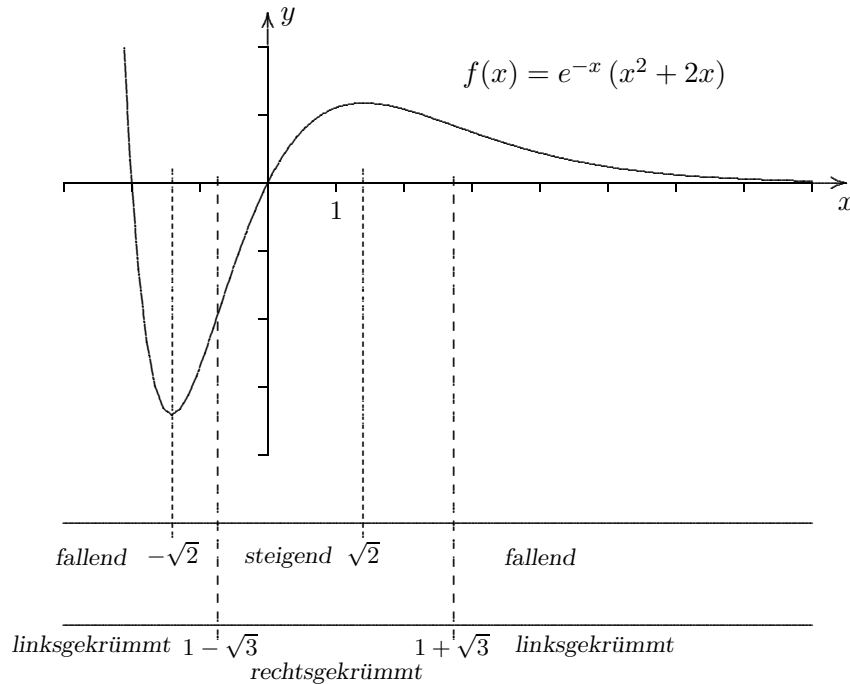


e-Funktionen

1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{-x}(x^2 + 2x)$.
 Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen, Monotonie und Krümmung.
 Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

Lösung:



$$f'(x) = -e^{-x}(x^2 - 2)$$

$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 2)$$

2. Gegeben sei die Funktion $f(x) = 5xe^{-\frac{x}{2}}$.
- Untersuchen Sie die Funktion, auch auf Monotonie und Krümmung.
 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.
 (Zur Kontrolle: $f'(x) = 5e^{-\frac{x}{2}} \cdot (1 - \frac{x}{2})$)
 - Der Graph von f , die x -Achse und die Gerade $x = 5$ begrenzen eine Fläche.
 Berechnen Sie deren Inhalt.
 - Der in b) betrachteten Fläche ist ein rechtwinkliges Dreieck einbeschrieben. Seine Eckpunkte sind $O(0 | 0)$, $P(x | f(x))$ sowie $Q(x | 0)$ (Q ist der Fußpunkt des Lotes von P auf die x -Achse.).
 Rotiert dieses rechtwinklige Dreieck um die x -Achse, so entsteht ein gerader Kegel.
 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P für den Fall, dass das Volumen des Kegels maximal wird.
 - Gegeben sei die Funktion g mit $g(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt: $g^{(n)}(x) = (-\frac{1}{2})^n e^{-\frac{x}{2}} (x - 2n)$

Lösung:

2. a) Nullstellen: $x = 0$

Extrema: f monoton steigend für $x < 2$, f monoton fallend für $x > 2 \implies \text{Max}(2 \mid \frac{10}{e})$

Wendepunkte: $f''(x) = 5e^{-\frac{x}{2}} \cdot (\frac{x}{4} - 1)$

Krümmung: f rechtsgekrümmt für $x < 4$, f linksgekrümmt für $x > 4 \implies W(4 \mid \frac{20}{e^2})$

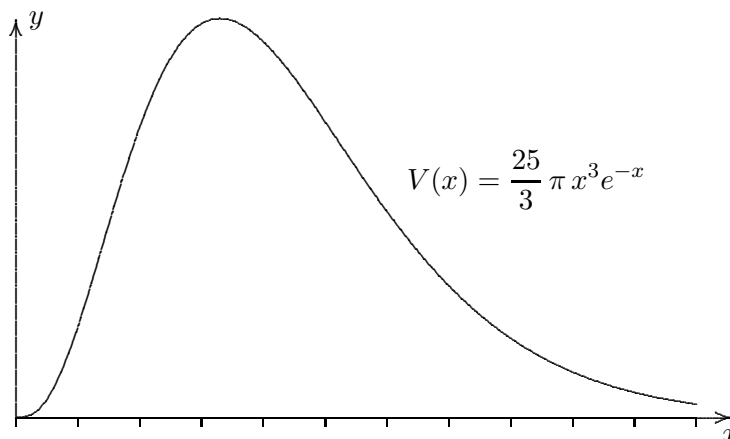
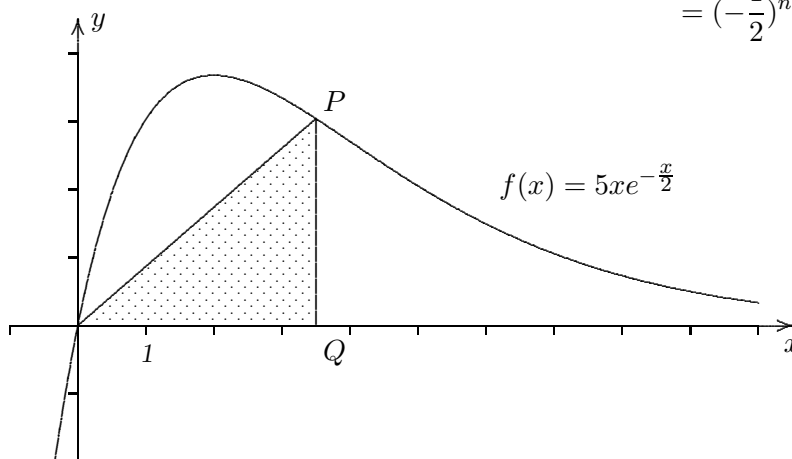
Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

