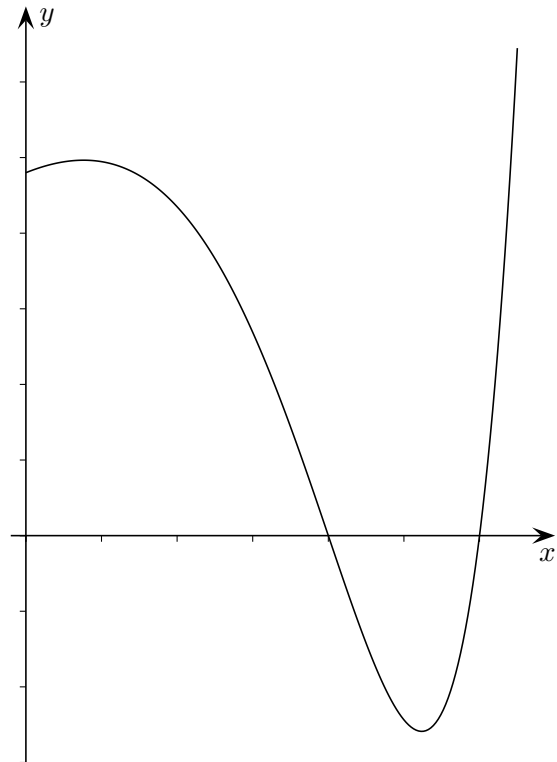


## Zu- und Abfluss Stausee



Ein Stausee ändert seine Wassermenge. Zunächst wird er mit Wasser gefüllt.

Die Zulaufratenfunktion ist gegeben durch  $f(x) = (x^2 - 10x + 24) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ ,  
 $0 \leq x \leq 6,5$ ,  $x$  in Tagen,  $f(x)$  in  $1000 \text{ m}^3$  pro Tag.

Eine negative Zulauftrate bedeutet, dass Wasser aus dem Stausee herausläuft.

- Berechnen Sie die Zeitpunkte, zu denen das Wasser weder ein- noch abfließt.  
Geben Sie die Zeitintervalle an, in denen Wasser zu- bzw. abläuft.
- Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Zulauftrate im betrachteten Intervall maximal ist.
- Welche Aussagen sind über die Änderung der Wassermenge zum Zeitpunkt  $x = 5$  möglich?
- Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich die Zulauftrate am stärksten ändert.
- Entscheiden Sie ohne Rechnung, ob es einen Zeitpunkt gibt, zu dem sich im Becken wieder die Anfangswassermenge befindet.
- In dem Stausee hat sich eine bestimmte Bakteriensorte eingelagert. Zum Zeitpunkt  $x = 0$  befinden sich bereits 5000 Bakterien im Stausee. Die Wachstumsratenfunktion der Bakterien ist gegeben durch  $w(x) = x^3 - 12x^2 + 35x$ . Dabei wird  $x$  wieder in Tagen angegeben und  $w(x)$  in 10000 Bakterien pro Tag. Ermitteln Sie die Anzahl der Bakterien nach 3 Tagen.

## Stausee Ergebnisse

- a)  $x = 4, x = 6, \dots$
- b) Wegen  $f(0) = 24 < 24,826 < 32,238 = f(6,5)$  nimmt  $f$  sein absolutes Maximum auf dem Rand des Definitionsbereichs an, nämlich bei  $x = 6,5$ .
- c) Wegen  $f(5) = -12,182$  nimmt die Wassermenge zum Zeitpunkt  $x = 5$  stark ab. Wäre die Zulauftrate einen ganzen Tag lang so niedrig wie zum Zeitpunkt  $x = 5$ , würden  $12182 \text{ m}^3$  Wasser ablaufen.
- d) Aus  $f'(0) = 2, f'(4) = -14,778$  und  $f'(6,5) = 93,490$  ist ersichtlich, dass sich die Zulauftrate zum Zeitpunkt  $x = 6,5$  am stärksten ändert.
- e) Die Menge zufließenden Wassers wird repräsentiert durch die Flächen oberhalb der  $x$ -Achse, die Menge abfließenden Wassers durch die Fläche unterhalb der  $x$ -Achse. Da letztere ersichtlich wesentlich kleiner ist als die Fläche, die für den Zulauf im Intervall  $[0, 4]$  steht, wird die Anfangswassermenge nicht wieder erreicht.
- f) 702500 Bakterien

