

## Firmenlogo-Aufgabe    Abiturprüfung GK Bayern 2005

1. Im Eingangsbereich eines Unternehmens soll das Firmenlogo im Boden eingelassen werden. Abb.1 zeigt den Entwurf des Architekten nach Wahl eines geeigneten Koordinatensystems:

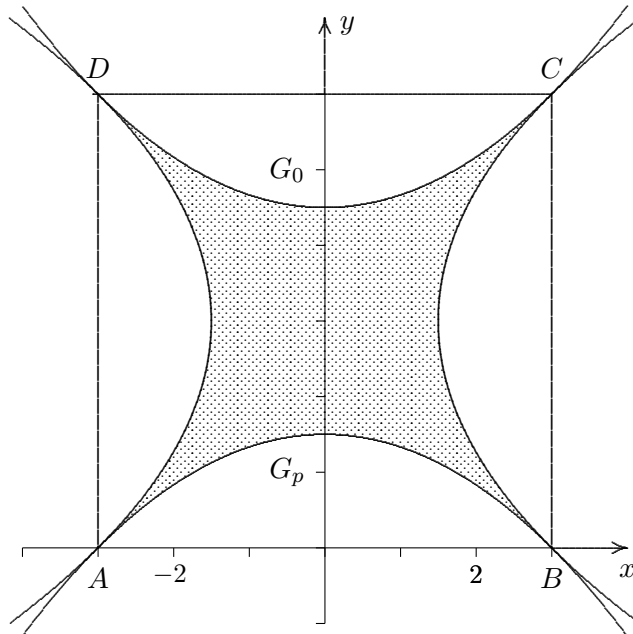


Abb.1

Im Quadrat  $ABCD$  schneiden vier kongruente parabelförmige Bögen die in Abb.1 schraffierte Figur aus. Die untere Parabel  $G_p$  ist der Graph der quadratischen Funktion  $p$  mit  $D_p = \mathbb{R}$ .  $G_p$  schneidet die  $x$ -Achse in den Punkten  $A(-3 | 0)$  und  $B(3 | 0)$ . Die Diagonalen des Quadrats sind zugleich Tangenten an die Parabeln in den Punkten  $A$  und  $C$  bzw.  $B$  und  $D$ .

- a) Geben Sie die Werte der Ableitung von  $p$  in den beiden Nullstellen an und bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion  $p$ .  
[ zur Kontrolle:  $p(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 1,5$  ]
  - b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der schraffierten Figur, wenn die Seitenlänge des Quadrats  $ABCD$  in der Eingangshalle  $6\text{ m}$  beträgt.
2. Die Graphen der linken, rechten und oberen Parabel in Abb.1 gehen aus  $G_p$  durch Spiegelung und Verschiebung hervor. Daher können die zugehörigen Funktionsterme aus dem Funktionsterm von  $p$  entwickelt werden.
- a) Erklären Sie zunächst allgemein, wie die Graphen zu den Zuordnungsvorschriften  $x \rightarrow p(x) + a$  bzw.  $x \rightarrow p(x + a)$  mit  $a, b \in \mathbb{R}^+$  durch Verschiebung aus  $G_p$  entstehen.
  - b) Begründen Sie ohne Rechnung, dass zum Graphen  $G_0$  der oberen Parabel in Abb.1 die Zuordnungsvorschrift  $x \rightarrow -p(x) + 6$  gehört.
  - c)  $p$  ist in  $[0; +\infty[$  umkehrbar. Ergänzen Sie den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion  $p^{-1}$  in Abb.1. Kennzeichnen Sie in Abb.1 den Teil der Umrandung der schraffierten Figur, zu dem die Zuordnungsvorschrift  $x \rightarrow p^{-1}(x + 3) + 3$  gehört.

(Fortsetzung nächste Seite)

3. Betrachtet wird nun die Funktion  $f(x) = \frac{p(x)}{x^2} = -\frac{1}{6} + \frac{1,5}{x^2}$  mit  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (mit  $p$  aus Aufgabe 1). Der Graph  $G_f$  der Funktion  $f$  ist zusammen mit  $G_p$  in Abb. 2 dargestellt. Gemäß der Definition von  $f$  stimmen die Nullstellen von  $f$  mit den Nullstellen von  $p$  überein.