b) $A = 5 \cdot \int_0^5 x e^{-\frac{x}{2}} dx = 5 \cdot \left[-2e^{-\frac{x}{2}} \cdot (x+2) \right]_0^5 = 10 \left(2 - \frac{7}{e^{2,5}} \right) = 14,25$ (partielle Integration)

c) $V(x) = \frac{25}{3} \pi x^3 e^{-x}$ ($0 < x \leq 5$), $V'(x) = \frac{25}{3} \pi e^{-x} (3x^2 - x^3)$, Maximum an der Stelle $x = 3$.

d) Induktionsanfang $n = 1$: $g^{(1)}(x) = g'(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} (x-2)$

Induktionsschritt von n auf $n+1$: $g^{(n+1)}(x) = (g^{(n)}(x))' = \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{-\frac{x}{2}} (x-2n) \right)' = \dots$
 $= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} e^{-\frac{x}{2}} (x-2(n+1))$



3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = (4 - 8x) \cdot e^{2x}$

Die Funktion beschreibt den Bestand einer aussterbenden Tierpopulation.

- Untersuchen Sie die Funktion, auch auf Monotonie und Krümmung.
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.
(zur Kontrolle: $f'(x) = -16x \cdot e^{2x}$)
- Wie ist a zu wählen, damit $F(x) = 4e^{2x} - ax \cdot e^{2x}$ eine Stammfunktion von f ist?
- Skizzieren Sie die 1. Ableitung von f ohne schriftliche Berechnungen durchzuführen.
(neues Koordinatensystem).
- Berechnen Sie exakt (ohne Taschenrechner) den Inhalt der (zu einer Seite unbegrenzten) Fläche, die der Graph von f mit dem Graphen von $g(x) = e^{2x}$ einschließt.

Lösung:

3. a) $N(\frac{1}{2} | 0)$,

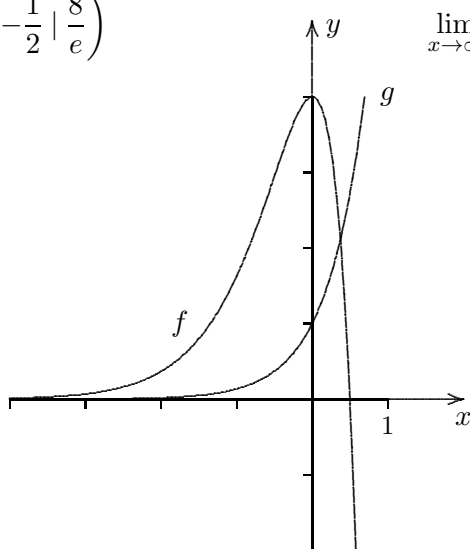
Monotonie: f für $x < 0$ monoton wachsend, f für $x > 0$ monoton fallend, $Max(0 | 4)$

Krümmung: $f''(x) = e^{2x} \cdot (-16 - 32x)$

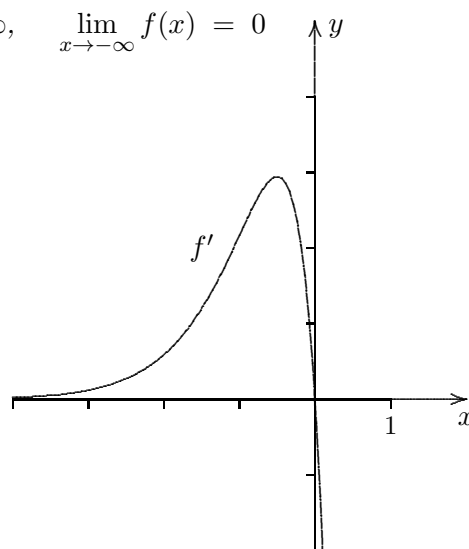
$f''(x) < 0 \iff -16 - 32x < 0 \iff x > -\frac{1}{2}$, f ist für $x > -\frac{1}{2}$ rechtsgekrümmt,

$f''(x) > 0 \iff -16 - 32x > 0 \iff x < -\frac{1}{2}$, f ist für $x < -\frac{1}{2}$ linksgekrümmt,

$W(-\frac{1}{2} | \frac{8}{e})$



$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$



b) $F'(x) = 8e^{2x} - ae^{2x} - 2ax \cdot e^{2x} \implies a = 4$

c) siehe Graph von f'

d) Schnittbedingung: $f(x) = g(x) \implies x = \frac{3}{8}$

$$A = \int_{-\infty}^{\frac{3}{8}} (f(x) - g(x)) dx = \left[4e^{2x} - 4x \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} \right]_{-\infty}^{\frac{3}{8}} = 2e^{\frac{3}{4}}$$

