

l'Hospital Weitere Untersuchungen

1. $\frac{\infty}{\infty}$ für $x \rightarrow 0$

Diesen Fall führen wir auf Bekanntes zurück. Die Existenz der Grenzwerte wird vorausgesetzt.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(g(x))^2} g'(x)}{-\frac{1}{(f(x))^2} f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^2 \cdot \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

$$\Rightarrow 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{warum?})$$

2. $\frac{0}{0}$ für $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3. $\frac{\infty}{\infty}$ für $x \rightarrow \infty$

(leichte) Aufgabe