Differentialgleichungen

1. $f'(x) = -(f(x) - 5), \quad f(0) = 30$

Lösung: *Produktansatz:* $f(x) = a(x) \cdot b(x)$, *kurz:* $f = a \cdot b$

$$a' \cdot b + a \cdot b' = -a \cdot b + 5$$

$$a' \cdot b + a \cdot (b' + b) = 5 \quad \text{wähle } b \text{ so, dass } b' + b = 0 \implies \frac{b'}{b} = -1 \implies \ln b = -x$$

$$\implies b = e^{-x}, \quad \text{DGL:} \quad a' \cdot e^{-x} = 5 \implies a' = 5\,e^{x} \implies a = 5 \cdot e^{x} + C,$$

$$f = a \cdot b = 5 + C \cdot e^{-x}$$

Anfangswert: $f(0) = 30, \implies C = 25 \implies f(x) = 5 + 25 \cdot e^{-x}$

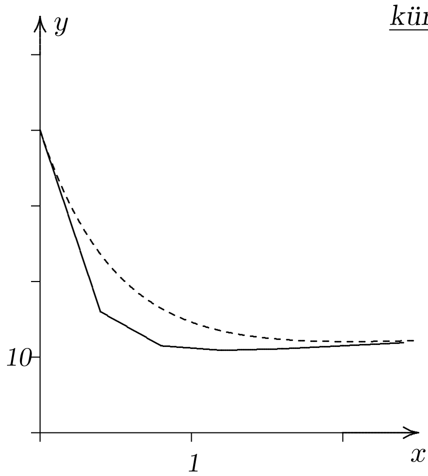
2. $f'(x) = -2 \cdot (f(x) - x - 10)\ ,\ f(0) = 40$

Lösung: $f(x) = x + \dfrac{19}{2} + \dfrac{61}{2} \cdot e^{-2x}$ *Am Schluss ist eine partielle Integration erforderlich.*

3. Diskrete Näherungslösung (Polygonzugverfahren) der letzten DGL
für die nächsten sechs Werte für $\Delta x = 0,4$.

Für eine diskrete Näherungslösung einer Differentialgleichung wird $f'(x)$ *durch* $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ *ersetzt und nach* $f(x + \Delta x)$ *aufgelöst.* $f(x + \Delta x)$ *kann dann iterativ errechnet werden.*

$f(x + \Delta x) = (-2 \cdot f(x) + 2x + 20) \cdot 0,4 + f(x)$, *Anfangswert:* $f(0) = 40$



<u>kürzer:</u> $f'(x)$ *durch* $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x}$ *ersetzen und nach* y_{n+1} *auflösen.*

$y_{n+1} = (-2 \cdot y_n + 2x_n + 20) \cdot 0,4 + y_n$, *Anfangswert:* $y_0 = 40$

Tipp: Gleichung vereinfachen: $y_{n+1} = 0,2\,y_n + 0,8\,x_n + 8$

x	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4
Näherung	40	16	11,5	10,9	11,1	11,5	11,9

4. *Wie lautet die diskrete Näherungslösung der DGL* $f'(x) = -(f(x) + 2x - 10), \quad f(0) = 20$
für die nächsten 10 Werte für $\Delta x = 0,5$*?*

x	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5
Näherung	20	15	12	10	8,5	7,25	6,13	5,06	4,03	3,01	2,01