Sauerstoffproduktion

4. Gegeben ist die Funktion $f(t) = 2t \cdot e^{-0,02 \cdot t^2}$, $t \in \mathbb{R}$.
- a) Untersuchen Sie den Graphen auf Symmetrie, bestimmen Sie das Verhalten von f für $t \rightarrow \infty$, ermitteln Sie die Extrem- und Wendestellen von f .
- b) Wie ist das a zu wählen, damit $F(t) = a \cdot e^{-0,02 \cdot t^2}$ eine Stammfunktion von f ist.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der t -Achse, dem Graphen von f und der Geraden mit $t = 10$ eingeschlossen wird.
- c) Für $t \leq 0 \leq 15$ beschreibt $f(t)$ modellhaft die momentane Sauerstoffproduktion einer Buche an einem Sommertag mit 15 Stunden Sonnenscheindauer ab dem Sonnenaufgang $t = 0$, wobei man t in Stunden und $f(t)$ in m^3 pro Stunde angibt. Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f in diesem Sachzusammenhang. Zu welchem Zeitpunkt liegt die stärkste Abnahme der momentanen Sauerstoffproduktion vor?
- d) Interpretieren Sie den bei b) berechneten Flächeninhalt in diesem Sachzusammenhang. Bestimmen Sie, wie viele Sonnenstunden vergangen sind, bis die Buche insgesamt $20 m^3$ Sauerstoff produziert hat.
- e) Eine Funktion g soll nun die momentane Sauerstoffproduktion in m^3 pro Stunde an einem sonnigen Herbsttag beschreiben. Die Sonnenscheindauer beträgt 12 Stunden und die Intensität der auf die Blätter treffenden Strahlung ist geringer als an einem Sommertag. Damit verbunden ist eine geringere Sauerstoffproduktion. Das Maximum wird nach 4 Stunden $t = 4$ erreicht, also 4 Stunden nach Sonnenaufgang $t = 0$.
Begründen Sie, wie man den Funktionsterm von f verändern kann, damit man den Term einer möglichen Funktion g erhält.

Sauerstoffproduktion Ergebnisse

4. Gegeben ist die Funktion $f(t) = 2t \cdot e^{-0,02 \cdot t^2}$, $t \in \mathbb{R}$.

- a) Untersuchen Sie den Graphen auf Symmetrie, Graph punktsymmetrisch
 bestimmen Sie das Verhalten von f für $t \rightarrow \infty$, $f(t) \rightarrow 0$
 ermitteln Sie die Extrem- und Wendestellen von f .

$$f'(t) = (2 - 0,08t^2) \cdot e^{-0,02 \cdot t^2}$$

$$f''(t) = (-0,24t + 0,0032t^3) \cdot e^{-0,02 \cdot t^2}$$

$$t_{\min} = -5, \quad t_{\max} = 5$$

Wendestellen: $t_{w1} = 0, \quad t_{w2} = 8,66, \quad t_{w3} = -8,66$

- b) Wie ist das a zu wählen, damit $F(t) = a \cdot e^{-0,02 \cdot t^2}$ eine Stammfunktion von f ist. $a = -50$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der t -Achse, dem Graphen von f und der Geraden mit $t = 10$ eingeschlossen wird. $A = 43,23 \text{ FE}$

- c) Für $t \leq 0 \leq 15$ beschreibt $f(t)$ modellhaft die momentane Sauerstoffproduktion einer Buche an einem Sommertag mit 15 Stunden Sonnenscheindauer ab dem Sonnenaufgang $t = 0$, wobei man t in Stunden und $f(t)$ in m^3 pro Stunde angibt. Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f in diesem Sachzusammenhang. Zu welchem Zeitpunkt liegt die stärkste Abnahme der momentanen Sauerstoffproduktion vor? ..., 8 Stunden 40 Minuten

- d) Interpretieren Sie den bei b) berechneten Flächeninhalt in diesem Sachzusammenhang. Bestimmen Sie, wie viele Sonnenstunden vergangen sind, bis die Buche insgesamt $20 m^3$ Sauerstoff produziert hat.

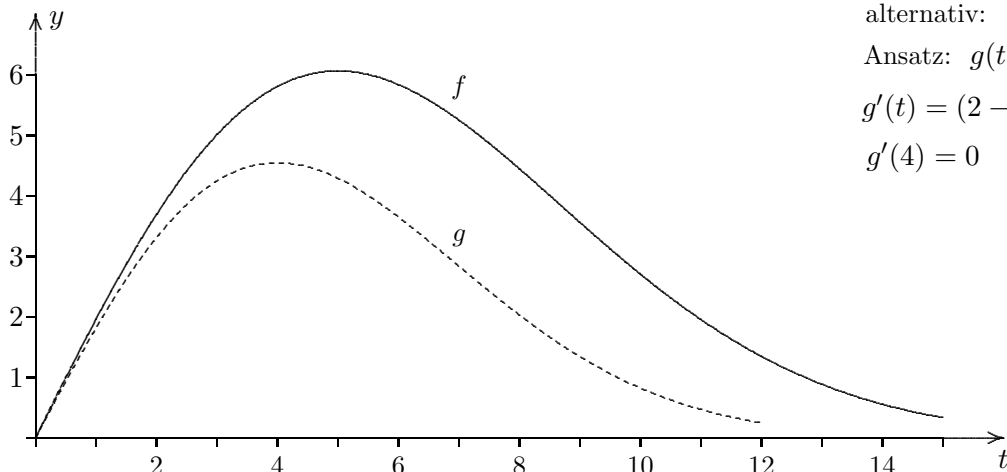
Innerhalb der ersten 10 Stunden wurden $43,23 m^3$ Sauerstoff produziert.

$$F(b) - F(0) = 20 \implies b = 5,05$$

- e) Eine Funktion g soll nun die momentane Sauerstoffproduktion in m^3 pro Stunde an einem sonnigen Herbsttag beschreiben. Die Sonnenscheindauer beträgt 12 Stunden und die Intensität der auf die Blätter treffenden Strahlung ist geringer als an einem Sommertag. Damit verbunden ist eine geringere Sauerstoffproduktion. Das Maximum wird nach 4 Stunden $t = 4$ erreicht, also 4 Stunden nach Sonnenaufgang $t = 0$.

