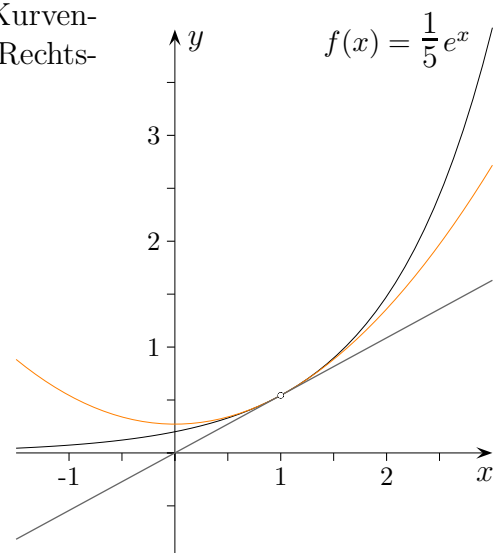


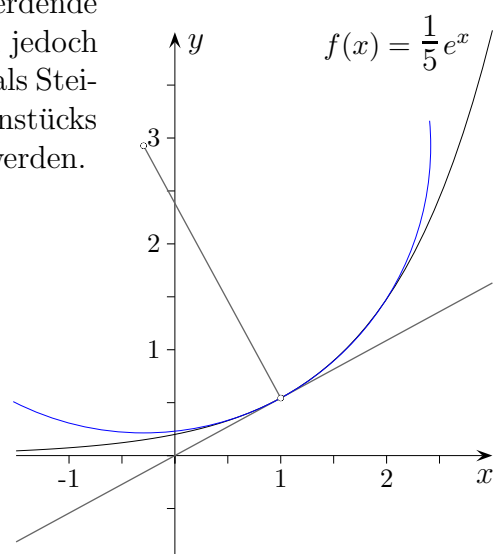
Krümmung

Die lineare Näherung von Funktionen durch Geraden (Tangenten) bildet die Grundlage der Differentialrechnung. Quadratische Näherungen durch Parabeln werden bei Reihenentwicklungen betrachtet. Durch die Approximation einer Funktion (genauer des Graphen) durch einen Kreis wird die Stärke der Krümmung in einem Kurvenpunkt erfasst und nicht nur die Art der Krümmung (Links-, Rechtskurve), wie es die 2. Ableitung ermöglicht.



Ein Kreis kann als Kurve mit konstanter Krümmung angesehen werden, da er mit einem gleichbleibenden Lenkradeinschlag befahren werden kann. Bei Trassierungsproblemen (Straßenbau) sind häufig stetige Krümmungsübergänge gefragt: Das Aneinanderfügen zweier Kreisbögen oder eines Kreisbogens und einer Geraden würde Autofahrer erschrecken.

Steigungsänderungen werden mit der 2. Ableitung erfasst. Jedoch können ihre Werte allein nicht die Stärke der Krümmung beschreiben: Für $f(x) = \frac{1}{5}e^x$ nimmt die Krümmung für größer werdende x -Werte offensichtlich ab, die Werte der 2. Ableitung nehmen jedoch zu. Beim Befahren der Kurve wird die Stärke der Krümmung als Steigungsänderung in Bezug auf die Länge des befahrenen Kurvenstücks empfunden. Die Bogenlänge muss daher mit berücksichtigt werden.



Krümmungsmaß

Die Krümmung von Kreisen wird umso kleiner, je mehr ihr Radius r zunimmt. Es erscheint daher sinnvoll, die Stärke der Krümmung mit $\kappa = \frac{1}{r}$ zu beschreiben, wobei der griechische Buchstabe κ an Krümmung erinnern soll. Diese Definition kann auf beliebige Kurven übertragen werden, wobei dann r der Radius des Krümmungskreises ist.

Der Quotient $\frac{1}{r}$ kann bei Kreisen anschaulich interpretiert werden.

Aufg.

