^2+30x+20$ $D_{ÖK}=[0;9]$ (Funktionsgraph von K_A siehe Abbildung)	10	10	
b)	Der Gewinn errechnet sich aus der Differenz der Erlöse und der Kosten. $G_A(x)=E(x)-K_A(x)$ $E(x)=p(x)\cdot x=26x$ $\Rightarrow G_A: G_A(x)=26x-\left(x^3-9x^2+30x+20\right)=-x^3+9x^2-4x-20$ <u>Gewinnschwelle und Gewinngrenze:</u> $Bed: G_A(x)=0$ $-x^3+9x^2-4x-20=0 \quad /\cdot(-1)$ $x^3-9x^2+4x+20=0$ (durch Probieren $x_1=2$)			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

Horner Schema:

	1	–9	4	20	
	0	2	–14	–20	
$x = 2$	1	–7	–10	0	$\Rightarrow x_1 = 2$

$$x^2 - 7x - 10 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{89}{4}}$$

$$x_2 \approx 8{,}22 \;; \qquad x_3 \approx -1{,}22 \notin D_{Ök}$$

Die Gewinnschwelle liegt bei 2 ME und die Gewinngrenze bei rund 8,22 ME.

<u>oder</u>: $GS(2|0)$; $GG(8{,}22|0)$

<u>Gewinnmaximum:</u>

$$Bed: \quad G'(x) = 0 \;\; und \;\; G''(x) \neq 0$$

$$G_A'(x) = -3x^2 + 18x - 4$$

$$G_A''(x) = -6x + 18$$

$$\Rightarrow \qquad -3x^2 + 18x - 4 = 0$$

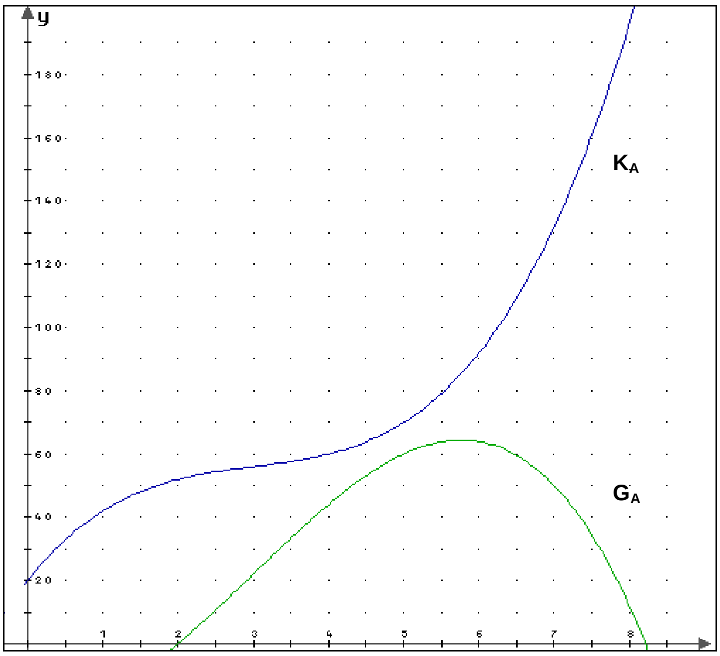
$$x^2 - 6x + \tfrac{4}{3} = 0$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{\tfrac{23}{3}}$$

$$x_1 \approx 5{,}77 \qquad G_A''(5{,}57) < 0 \Rightarrow Max. \qquad G_A(5{,}77) \approx 64{,}46$$

[$x_2 \approx 0{,}23$ nicht relevant, da der Wert kleiner als die Gewinnschwelle ist.]

Die gewinnmaximale Absatzmenge beträgt 5,77 ME und erbringt einen maximalen Gewinn von 64,46 GE.