Begründen Sie, wie man den Funktionsterm von f verändern kann, damit man den Term einer möglichen Funktion g erhält.

Der Graph von f wird in t - und in y -Richtung gestaucht: $g(x) = \frac{3}{4} \cdot f\left(\frac{5}{4}t\right)$



alternativ:

$$\text{Ansatz: } g(t) = 2t \cdot e^{-a \cdot t^2}$$

$$g'(t) = (2 - 4at^2) \cdot e^{-a \cdot t^2}$$

$$g'(4) = 0 \implies a = \frac{1}{32}$$

Virusinfektion

5. Die Ausbreitung einer Virusinfektion (z. B. Schweinegrippe) kann durch

$$f_k(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{x}{k}} \quad x \geq 0, \quad k > 0$$

modelliert werden, mit $f_k(x)$ Anzahl der Infizierten in 1000, x Zeit in Monaten.

- a) Wie lauten die x -Koordinaten der Punkte des zugehörigen Graphen mit waagerechter Tangente?
- b) Machen Sie eine begründete Aussage über die Anzahl der Wendepunkte von f_k , ohne die 2. Ableitung zu ermitteln und ohne $f'_k(x)$ zu zeichnen.
- c) Wie ist k zu wählen, damit die maximale Anzahl der Infizierten 4000 beträgt? (algebraisch)
- d) Sei nun $k = 2$. In welchem Zeitraum sind mindestens 1000 Infizierte vorhanden? (GTR)
- e) Untersuchen Sie, ob a und b so gewählt werden können, dass $F(x) = e^{-\frac{x}{2}}(-2x^2 - ax - b)$ eine Stammfunktion von f_2 ist.
- f) Sei $A(u)$ der vom Graphen von f_2 und der x -Achse eingeschlossene Flächeninhalt in den Grenzen von 0 bis u . Welcher Flächeninhalt ergibt sich für $u \rightarrow \infty$? (algebraisch)

Virusinfektion Ergebnisse

5. Die Ausbreitung einer Virusinfektion (z. B. Schweinegrippe) kann durch

$$f_k(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{x}{k}} \quad x \geq 0, \quad k > 0$$

modelliert werden, mit $f_k(x)$ Anzahl der Infizierten in 1000, x Zeit in Monaten.

a) Wie lauten die x -Koordinaten der Punkte des zugehörigen Graphen mit waagerechter Tangente?

$$f'_k(x) = e^{-\frac{x}{k}} \left(2x - \frac{x^2}{k} \right) \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2k$$

b) Machen Sie eine begründete Aussage über die Anzahl der Wendepunkte von f_k , ohne die 2. Ableitung zu ermitteln und ohne $f'_k(x)$ zu zeichnen.

2 Wendepunkte, beachte die Ergebnisse von a) und $\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$.

c) Wie ist k zu wählen, damit die maximale Anzahl der Infizierten 4000 beträgt? (algebraisch)

$$f_k(2k) = 4, \quad k = e$$

d) Sei nun $k = 2$. In welchem Zeitraum sind mindestens 1000 Infizierte vorhanden? (GTR)

$$[1,43 \mid 8,61]$$

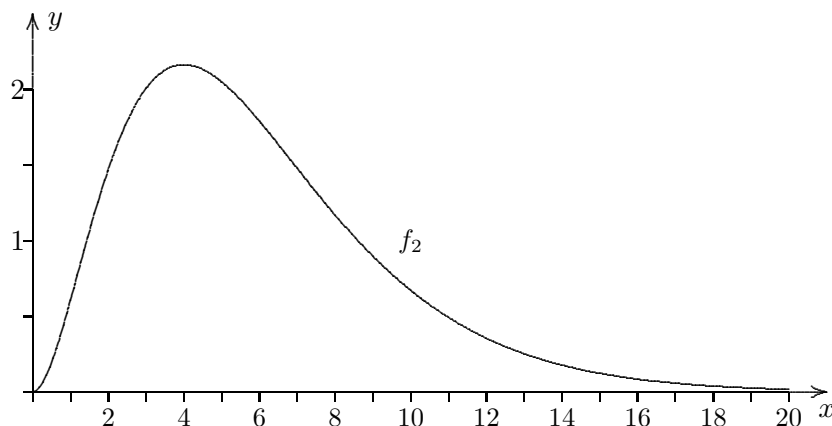
e) Untersuchen Sie, ob a und b so gewählt werden können, dass $F(x) = e^{-\frac{x}{2}} (-2x^2 - ax - b)$ eine Stammfunktion von f_2 ist.

$$F'(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} (2x^2 + ax - 8x - 2a + b)$$

$$a = 8, \quad b = 16$$

f) Sei $A(u)$ der vom Graphen von f_2 und der x -Achse eingeschlossene Flächeninhalt in den Grenzen von 0 bis u . Welcher Flächeninhalt ergibt sich für $u \rightarrow \infty$? (algebraisch)

16 FE



6. Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = (x^2 - t^2)e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ihr Graph sei K_t .

- a) Untersuchen Sie K_t auf Symmetrie, gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen, Extrema und bestimmen Sie das Verhalten für $x \rightarrow \infty$.

Auf welcher Kurve C liegen die Maxima aller K_t ?

Welche Punkte von C sind nicht Maxima einer Kurve K_t ?

$$\text{Zur Kontrolle: } f'_t(x) = -2xe^{-x^2}(x^2 - 1 - t^2)$$

- b) Die Tangenten in den Schnittpunkten von K_t mit der x -Achse und die x -Achse schließen ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe $h(t)$ ein. Für welches t ist $h(t)$ maximal?

6. Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = (x^2 - t^2)e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ihr Graph sei K_t .

