Trigonometrische Gleichungen

Trigonometrische Gleichungen werden auf Gleichungen der Form

$\sin x = c$ (nur lösbar für: $-1 \leq c \leq 1$)

$\sin ax = c$

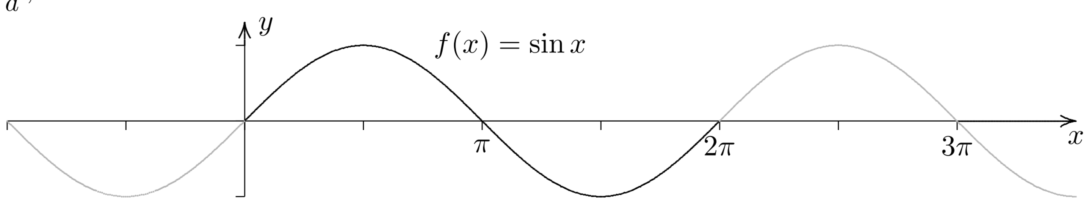
$\sin(ax + b) = c$

zurückgeführt (Entsprechendes für cos, tan), und zwar durch:

1) Ausklammern, Anwenden der Faktorregel: $f(x) \cdot g(x) = 0 \iff f(x) = 0$ oder $g(x) = 0$
2) Lösen einer quadratischen Gleichung nach Ersetzung
3) Verwenden einer Beziehung
   a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
   b) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
   c) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
   d) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
4) Lösungen einer Gleichung wie z. B. $x \cdot \sin(x) = 1$, $[0; 2\pi]$ werden mit dem GTR ermittelt. $x_1 = 1{,}114$
   $x_2 = 2{,}773$

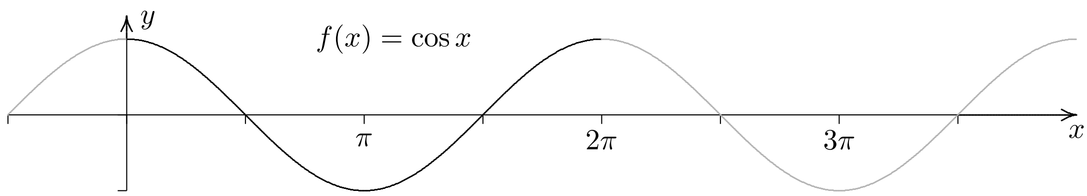
1. $\sin ax = 0$

$$ax = k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \text{Nullstellen}$$
$$x = k \cdot \frac{\pi}{a}, \quad k \in \mathbb{Z}$$



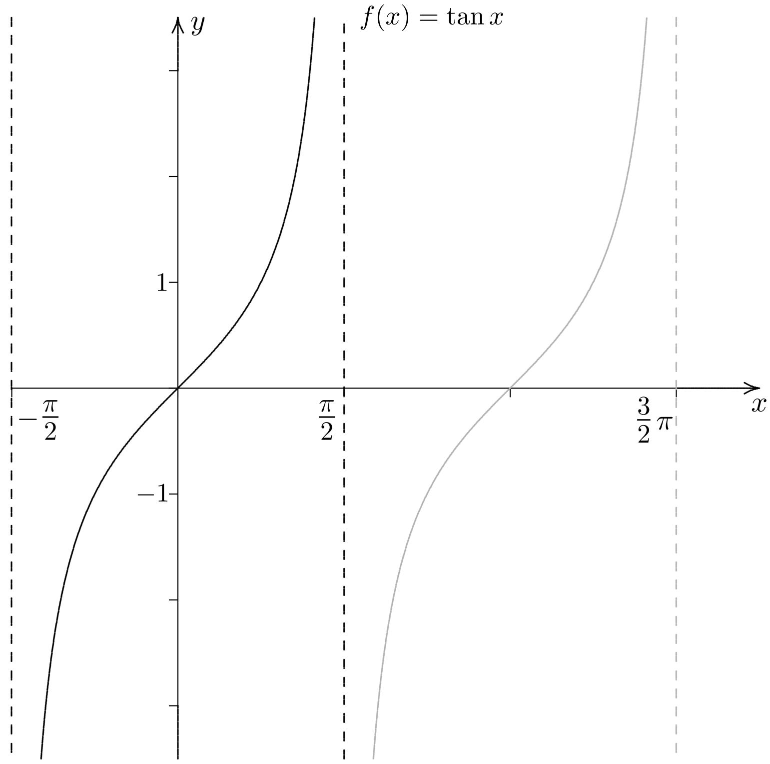
2. $\cos ax = 0$

$$ax = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{\pi}{2a} + k \cdot \frac{\pi}{a}, \quad k \in \mathbb{Z}$$



3. $\sin x + k \cdot \cos x = 0 \qquad k \neq 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$

$$\tan x = -k$$
$$x_1 = \arctan(-k)$$
$$x_2 = x_1 + \pi$$



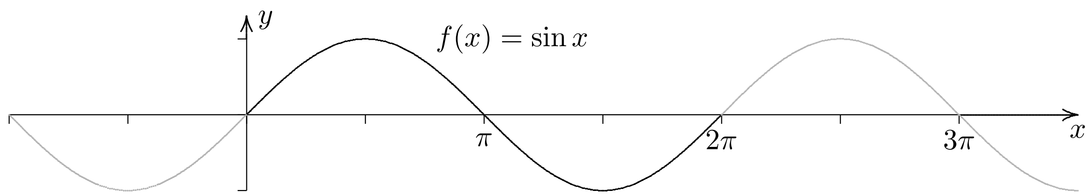
4. $2\sin 2x - \cos x = 0 \qquad [0; 2\pi]$