I	II	III
10	20	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
c)	Die Kostenfunktion ist die Stammfunktion von K_B‘, die durch den Punkt $P(0\|30)$ verläuft. Der Nachweis kann alternativ über das Integrieren oder das Differenzieren erfolgen: Integrieren: $K_B(x)=\int\left(\frac{1}{x+e}+\frac{1}{8}x^3\right)dx+c \Rightarrow K_B(x)=\ln(x+e)+\frac{1}{32}x^4+c$ $K_B(0)=30 \Leftrightarrow \ln(e)+c=30 \Leftrightarrow c=29$ $K_B(x)=\ln(x+e)+\frac{1}{32}x^4+29$ Differenzieren: $K_B{}'(x)=\frac{1}{x+e}+\frac{1}{8}x^3 \quad \wedge \quad \textit{Nachweis von } K_B(0)=30$		5	
d)	Bed.: $K_B{}'(x)=k_b(x) \Leftrightarrow k_b{}'(x)=0$ $K_B{}'(x)=\frac{1}{x+e}+\frac{1}{8}x^3$ $k_B(x)=\frac{K_B(x)}{x}=\frac{\ln(x+e)+\frac{1}{32}x^4+29}{x}=\frac{\ln(x+e)}{x}+\frac{1}{32}x^3+\frac{29}{x}$ $k_B{}'(x)=\frac{\frac{1}{x+e}\cdot x-\ln(x+e)}{x^2}+\frac{3}{32}x^2-\frac{29}{x^2}$ $=\frac{\frac{1}{x+e}}{x}-\frac{\ln(x+e)}{x^2}+\frac{3}{32}x^2-\frac{29}{x^2}$ (1) $K_B{}'(x)=k_B(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x+e}+\frac{1}{8}x^3=\frac{\ln(x+e)}{x}+\frac{1}{32}x^3+\frac{29}{x}$ $\frac{1}{x+e}+\frac{1}{8}x^3-\frac{\ln(x+e)}{x}-\frac{1}{32}x^3-\frac{29}{x}=0$ $\frac{1}{x+e}-\frac{\ln(x+e)}{x}+\frac{3}{32}x^3-\frac{29}{x}=0$ (2) $k_B{}'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x+e}}{x}-\frac{\ln(x+e)}{x^2}+\frac{3}{32}x^2-\frac{29}{x^2}=0 \quad \vert \cdot(x)$ $\frac{1}{x+e}-\frac{\ln(x+e)}{x}+\frac{3}{32}x^3-\frac{29}{x}=0$ Die Bestimmungsgleichungen (1) und (2) stimmen überein; folglich werden sie auch von demselben x-Wert erfüllt. Damit ist gezeigt, dass sich die Graphen der Grenzkosten und der Stückkosten im Minimum der Stückkosten schneiden.		5	15

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Bed.: $G_B(x) = 0$ $G_B(x) = E(x) - K_B(x)$ $G_B(x) = 26x - \ln(x+e) - \frac{1}{32}x^4 - 29$ $26x - \ln(x+e) - \frac{1}{32}x^4 - 29 = 0$ (keine ganzzahlige Lösung!) $\left.\begin{array}{l} G_B(1) \approx -4{,}34 \\ G_B(2) \approx 20{,}95 \end{array}\right\} x_0 = 1{,}1$ Newton-Verfahren: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ $f(x) = G_B(x) = 26x - \ln(x+e) - \frac{1}{32}x^4 - 29$ $f'(x) = G_B'(x) = 26 - \frac{1}{x+e} - \frac{1}{8}x^3$ $x_1 = 1{,}1 - \frac{f(1{,}1)}{f'(1{,}1)} \approx 1{,}1 - \frac{-1{,}7855537}{25{,}571727} \approx 1{,}1698253$ $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 1{,}1698253 - \frac{-0{,}0009886}{25{,}542693} \approx 1{,}169864$ $\Rightarrow GS(1{,}170 \vert 0)$		20	
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 18 Produktionsumstellung

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$K(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $K'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ $K''(x) = 6a_3x + 2a_2$ $K(0) = 12 \Rightarrow a_0 = 12$ $K(2) = 28 \Rightarrow 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 28$ $K(3) = 30 \Rightarrow 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 30$ (a_0 einsetzen) $K''(3) = 0 \Rightarrow 18a_3 + 2a_2 = 0$ $\left[\begin{array}{ccc\|c} 8 & 4 & 2 & 16 \\ 27 & 9 & 3 & 18 \\ 18 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc\|c} 8 & 4 & 2 & 16 \\ 30 & 6 & 0 & -12 \\ 18 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc\|c} 8 & 4 & 2 & 16 \\ 48 & 8 & 0 & -12 \\ -24 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right]$			