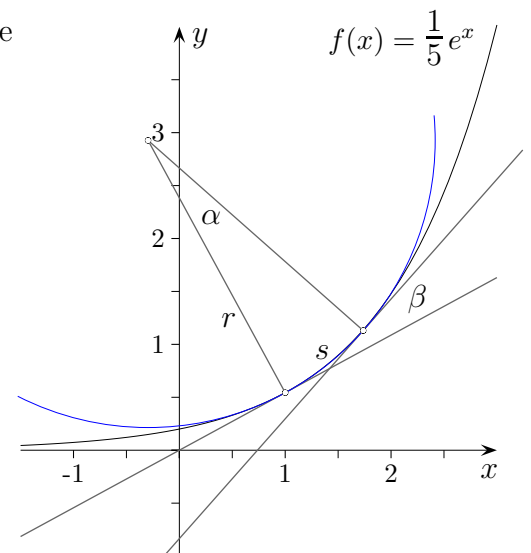
Zeige, dass gilt: $\alpha = \beta$.

Tipp: Die Schenkel der Winkel stehen paarweise senkrecht aufeinander.

Bewegt man sich längs des Kreisbogens s , so nimmt der Winkel, den die Kreistangente mit der x -Achse einschließt, um β zu.

Nun gilt: $s = r \cdot \alpha \iff \alpha = \frac{1}{r} s$ (α im Bogenmaß)

Die Zunahme des Winkels ist daher proportional zur Länge des Kreisbogens.



Auf der nächsten Seite wird der Radius des Krümmungskreises bestimmt, es gilt:

$$r = \left| \frac{(1 + (f'(x_0))^2)^{1,5}}{f''(x_0)} \right|$$

Für Extrema mit $f'(x_0) = 0$ ist die Formel besonders einfach. κ mit $f''(x_0) = 0$ schließt Geraden mit der Krümmung null ein.

$$\kappa = \frac{f''(x_0)}{(1 + (f'(x_0))^2)^{1,5}}$$

Krümmungskreis

Um den Mittelpunkt und den Radius eines Krümmungskreises zu bestimmen, betrachten wir einen Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ auf dem Graphen von f und suchen eine Funktion $k(x)$ des Halbkreises, der den Graphen von f bestmöglich approximiert. Hierbei reicht es wie sich zeigen wird aus, folgende Übereinstimmungen zu fordern:

$$k(x_0) = f(x_0), \quad k'(x_0) = f'(x_0), \quad k''(x_0) = f''(x_0) \quad (1)$$

Ist $M(x_m | y_m)$ der Mittelpunkt und r der Radius des gesuchten Kreises, so gilt:

$$(x - x_m)^2 + (k(x) - y_m)^2 = r^2 \quad (2)$$

Lösungsidee:

Zweimaliges implizites Differenzieren von (2) und Ersetzen gemäß (1) liefert M und r .

Mit der Kettenregel erhalten wir zunächst:

$$(x - x_m) + (k(x) - y_m) \cdot k'(x) = 0 \quad (3)$$

und mit der Produktregel:

$$1 + (k'(x))^2 + (k(x) - y_m) \cdot k''(x) = 0 \quad (4)$$

Beachten wir nun (1), so erhalten wir aus den letzten beiden Gleichungen:

$$(x_0 - x_m) + (f(x_0) - y_m) \cdot f'(x_0) = 0 \quad (5)$$

$$1 + (f'(x_0))^2 + (f(x_0) - y_m) \cdot f''(x_0) = 0 \quad (6)$$

(6) umgestellt ergibt:

$$y_m = f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)} \quad (7)$$

und (7) in (5) eingesetzt:

$$x_m = x_0 - \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)} \cdot f'(x_0) \quad (8)$$

Für den Radius r gilt:

$$r^2 = (x_0 - x_m)^2 + (f(x_0) - y_m)^2 = \left(\frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)} \cdot f'(x_0) \right)^2 + \left(\frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)} \right)^2$$

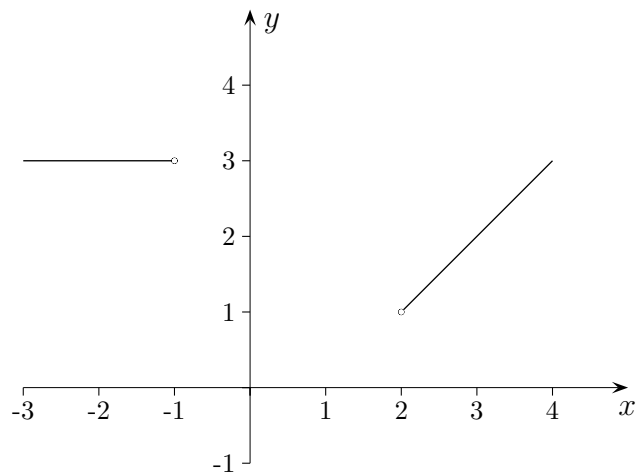
$$r = \left| \frac{(1 + (f'(x_0))^2)^{1,5}}{f''(x_0)} \right| \quad (9)$$

