

# Vorzeichenwechsel

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = (6 - x)\sqrt{x}$

Um das Extremum zu bestimmen, ermitteln wir die

1. Ableitung:  $f'(x) = \frac{6 - 3x}{2\sqrt{x}}$

An der Stelle  $x_0 = 2$  wird  $f'(x_0) = 0$ .

Der Nachweis des Extremums kann auch ohne die

2. Ableitung erbracht werden. Wir erinnern uns:

Wäre  $f''(x_0) < 0$ , so wäre  $f'$  in einer Umgebung von  $x_0$  fallend, der Graph von  $f$  beschriebe also eine Rechtskurve, an der Stelle  $x_0$  läge daher ein Maximum vor. Entscheidend für das Maximum ist, neben  $f'(x_0) = 0$ , dass  $f'$  in einer Umgebung von  $x_0$  fällt. Dies kann auch dadurch begründet werden, dass in einer Umgebung von  $x_0$  für kleinere Werte von  $x_0$   $f'(x) > 0$  und für größere Werte  $f'(x) < 0$  nachgewiesen wird, dass also ein Vorzeichenwechsel von  $f'$  an der Stelle  $x_0$  vorliegt:

$$f'(x_0 - h) > 0$$

$$f'(x_0 + h) < 0$$

Dies ist für die obige Funktion offensichtlich,

da  $6 - 3x_0 = 0$  ist. Wird für  $x_0$  ein kleinerer Wert eingesetzt, so wird die linke Seite positiv, wird ein größerer Wert eingesetzt, so wird die linke Seite negativ.

Wäre umgekehrt  $f'(x_0 - h) < 0$  und  $f'(x_0 + h) > 0$ , so läge ein Minimum vor.

Gegeben sei nun die Funktion  $f(x) = \frac{8}{x}(\sqrt{x} - \frac{1}{2})$

Zum Nachweis eines Wendepunktes bilden wir die

2. Ableitung:  $f''(x) = \frac{6\sqrt{x} - 8}{x^3}$

Für  $x_w = \frac{16}{9}$  ist  $f''(x_w) = 0$ . Statt  $f'''(x_w) \neq 0$  nachzu-

weisen, ist es zweckmäßiger zu zeigen, dass für  $f''$  an der Stelle  $x_w$  ein Vorzeichenwechsel vorliegt:

$$f''(x_w - h) < 0$$

$$f''(x_w + h) > 0$$

Dies ist jedoch offensichtlich, da  $6\sqrt{x_w} - 8 = 0$  ist.