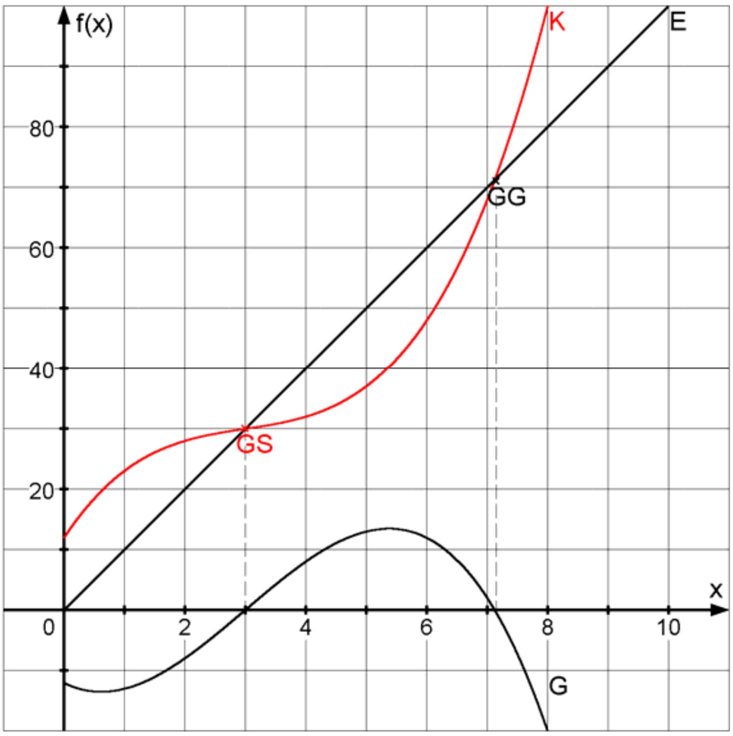
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Durch Einsetzen ergibt sich: $a_3 = 0{,}5$; $a_2 = -4{,}5$; $a_1 = 15$. Damit gilt: $K(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 15x + 12$ Funktionsgraph der Kostenfunktion K: siehe Aufgabenteil c).	5	15	
b)	<u>Wirtschaftliche Bedeutung des Ordinatenschnittpunktes $(0 \mid 12)$:</u> Die fixen Kosten der Produktion betragen 12 GE. Das sind Kosten, die unabhängig von der Produktion entstehen und die man Fixkosten nennt. <u>Wirtschaftliche Bedeutung des Wendepunktes von K:</u> Im Wendepunkt der Kostenkurve sind die Grenzkosten am geringsten, d.h. die Zunahme der Kosten bei Ausweitung der Produktionsmenge ist am geringsten.		10	
c)	<u>Preisabsatzfunktion p:</u> $p(x) = 10$ <u>Erlösfunktion E:</u> $E(x) = p(x) \cdot x = 10x$ <u>Gewinnfunktion G:</u> $G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}5x^3 + 4{,}5x^2 - 5x - 12$ <u>Gewinnschwelle und Gewinngrenze:</u> Grafische Lösung siehe unten $-0{,}5x^3 + 4{,}5x^2 - 5x - 12 = 0$ $x^3 - 9x^2 + 10x + 24 = 0$ Horner-Schema: $x_1 = 3$. $\begin{array}{rrrr} 1 & -9 & 10 & 24 \\ \hline 0 & 3 & -18 & -24 \\ 1 & -6 & -8 & 0 \end{array}$ $x^3 - 9x^2 + 10x + 24 = (x-3) \cdot \left(x^2 - 6x - 8\right)$ $x^2 - 6x - 8 = 0$ $x_2 = 3 + \sqrt{17} \approx 7{,}12$ $x_3 = 3 - \sqrt{17} \approx -1{,}12 \notin D$ Gewinnschwelle: $x_1 = 3$ Gewinngrenze: $x_2 \approx 7{,}12$ <u>Gewinnmaximum:</u> $G'(x) = 0 \wedge G''(x) < 0$ $G'(x) = -1{,}5x^2 + 9x - 5$ $G''(x) = -3x + 9$ $-1{,}5x^2 + 9x - 5 = 0$ $x^2 - 6x + \frac{10}{3} = 0$ $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - \frac{10}{3}}$ $x_1 \approx 5{,}38$ $x_2 \approx 0{,}62$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III

$$G''(5{,}38) = -7{,}14 < 0$$
$$G''(0{,}63) = 7{,}14 > 0$$
$$G(5{,}38) = 13{,}49$$

Die gewinnmaximale Menge beträgt 5,38 ME, das Gewinnmaximum 13,49 GE.

