

# Tangentialebene und Gradient

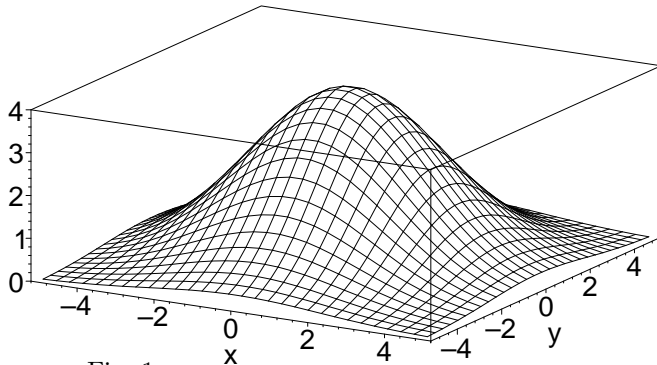


Fig. 1

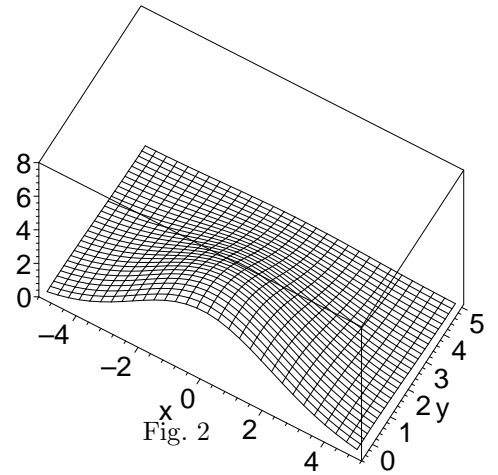


Fig. 2

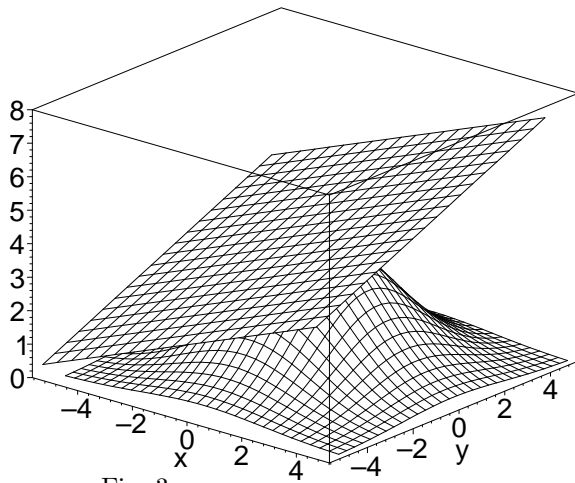


Fig. 3

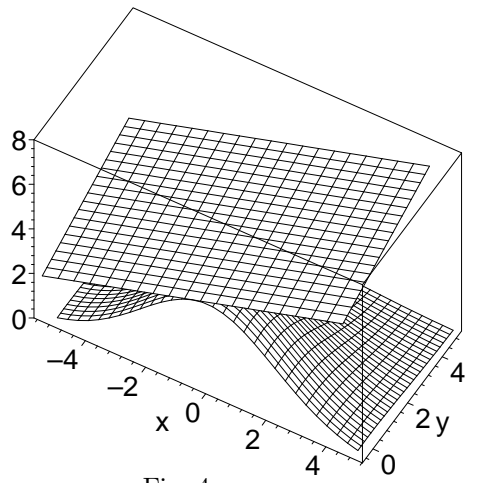


Fig. 4

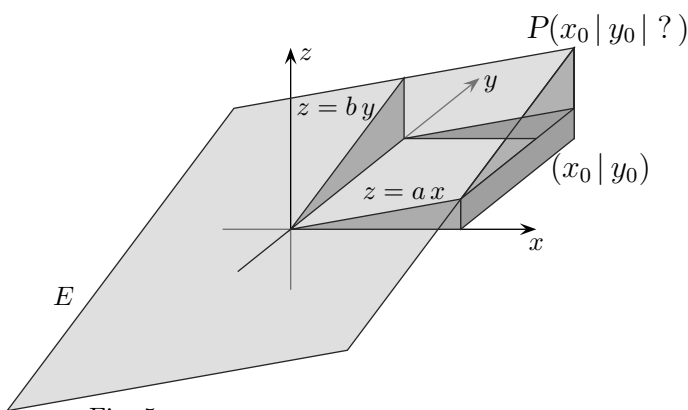


Fig. 5

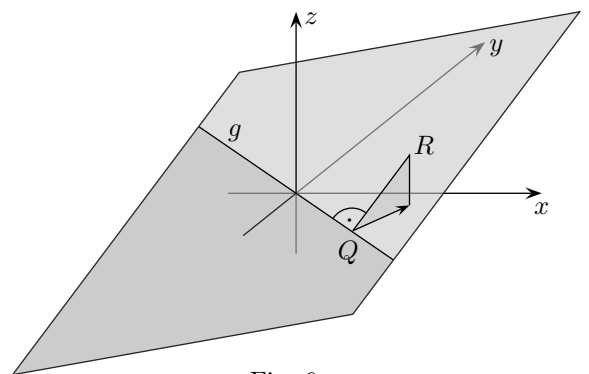


Fig. 6

1. a) Es sind  $a$  und  $b$  gegeben, wie lautet die Gleichung der Ebene  $E$ ? (Fig. 5)
- b) Wie lautet die Gleichung der zu  $E$  parallelen Ebene, die durch einen bestimmten Punkt  $P(x_1 | y_1 | z_1)$  verlauft?
- c) Welche Richtung schlagt eine Kugel ein, die in einem Punkt  $R$  losgelassen wird? (Fig. 6)

# Tangentialebene und Gradient

2. a) Gesucht ist für die Funktion  $f(x, y)$  die Gleichung der Tangentialebene im Punkt  $P(x_1 | y_1 | ?)$ .
- b) Welche Richtung schlägt eine Kugel ein, die in einem Punkt  $P(x_1 | y_1 | z_1)$  auf der Fläche einer Funktion  $f(x, y)$  losgelassen wird?
- c) Wie kann der Anstiegswinkel  $\alpha$  für beliebige Richtungen in  $P(x_1 | y_1 | z_1)$  berechnet werden?
- d) Wie lautet für  $f(x, y) = 4e^{-0,1(x^2+y^2)}$  die Gleichung der Tangentialebene im Punkt  $P(-0,5 | -0,5 | ?)$  und wie groß ist der maximale Anstiegswinkel in  $P$ ?

# Tangentialebene und Gradient

Lösungen:

1. a)  $P$  hat die  $z$ -Koordinate  $z_0 = ax_0 + by_0$ , daher gilt allgemein:  $z = ax + by$
- b) Die Verschiebung der Ebene  $E$  nach  $N(x_1 | y_1 | 0)$  ergibt  $z = a(x - x_1) + b(y - y_1)$ , die anschließende Verschiebung nach  $P(x_1 | y_1 | z_1)$  ergibt dann:  $z = a(x - x_1) + b(y - y_1) + z_1$
- c) Zunächst wird die Gleichung der Schnittgeraden  $g$  von  $E$  mit der  $xy$ -Ebene bestimmt:  
Bedingung:  $z = 0 \implies y = -\frac{a}{b}x$ .

Die eingeschlagene Richtung verläuft senkrecht zu  $g$ , also  $m_1 = \frac{b}{a}$  (beachte:  $m_1 \cdot m_2 = -1$ ) oder als Vektor:  $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  (stärkster Anstieg), stärkster Abstieg in Richtung  $-\vec{u}$ .