- a) Untersuchen Sie K_t auf Symmetrie, gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen, Extrema und bestimmen Sie das Verhalten für $x \rightarrow \infty$.

Graph achsensymmetrisch

$$\text{Nullstellen: } x_{1/2} = \pm t$$

$$\text{Max}\left(\pm\sqrt{1+t^2} \mid e^{-1-t^2}\right)$$

Auf welcher Kurve C liegen die Maxima aller K_t ?

$$y = e^{-x^2}$$

Welche Punkte von C sind nicht Maxima einer Kurve K_t ?

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$\text{Zur Kontrolle: } f'_t(x) = -2xe^{-x^2}(x^2 - 1 - t^2)$$

- b) Die Tangenten in den Schnittpunkten von K_t mit der x -Achse und die x -Achse schließen ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe $h(t)$ ein. Für welches t ist $h(t)$ maximal?

$$y = 2te^{-t^2}(x - t)$$

$$h(t) = 2t^2e^{-t^2}, \quad t = 1$$

Kartenschalter

7. Die momentane Ankunftsrate an einem Kino - also die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute - soll modellhaft beschrieben werden durch die Funktion f mit

$$f(x) = 0,27 \cdot x^2 \cdot e^{-0,12x}$$

Dabei ist x die Zeit in Minuten seit 19.00 Uhr und $f(x)$ die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute.

Vor 19.00 Uhr befinden sich noch keine Besucher am Kartenschalter.

- a) Skizzieren Sie den Graph von f .

Wann kommen die meisten Besucher pro Minute zum Kartenschalter, wie viele sind das?

Ab wann kommen weniger als drei Personen pro Minute zum Kino?

- b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der angekommenen Personen durch die Funktion g mit

$$g(x) = 312,5 - (2,25x^2 + 37,5x + 312,5) \cdot e^{-0,12x}$$

beschrieben wird.

Wie viele Personen kommen nach diesem Modell höchstens zum Kino?

- c) Um 19.20 Uhr öffnet der Kartenschalter des Kinos. Pro Minute können durchschnittlich für 6 Personen Karten ausgegeben werden.

Mit welcher Wartezeit muss eine Person rechnen, die um 19.20 Uhr zum Kino kommt? Wann ist die Anzahl der Wartenden am größten?

Wie viele Besucher warten dann?

Wann hat sich die Warteschlange aufgelöst?

- d) Durch eine Verzögerung öffnet der Kartenschalter erst um 19.50 Uhr.

Wie viele Personen müssen jetzt mindestens pro Minute am Schalter abgefertigt werden, damit die Schlange um 20.30 Uhr abgebaut ist?

Kartenschalter Ergebnisse

7. Die momentane Ankunftsrate an einem Kino - also die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute - soll modellhaft beschrieben werden durch die Funktion f mit

$$f(x) = 0,27 \cdot x^2 \cdot e^{-0,12x}$$

Dabei ist x die Zeit in Minuten seit 19.00 Uhr und $f(x)$ die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute.

Vor 19.00 Uhr befinden sich noch keine Besucher am Kartenschalter.

- a) Skizzieren Sie den Graph von f .

Wann kommen die meisten Besucher pro Minute zum Kartenschalter, wie viele sind das?

$$f(16,7) = 10,2$$

19.17 Uhr

Ab wann kommen weniger als drei Personen pro Minute zum Kino? $x > 42,4$ ab 19.43 Uhr

- b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der angekommenen Personen durch die Funktion g mit

$$g(x) = 312,5 - (2,25x^2 + 37,5x + 312,5) \cdot e^{-0,12x} \quad g'(x) = f(x) \text{ und } g(0) = 0$$

beschrieben wird.

Wie viele Personen kommen nach diesem Modell höchstens zum Kino? $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 312,5$

- c) Um 19.20 Uhr öffnet der Kartenschalter des Kinos. Pro Minute können durchschnittlich für 6 Personen Karten ausgegeben werden.

Mit welcher Wartezeit muss eine Person rechnen, die um 19.20 Uhr zum Kino kommt?

$$g(20) = 134,5 \quad \text{bzw.} \quad \int_0^{20} f(x) dx = 134,5$$

$134 : 6 = 22,3$

Wann ist die Anzahl der Wartenden am größten?

direkt mit $f(x) = 6$ oder mit
 $h(x) = g(x) - 6 \cdot (x - 20), \quad x \geq 20$
 (x Zeit in Minuten seit 19 Uhr)

Wie viele Besucher warten dann?

$$h(31,8) = 158,5$$

um 19.32 Uhr

Wann hat sich die Warteschlange aufgelöst?

$$x = 71,6 \quad \text{um 20.12 Uhr}$$

- d) Durch eine Verzögerung öffnet der Kartenschalter erst um 19.50 Uhr.

Wie viele Personen müssen jetzt mindestens pro Minute am Schalter abgefertigt werden, damit die Schlange um 20.30 Uhr abgebaut ist?