Grafische Darstellungen:



I	II	III
10	25	5

d) Kostenfunktion K:

$K(x) = 5x + 20$

Erlösfunktion E_{neu}:

$E_{neu}(x) = p(x) \cdot x = 30x \cdot e^{-\frac{x}{4}}$

Verhalten bei sehr hohen Ausbringungsmengen:

$\lim\limits_{x \to \infty} (30x \cdot e^{-\frac{x}{4}}) = 0$.

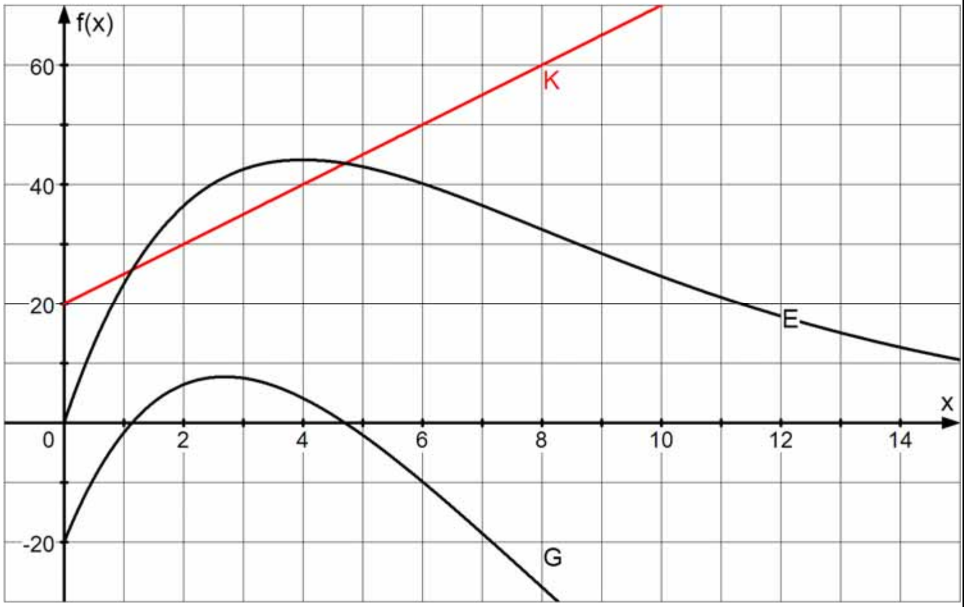
Zähler- und Nennerterm gehen zwar beide mit wachsendem x gegen 0, der Nennerterm aber deutlich schneller, d.h. der Erlös geht bei hohen Ausbringungsmengen gegen 0.

oder: Nachweis über L'Hospital

$$\lim_{x \to \infty}(30x \cdot e^{-\frac{x}{4}}) = \lim_{x \to \infty} \frac{30x}{e^{\frac{x}{4}}} \overset{H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{30}{\frac{1}{4} e^{\frac{x}{4}}} = 0$$

Der Erlös strebt gegen Null.

I	II	III
5		5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Grafische Ermittlung der Gewinnfunktion:  		10	
f)	<u>Gewinnmaximum:</u> Bedingung: $G'_{neu}(x)=0 \quad \wedge \quad G''_{neu}(x)<0$ $G_{neu}(x)=30x\cdot e^{-\frac{x}{4}}-5x-20$ $G'_{neu}(x)=(30-7{,}5x)\cdot e^{-\frac{x}{4}}-5$ $G''_{neu}(x)=(\frac{15}{8}x-15)\cdot e^{-\frac{x}{4}}$ Das Newtonsche Näherungsverfahren liefert: $x\approx 2{,}7$ $G''(2{,}7)=-5{,}06<0$, Max. $G(2{,}7)\approx 7{,}74$ Die gewinnmaximale Absatzmenge bei dem neuen Produkt liegt bei 2,7 ME und der maximale Gewinn beträgt 7,74 GE. Die Umstellung der Produktion ist unter dem Gesichtspunkt der Gewinnmaximierung nicht sinnvoll, da mit dem neuen Produkt nur ein geringerer maximaler Gewinn erzielt werden kann. Alternativ könnte bei diesem Aufgabenteil die gewinnmaximale Absatzmenge durch geschicktes Einsetzen in die neue Gewinnfunktion gefunden werden. Die grafische Lösung liefert dafür einen guten Näherungswert.			10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20