2. a)  $a = f_x$  und  $b = f_y$  mit partiellen Ableitungen an der Stelle  $(x_1 | y_1)$ , (siehe Fig. 4 und Fig. 5) daher  $z = f_x(x - x_1) + f_y(y - y_1) + z_1$ , mit  $z_1 = f(x_1 | y_1)$
- b) Nach 1. c) erhalten wir den stärksten Anstieg für  $\vec{u} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$  und daher den stärksten Abstieg für  $-\vec{u}$ . Der Vektor  $\vec{u}$  heißt Gradient.
- c) Man betrachte die Ursprungsebene  $z = f_x x + f_y y$ , für die Funktion  $f(x, y)$  gilt:  $\Delta z = f_x \Delta x + f_y \Delta y$ .

Hieraus ist ersichtlich, wie für beliebige Richtungen  $\vec{u} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$  die Änderungsrate für die Tangentialebene exakt und für die Funktion näherungsweise bestimmt werden kann.

Für den Anstiegswinkel - er liegt in der Ebene, die senkrecht auf der  $xy$ -Ebene steht und in der die Richtungsgerade verläuft - gilt:  $\alpha = \arctan \frac{\Delta z}{|\vec{u}|}$

Die Rechnung vereinfacht sich, wenn für  $\vec{u}$  ein Einheitsvektor verwendet wird, z.B.  $\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$

- d)  $z = 0,380(x + 0,5) + 0,380(y + 0,5) + 3,80$

Aus  $\Delta z = f_x \Delta x + f_y \Delta y$  folgt für die Richtung des stärksten Anstiegs  $\vec{u} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$   $\Delta z = f_x^2 + f_y^2$ ,

dann gilt:  $\alpha = \arctan \frac{\Delta z}{|\vec{u}|} = \arctan \frac{f_x^2 + f_y^2}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} = \arctan \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = 28,3^\circ$   
(=  $\arctan \left| \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \right|$ ).

Wir erhalten:

Die Steigung der Richtungsgeraden des stärksten Anstiegs ist der Betrag des Gradienten.