Logistisches Wachstum   diskrete Lösung

Verhulst (1804-1849), belgischer Mathematiker

Eines Tages setzen 2 Schüler einer Schule mit $G = 500$ Schülern das Gerücht in die Welt, die Schule wird bald wegen Renovierungsarbeiten geschlossen. Wir wollen untersuchen, wie schnell sich das Gerücht in der Schülerschaft ausbreitet.
Es sei $f(x)$ die Anzahl der Schüler, die zum Zeitpunkt x das Gerücht kennen. Die Anzahl der, kombinatorisch betrachteten, möglichen Begegnungen der Wissenden und Unwissenden ist $f(x) \cdot (G - f(x))$.
Sinnvoll ist daher, den Zuwachs Δy proportional zur Zeit und proportional zur Anzahl der möglichen Begegnungen anzunehmen.

$$\begin{aligned}
\Delta y &= k \cdot (G - f(x)) \cdot f(x) \cdot \Delta x \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= k \cdot (G - f(x)) \cdot f(x) \\
f'(x) &= k \cdot (G - f(x)) \cdot f(x)
\end{aligned}$$

Wir suchen eine Lösung, für die $f(0) = 2$ und $k = 0{,}0022$ ist.

Aus dieser DGL sind einige Eigenschaften von f zu erkennen:

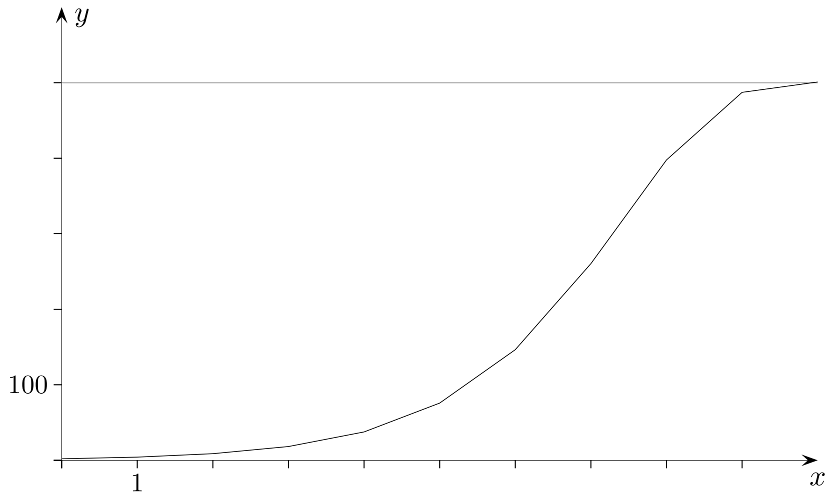
1. f ist monoton steigend,
2. die Funktionswerte von f nähern sich der Grenze 500, die nicht überschritten wird,
3. der Graph von f hat einen s-förmigen (sigmoiden) Verlauf,

Die Lösung der Differentialgleichung mit dem Anfangswert $f(0) = a$ lautet: $f(x) = \dfrac{G \cdot a}{a + (G - a) \cdot e^{-k\,Gx}}$

Eine diskrete Lösung mit $\Delta x = 1$ erhalten wir aus: $y_{n+1} = y_n + k \cdot (G - y_n) \cdot y_n$

d. h. $y_{n+1} = 2{,}1\, y_n - 0,0022\, y_n^2$, Anfangswert: $y_0 = 2$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Näherung	2	4,2	8,8	18,2	37,6	75,8	146,5	260,4	397,7	487,2	500,9



Die Iterationsgleichung

$y_{n+1} = y_n + k \cdot (G - y_n) \cdot y_n$

kann umgeformt werden zu:

$y_{n+1} = y_n + k^* \cdot \dfrac{G - y_n}{G} \cdot y_n$, $k^* = k \cdot G$

$\dfrac{G - y_n}{G}$ kann als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden (Unwissende bezogen auf die Gesamtzahl), mit der ein Wissender auf einen Unwissenden trifft. Der Anteil k^* der Wissenden, also insgesamt $k^* \cdot y_n$, trägt zur Verbreitung bei.

franz. logis   Unterkunft, Wohnraum