$$g(90) = 312$$

$312 : 40 = 7,8$ etwa 8 Personen

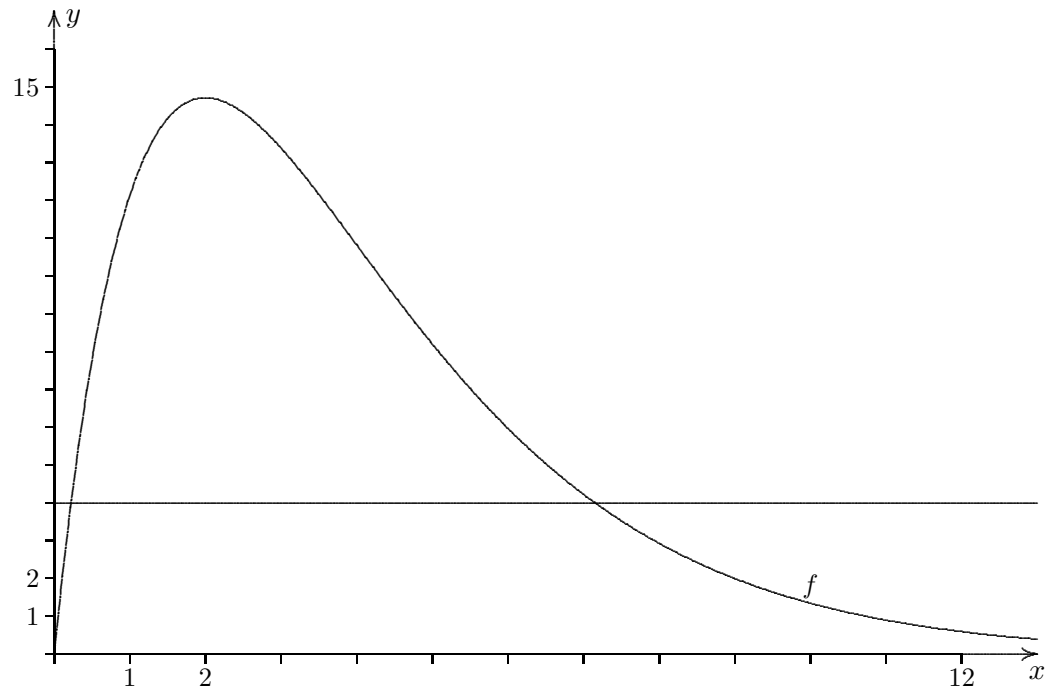
Konzentration eines Medikaments

8. Durch $f(t) = 20t \cdot e^{-0,5t}$ wird die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben. Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $f(t)$ in $\frac{mg}{l}$ gemessen. Die folgenden Betrachtungen sind nur für die Zeitspanne der ersten 12 Stunden nach der Einnahme des Medikaments durchzuführen.
- a) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Konzentration.
Nach welcher Zeit erreicht die Konzentration ihren höchsten Wert?
Das Medikament ist nur wirksam, wenn seine Konzentration im Blut mindestens $4 \frac{mg}{l}$ beträgt. Berechnen Sie die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist.
Welcher Wert kann als mittlere Konzentration innerhalb der ersten 12 Stunden angesehen werden (betrachten Sie hierzu ein flächengleiches Rechteck)?
- b) Zum Zeitpunkt t_0 wird das Medikament am stärksten abgebaut.
Beschreiben Sie quantitativ (also mit Zahlen) die Veränderung der Konzentration zu diesem Zeitpunkt.
Ab dem Zeitpunkt $t = 4$ wird die Konzentration des Medikaments nun näherungsweise durch die Tangente an den Graphen von f an dieser Stelle beschrieben.
Bestimmen Sie damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist.
- c) Anstelle der Näherung aus Teilaufgabe b) wird nun wieder die Beschreibung der Konzentration durch f verwendet.
Vier Stunden nach der ersten Einnahme wird das Medikament in der gleichen Dosierung erneut eingenommen. Es wird angenommen, dass sich dabei die Konzentrationen im Blut des Patienten addieren.
Skizzieren und erläutern kurz Sie den zeitlichen Verlauf der Gesamtkonzentration für $0 \leq t \leq 12$. Ermitteln Sie algebraisch den Zeitpunkt der maximalen Gesamtkonzentration (notwendige Bedingung genügt).
- d) Das Medikament wird nun in seiner Zusammensetzung verändert. Die Konzentration des Medikaments im Blut wird durch $g(t) = at \cdot e^{-bt}$ und $a > 0$ und $b > 0$ beschrieben.
Bestimmen Sie die Konstanten a und b , wenn die Konzentration vier Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert $10 \frac{mg}{l}$ erreicht.

Konzentration eines Medikaments Ergebnisse

8. Durch $f(t) = 20t \cdot e^{-0,5t}$ wird die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben. Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $f(t)$ in $\frac{mg}{l}$ gemessen. Die folgenden Betrachtungen sind nur für die Zeitspanne der ersten 12 Stunden nach der Einnahme des Medikaments durchzuführen.

- a) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Konzentration.



Nach welcher Zeit erreicht die Konzentration ihren höchsten Wert? $f(2) = 14,7$
 Das Medikament ist nur wirksam, wenn seine Konzentration im Blut mindestens $4 \frac{mg}{l}$ beträgt.
 Berechnen Sie die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist. $t_2 - t_1 = 7,15 - 0,22 = 6,93$
 Welcher Wert kann als mittlere Konzentration innerhalb der ersten 12 Stunden angesehen werden
 (betrachten Sie hierzu ein flächengleiches Rechteck)? $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = 6,55 \left(\frac{mg}{l}\right)$