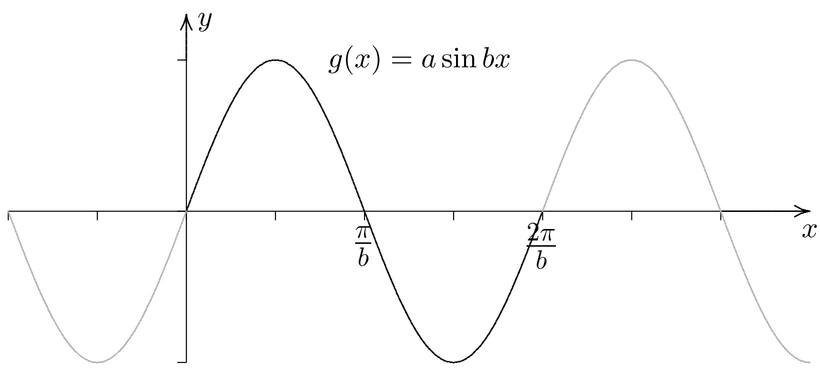
$$\dots$$
$$\cos x = 0$$
$$x_1 = \frac{\pi}{2} \qquad x_2 = \frac{3}{2}\pi$$
$$1 - 4\sin x = 0$$
$$x_3 = 0{,}253 \qquad x_4 = 2{,}889$$

5. $\sin x + \cos 2x = 0 \qquad [0; 2\pi]$

$$\dots$$
$$-2(\sin x)^2 + \sin x + 1 = 0$$
$$\dots$$
$$\sin x = 1$$
$$x_1 = \frac{\pi}{2}$$
$$\sin x = -\frac{1}{2}$$
$$x_2 = 3{,}665 \qquad x_3 = 5{,}760$$

Extrema von $g(x) = a \sin bx$





Der Graph von g ist gegenüber dem Graph von f längs der x-Achse gestaucht, die Periode ist nun $\frac{2\pi}{b}$.

Den Maximumstellen von f

$$x_{max} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

entsprechen daher die Maximumstellen von g

$$x_{max} = \frac{\pi}{2b} + k \cdot \frac{2\pi}{b}\,, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Den Minimumstellen von f

$$x_{min} = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

entsprechen die Minimumstellen von g

$$x_{min} = \frac{3}{2b}\pi + k \cdot \frac{2\pi}{b}\,, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Zeige für g: $\quad Max\Big(\frac{2k+1}{2} \cdot \frac{\pi}{b} \mid a\Big)$, k gerade $\qquad Min\Big(\frac{2k+1}{2} \cdot \frac{\pi}{b} \mid -a\Big)$, k ungerade

Extrema der Funktion $f(x) = 3\sin(2x-2)+1$

Die Periode lautet: $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$
Der Graph ist im Vergleich zum Sinusgraph um 1 nach rechts verschoben, $2x - 2 = 2(x-1)$.
Daraus ergeben sich unmittelbar die x-Koordinaten:

$$\begin{aligned} x_{\max} &= \frac{\pi}{4} + 1 + n\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x_{\min} &= \frac{3\pi}{4} + 1 + n\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Die y-Koordinaten ergeben sich aus der Amplitude und der Verschiebung in y-Richtung.

$$\begin{aligned} y_{\max} &= 4 \\ y_{\min} &= -2 \end{aligned}$$

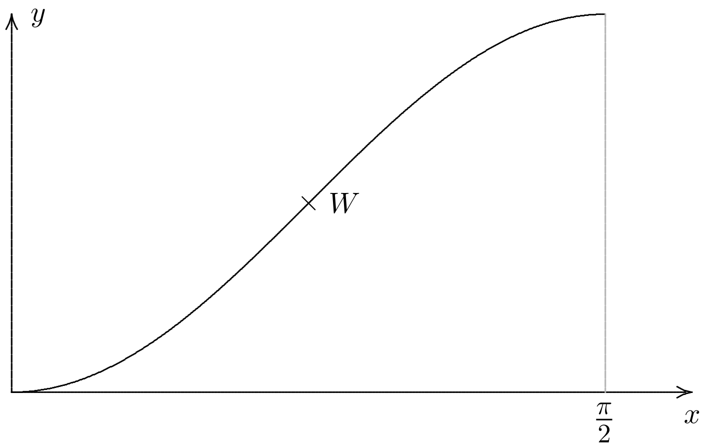
Oder
Notwendige Bedingung $f'(x) = 0$,
d. h. $6\cos(2x-2) = 0$

$$\begin{aligned} \cos(2x-2) &= 0 \\ 2x - 2 &= \frac{\pi}{2} + 2n\pi, && k \in \mathbb{Z} && \text{siehe Graph der Cosinus-Funktion} \\ x_{\max} &= \frac{\pi}{4} + 1 + n\pi, && k \in \mathbb{Z} && \text{Steigungswechsel } +/-\text{, daher Maximum} \\ 2x - 2 &= \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, && k \in \mathbb{Z} \\ x_{\min} &= \frac{3\pi}{4} + 1 + n\pi, && k \in \mathbb{Z} && \text{Steigungswechsel } -/+\text{, daher Minimum} \end{aligned}$$

Punktsymmetrie

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin^2 x\,, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Zeige, dass der Graph punktsymmetrisch ist zu W.



$W\left(\frac{\pi}{4} \mid 0{,}5\right)$

Verschiebung in den Ursprung: $g(x) = f(x + \frac{\pi}{4}) - 0{,}5$

$g(x) = -g(-x)\,, \quad$ beachte: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x\,, \quad \cos x = \cos(-x)$

alternativ:

begründe: $0{,}5 - f(x) = f(\frac{\pi}{2} - x) - 0{,}5\,, \quad$ beachte: $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$