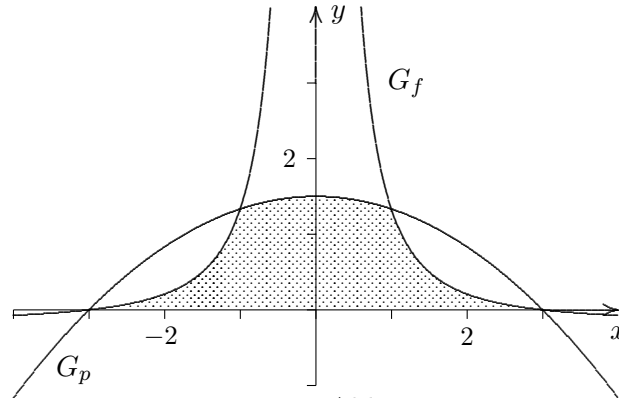


Abb. 2

- Weisen Sie nach, dass  $G_f$  achsensymmetrisch ist und untersuchen Sie das Verhalten von  $G_f$  für  $x \rightarrow +\infty$ .
- Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten an  $G_f$  in den beiden Nullstellen.
- Bestätigen Sie, dass  $S\left(1 \mid \frac{4}{3}\right)$  ein weiterer Schnittpunkt von  $G_f$  und  $G_p$  ist. Berechnen Sie den Flächeninhalt des in Abb. 2 schraffierten Flächenstücks, das von  $G_f$ ,  $G_p$  und der  $x$ -Achse begrenzt wird.

1. Im Eingangsbereich eines Unternehmens soll das Firmenlogo im Boden eingelassen werden. Abb. 1 zeigt den Entwurf des Architekten nach Wahl eines geeigneten Koordinatensystems:

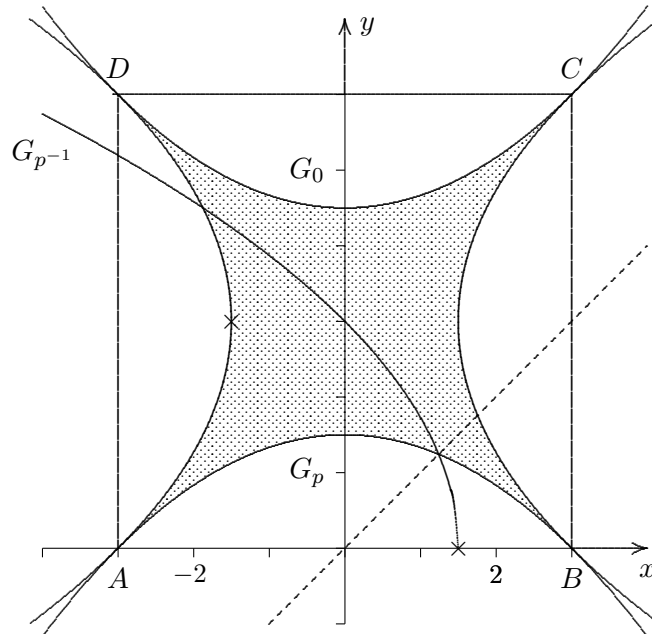


Abb. 1

Im Quadrat  $ABCD$  schneiden vier kongruente parabolartige Bögen die in Abb. 1 schraffierte Figur aus. Die untere Parabel  $G_p$  ist der Graph der quadratischen Funktion  $p$  mit  $D_p = \mathbb{R}$ .  $G_p$  schneidet die  $x$ -Achse in den Punkten  $A(-3 | 0)$  und  $B(3 | 0)$ . Die Diagonalen des Quadrats sind zugleich Tangenten an die Parabeln in den Punkten  $A$  und  $C$  bzw.  $B$  und  $D$ .