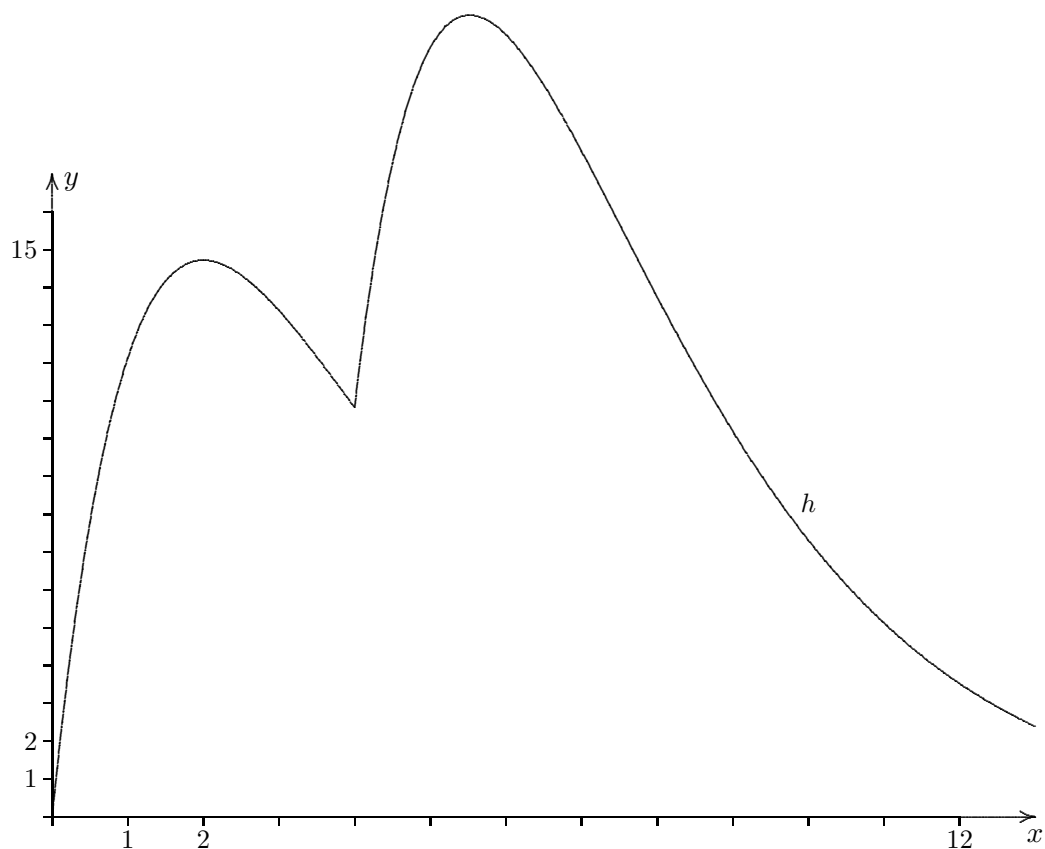
- b) Zum Zeitpunkt t_0 wird das Medikament am stärksten abgebaut.
 Beschreiben Sie quantitativ (also mit Zahlen) die Veränderung der Konzentration zu diesem Zeitpunkt. $f'(4) = -2,71$
 Ab dem Zeitpunkt $t = 4$ wird die Konzentration des Medikaments nun näherungsweise durch die Tangente an den Graphen von f an dieser Stelle beschrieben. Tangentengl. $y = -2,71x + 21,65$
 Bestimmen Sie damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist. $t = 8$

- c) Anstelle der Näherung aus Teilaufgabe b) wird nun wieder die Beschreibung der Konzentration durch f verwendet.
 Vier Stunden nach der ersten Einnahme wird das Medikament in der gleichen Dosierung erneut eingenommen. Es wird angenommen, dass sich dabei die Konzentrationen im Blut des Patienten addieren.

Skizzieren und erläutern kurz Sie den zeitlichen Verlauf der Gesamtkonzentration für $0 \leq t \leq 12$. Ermitteln Sie algebraisch den Zeitpunkt der maximalen Gesamtkonzentration (notwendige Bedingung genügt).

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leq t < 4 \\ f(t) + f(t-4) & t \geq 4 \end{cases}$$

$$t = \frac{2 + 6e^2}{1 + e^2} = 5,52$$



- d) Das Medikament wird nun in seiner Zusammensetzung verändert. Die Konzentration des Medikaments im Blut wird durch $g(t) = at \cdot e^{-bt}$ und $a > 0$ und $b > 0$ beschrieben.

Bestimmen Sie die Konstanten a und b , wenn die Konzentration vier Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert $10 \frac{mg}{l}$ erreicht.

$$g(4) = 10 \implies 4a \cdot e^{-4b} = 10$$

$$g'(4) = 0 \implies (a - 4ab) \cdot e^{-4b} = 0$$

$$a = 2,5e = 6,8 \quad \text{und} \quad b = 0,25$$

Konzentration eines Medikaments Ergänzung

Durch die Einnahme eines Medikamentes zum Zeitpunkt $t = 0$ gelangt ein bestimmter Wirkstoff in das Blut des Patienten. Die Wirkstoffkonzentration, die zum Zeitpunkt $t \in [0; 24]$ im Körper des Patienten ist, kann durch eine Funktion der Funktionenschar $f_k(t) = 20t \cdot e^{-kt}$, $k > 0$, beschrieben werden. Dabei wird die Zeit t in Stunden und die Wirkstoffkonzentration in $\frac{mg}{l}$ angegeben.

- a) Berechnen Sie die Extrempunkte der Funktionenschar sowie eine Gleichung der Ortslinie der Extrempunkte.
- b) Durch eine entsprechende Dosierung der Einnahmemenge kann man den Parameter k beeinflussen. Innerhalb welcher Grenzen muss k liegen, damit die maximale Wirkstoffkonzentration $50 \frac{mg}{l}$ nicht übersteigt?

Konzentration eines Medikaments Ergebnisse zur Ergänzung

Durch die Einnahme eines Medikamentes zum Zeitpunkt $t = 0$ gelangt ein bestimmter Wirkstoff in das Blut des Patienten. Die Wirkstoffkonzentration, die zum Zeitpunkt $t \in [0; 24]$ im Körper des Patienten ist, kann durch eine Funktion der Funktionenschar $f_k(t) = 20t \cdot e^{-kt}$, $k > 0$, beschrieben werden. Dabei wird die Zeit t in Stunden und die Wirkstoffkonzentration in $\frac{mg}{l}$ angegeben.