und damit für die Krümmung an der Stelle x_0 :

$$\kappa = \frac{f''(x_0)}{(1 + (f'(x_0))^2)^{1,5}} \quad \text{kurz:} \quad \kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{1,5}} \quad (10)$$

Krümmung, Aufgabe

Die Strecke $A(-3 | 3) B(-1 | 3)$ soll mit der Strecke $B(2 | 1) C(4 | 3)$ glatt verbunden werden.
Gesucht ist auch eine Lösung ohne Krümmungssprünge.



Krümmung, Aufgabe

Die Strecke $A(-3 | 3) B(-1 | 3)$ soll mit der Strecke $B(2 | 1) C(4 | 3)$ glatt verbunden werden.
Gesucht ist auch eine Lösung ohne Krümmungssprünge.

Die vier Bedingungen

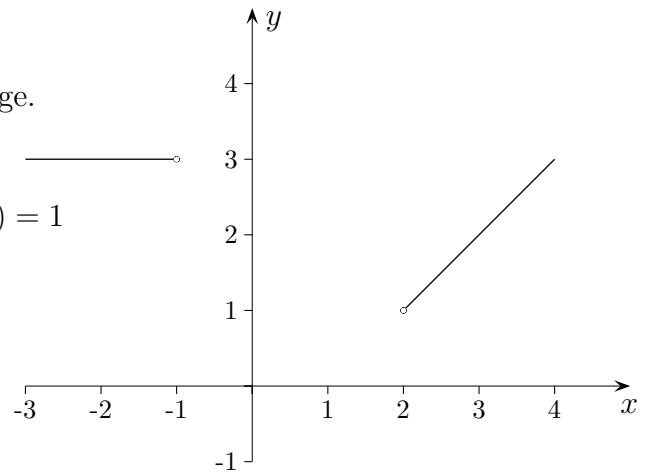
$$f(-1) = 3, \quad f(2) = 1, \quad f'(-1) = 0, \quad f'(2) = 1$$

führen mit dem Ansatz:

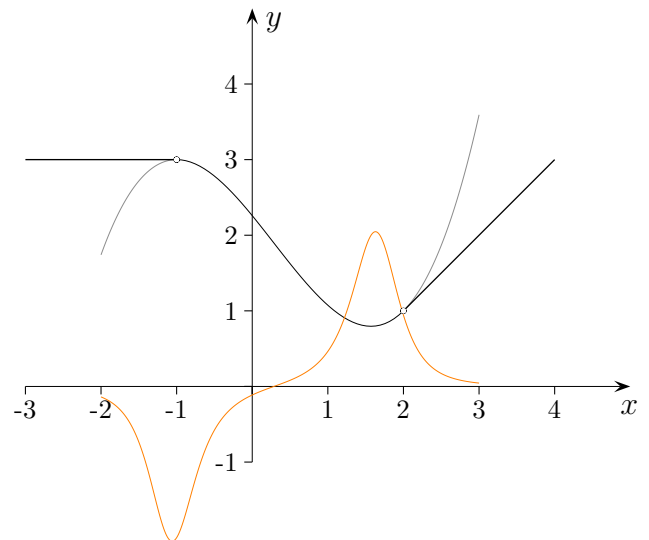
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

über ein Gleichungssystem zur Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{27} (7x^3 - 6x^2 - 33x + 61)$$



An der eingezeichneten Krümmungskurve sind die Krümmungssprünge an den Nahtstellen ablesbar.



Um Krümmungssprünge zu vermeiden, muss zusätzlich

$$f''(-1) = 0, \quad f''(2) = 0$$

gefordert werden.

Mit dem Ansatz:

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

erhalten wir die Lösung:

$$f(x) = -\frac{1}{81} (7x^5 - 16x^4 - 38x^3 + 52x^2 + 119x - 191)$$

