

Quantoren

Mathematiker bedienen sich einer bedeutungsschweren Symbolik, um komplexe mathematische Sachverhalte übersichtlich erfassen zu können (und nicht nur um Erstsemestler zu verschrecken). An die Bedeutung des Integralzeichens sei hier erinnert. Aber auch einfachere Formulierungen werden symbolisch erfasst:

Es gibt (mindestens) ein n_0 aus \mathbb{N} für das die Aussage $A(n)$ wahr ist, kann mit einem sogenannten Existenzquantor abgekürzt geschrieben werden:

$$\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} A(n) \quad \text{oder} \quad \exists_{n \in \mathbb{N}} A(n)$$

Für alle n aus \mathbb{N} ist die Aussage $A(n)$ wahr ist, wird mit dem Allquantor abgekürzt :

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} A(n)$$

Die Negation kann leicht gebildet werden:

$$\neg \left(\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} A(n) \right) \iff \forall_{n \in \mathbb{N}} \neg A(n) \quad \text{und} \quad \neg \left(\forall_{n \in \mathbb{N}} A(n) \right) \iff \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \neg A(n)$$

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert (strebt gegen) den Grenzwert a , geschrieben $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \rightarrow a$, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \geq n_0} \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{oder in anderer Schreibweise:}$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon)$$

In Worten:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl n_0 (ein Index), so dass für alle nachfolgenden Indizes gilt $|a_n - a| < \varepsilon$, d.h. die Glieder a_n unterscheiden sich für $n > n_0$ von a um weniger als ε .

Anschaulich: Bei der Berechnung der Folgenglieder einer konvergenten Folge (mit einem Computer) bleiben immer mehr Dezimalstellen stabil.

Die Negation, d.h. die Folge konvergiert nicht gegen den Wert a , lautet (\neg bedeutet: $\neg(\dots)$):

$$\neg \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \geq n_0} \quad |a_n - a| < \varepsilon \iff$$
$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \exists_{m \geq n} \quad |a_m - a| \geq \varepsilon_0$$

Das Negationszeichen wandert von links nach rechts und kehrt die Quantoren um.

Es sollen noch zwei weitere exakte Definitionen folgen:

Eine Funktion f heißt stetig an der Stelle x_0 , wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Hiermit gleichwertig ist (der Definitionsbereich sei \mathbb{R}):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Aufg. Was sagt das Folgende über eine Funktion f und eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus?

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \geq n_0} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{Gemeinsamer Definitionsbereich sei } \mathbb{R}.$$