- a) Berechnen Sie die Extrempunkte der Funktionenschar sowie eine Gleichung der Ortslinie der Extrempunkte.

$$E\left(\frac{1}{k} \mid \frac{20}{k \cdot e}\right), \quad y = \frac{20}{e}t$$

- b) Durch eine entsprechende Dosierung der Einnahmemenge kann man den Parameter k beeinflussen. Innerhalb welcher Grenzen muss k liegen, damit die maximale Wirkstoffkonzentration $50 \frac{mg}{l}$ nicht übersteigt?

$$k \geq 0,147$$

Kraftstoffverbrauch

9. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = (x^2 - k + 1)e^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie die Funktionenschar im Hinblick auf folgende Aspekte:

Verhalten für $x \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$

Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen

zur Kontrolle: $f'_k(x) = (-x^2 + 2x + k - 1)e^{-x}$

b) Zeigen Sie, dass alle Extrempunkte auf dem Graphen einer Funktion g liegen, und bestimmen Sie $g(x)$. Untersuchen Sie, welche Punkte des Graphen von g nicht Extrempunkte der Funktionenschar f_k sind.

c) Der momentane Kraftstoffverbrauch (in $\frac{l}{min}$) eines Motors während eines 2-minütigen Testlaufs kann für $0 \leq x \leq 2$ (x in *min*) beschrieben werden durch die Funktion f_k und $0,5 \leq k \leq 0,9$. Dabei hängt der Parameter k von spezifischen Einstellungen des Motors ab.

i) Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Änderungsrate des momentanen Kraftstoffverbrauchs in Abhängigkeit vom jeweiligen Parameter k am größten ist.

ii) Der gesamte Kraftstoffverbrauch während des 2-minütigen Testlaufs soll nicht größer als $1 l$ sein. Untersuchen Sie, welche Einschränkungen sich hieraus für den Parameter $k \in [0,5; 0,9]$ ergeben.

Kraftstoffverbrauch Lösungshinweise

9. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = (x^2 - k + 1)e^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie die Funktionenschar im Hinblick auf folgende Aspekte:

Verhalten für $x \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$

Nullstellen, Extremstellen,

Wendestellen

zur Kontrolle: $f'_k(x) = (-x^2 + 2x + k - 1)e^{-x}$

$$E_1(1 + \sqrt{k} \mid 2(1 + \sqrt{k}) \cdot e^{-(1+\sqrt{k})})$$

$$E_2(1 - \sqrt{k} \mid 2(1 - \sqrt{k}) \cdot e^{-(1-\sqrt{k})})$$

$$f''_k(x) = (3 - 4x + x^2 - k)e^{-x}$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{1+k}, \quad x_2 = 2 - \sqrt{1+k}$$

b) Zeigen Sie, dass alle Extrempunkte auf dem Graphen einer Funktion g liegen, und bestimmen Sie $g(x)$. Untersuchen Sie, welche Punkte des Graphen von g nicht Extrempunkte der Funktionenschar f_k sind.

$$g(x) = 2xe^{-x}$$

Für $k = 0$ liegt kein Extremum vor, d. h. $P(1 \mid 2e^{-1})$ ist kein Extremum.

c) Der momentane Kraftstoffverbrauch (in $\frac{l}{min}$) eines Motors während eines 2-minütigen Testlaufs kann für $0 \leq x \leq 2$ (x in min) beschrieben werden durch die Funktion f_k und $0,5 \leq k \leq 0,9$. Dabei hängt der Parameter k von spezifischen Einstellungen des Motors ab.

i) Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Änderungsrate des momentanen Kraftstoffverbrauchs in Abhängigkeit vom jeweiligen Parameter k am größten ist. siehe Wendestellen

ii) Der gesamte Kraftstoffverbrauch während des 2-minütigen Testlaufs soll nicht größer als $1 l$ sein. Untersuchen Sie, welche Einschränkungen sich hieraus für den Parameter $k \in [0,5; 0,9]$ ergeben.

$$-11e^{-2} + ke^{-2} + 3 - k \leq 1 \implies k \in [0,59; 0,9]$$

Wasserspeicher

10. Der Inhalt eines Wasserspeichers wird durch die Funktion $B(t) = 2 + 0,6t(t - 3)e^{-1,6t}$ beschrieben. Dabei ist $B(t)$ der Inhalt in Millionen m^3 und t die Zeit in Monaten, Beobachtungsbeginn $t = 0$, -dauer 7 Monate.
- a) Wann war der Inhalt maximal und wie groß war er dann?
 - b) Wann war die Änderung des Inhalts extremal und wie groß war sie dann?
 - c) Nimmt der Inhalt am Ende des Beobachtungszeitraumes zu oder ab?
 - d) Wie groß ist der Mittelwert des Inhalts!

Wasserspeicher Ergebnisse

10. Der Inhalt eines Wasserspeichers wird durch die Funktion

$B(t) = 2 + 0,6t(t - 3)e^{-1,6t}$ beschrieben. Dabei ist $B(t)$ der Inhalt in Millionen m^3 und t die Zeit in Monaten, Beobachtungsbeginn $t = 0$, -dauer 7 Monate.

- a) Wann war der Inhalt maximal und wie groß war er dann? nach 3,75 Monaten 2,0042 Mio m^3
- b) Wann war die Änderung des Inhalts extremal und wie groß war sie dann? nach 1,009 Monaten
0,2665 Mio m^3 pro Monat
- c) Nimmt der Inhalt am Ende des Beobachtungszeitraumes zu oder ab? $B'(7) = -0,0003$
Abnahme
- d) Wie groß ist der Mittelwert des Inhalts! 1,9414 Mio m^3