- a) Geben Sie die Werte der Ableitung von  $p$  in den beiden Nullstellen an und bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion  $p$ .

$$p(x) = ax^2 + b \quad (\text{Graph achsensymmetrisch}), \quad p(3) = 0, \quad p'(-3) = 1 \implies p(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 1,5$$

- b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der schraffierten Figur, wenn die Seitenlänge des Quadrats  $ABCD$  in der Eingangshalle  $6\text{ m}$  beträgt.

$$36 - 8 \cdot \int_0^3 p(x) dx = 12$$

2. Die Graphen der linken, rechten und oberen Parabel in Abb. 1 gehen aus  $G_p$  durch Spiegelung und Verschiebung hervor. Daher können die zugehörigen Funktionsterme aus dem Funktionsterm von  $p$  entwickelt werden.

- a) Erklären Sie zunächst allgemein, wie die Graphen zu den Zuordnungsvorschriften  $x \rightarrow p(x) + a$  bzw.  $x \rightarrow p(x + a)$  mit  $a, b \in \mathbb{R}^+$  durch Verschiebung aus  $G_p$  entstehen.

- b) Begründen Sie ohne Rechnung, dass zum Graphen  $G_0$  der oberen Parabel in Abb. 1 die Zuordnungsvorschrift  $x \rightarrow -p(x) + 6$  gehört.

- c)  $p$  ist in  $[0; +\infty[$  umkehrbar. Ergänzen Sie den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion  $p^{-1}$  in Abb. 1. Kennzeichnen Sie in Abb. 1 den Teil der Umrandung der schraffierten Figur, zu dem die Zuordnungsvorschrift  $x \rightarrow p^{-1}(x + 3) + 3$  gehört.

Der Graph von  $p^{-1}$  wird um 3 nach links und um 3 nach oben verschoben.

3. Betrachtet wird nun die Funktion  $f(x) = \frac{p(x)}{x^2} = -\frac{1}{6} + \frac{1,5}{x^2}$  mit  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (mit  $p$  aus Aufgabe 1). Der Graph  $G_f$  der Funktion  $f$  ist zusammen mit  $G_p$  in Abb. 2 dargestellt. Gemäß der Definition von  $f$  stimmen die Nullstellen von  $f$  mit den Nullstellen von  $p$  überein.

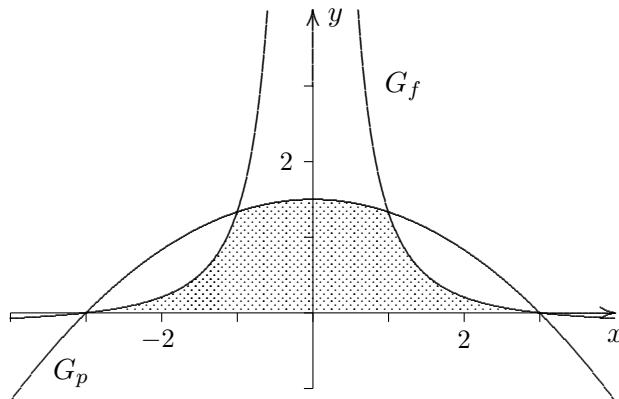


Abb. 2

- a) Weisen Sie nach, dass  $G_f$  achsensymmetrisch ist und untersuchen Sie das Verhalten von  $G_f$  für  $x \rightarrow +\infty$ .

$$f(x) = f(-x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{6} + \frac{1,5}{x^2} \right) = -\frac{1}{6}$$

- b) Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten an  $G_f$  in den beiden Nullstellen.

$$\text{an der Stelle } x = -3: y = \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}$$

$$\text{an der Stelle } x = 3: y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{3}$$

- c) Bestätigen Sie, dass  $S\left(1 \mid \frac{4}{3}\right)$  ein weiterer Schnittpunkt von  $G_f$  und  $G_p$  ist. Berechnen Sie den Flächeninhalt des in Abb. 2 schraffierten Flächenstücks, das von  $G_f$ ,  $G_p$  und der  $x$ -Achse begrenzt wird.

$$f(x) = p(x) \implies x^2 = 1$$

$$2 \cdot \left( \int_0^1 p(x) dx + \underbrace{\int_1^3 f(x) dx}_{\frac{2}{3}} \right) = \frac{38}{9}$$