# Eimer

Ein Eimer, der am Boden ein Loch hat, wird durch einen konstanten Zufluss befüllt. Mit zunehmender Füllung steigt der Wasserdruck am Boden und damit auch der Wasserverlust. Die Wassermenge  $f_k$  (in Liter) im Eimer kann als Funktion der Zeit  $x$  (in Stunden) folgendermaßen beschreiben werden:

$$f_k(x) = k \cdot (e - e^{-x}), \quad k > 0$$

(Die Modellierung mit einem einzigen Parameter ist sehr verengt. Der Eimer ist zur Zeit  $x = 0$  nicht leer.)

- a) Untersuchen Sie die Funktionsschar für  $x \in \mathbb{R}$  (Schnittpunkte mit den Achsen, Extrem- und Wendepunkte, Asymptote) und skizzieren Sie zwei Vertreter der Schar. Kommentieren Sie auch die geometrische Beziehung der Scharkurven.
- b) Zeigen Sie, dass die Funktionen  $f_k$  eine DGL vom Typ  $f'(x) = af(x) + b$  erfüllen. Begründen Sie, dass die Funktionen jeweils beschränktes Wachstum beschreiben.
- c) Wie groß ist der konstante Zufluss?  
Was passiert langfristig, falls der Zulauf halbiert wird?
- d) Bestimmen Sie  $k$  für eine Anfangsmenge im Eimer von 6 Liter.
- e) Berechnen Sie für eine beliebige Anfangsmenge den Zeitpunkt, in der die Hälfte der Anfangsmenge hinzugekommen ist. Ist der Zeitpunkt von  $k$  abhängig?
- f) Ermitteln Sie für  $f_k$  die Tangenten an der Stelle  $x = 0$ . Haben diese Tangenten einen gemeinsamen Punkt?

# Eimer

Ein Eimer, der am Boden ein Loch hat, wird durch einen konstanten Zufluss befüllt. Mit zunehmender Füllung steigt der Wasserdruck am Boden und damit auch der Wasserverlust. Die Wassermenge  $f_k$  (in Liter) im Eimer kann als Funktion der Zeit  $x$  (in Stunden) folgendermaßen beschreiben werden:

$$f_k(x) = k \cdot (e - e^{-x}), \quad k > 0$$

(Die Modellierung mit einem einzigen Parameter ist sehr verengt. Der Eimer ist zur Zeit  $x = 0$  nicht leer.)

- a) Untersuchen Sie die Funktionsschar für  $x \in \mathbb{R}$  (Schnittpunkte mit den Achsen, Extrem- und Wendepunkte, Asymptote) und skizzieren Sie zwei Vertreter der Schar.

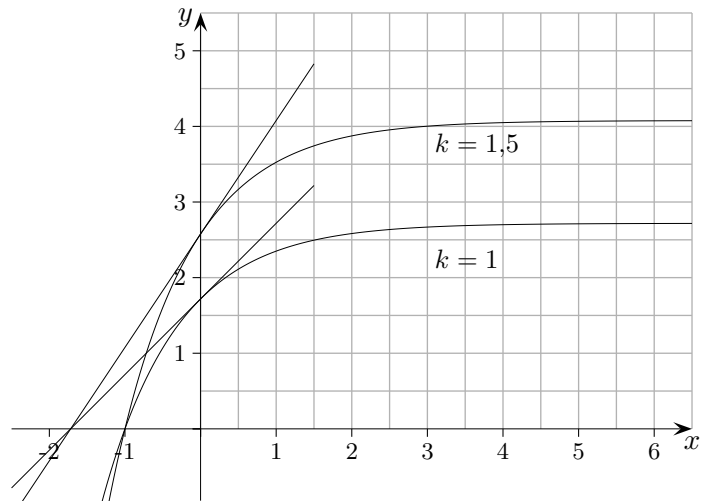
Kommentieren Sie auch die geometrische Beziehung der Scharkurven.

Nullstelle  $x = -1$ , Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse  $S(0 | k(e - 1))$

keine Extrema und Wendepunkte

Asymptote  $y = k \cdot e$

Die Graphen gehen durch Streckung in  $y$ -Achsenrichtung auseinander hervor.



- b) Zeigen Sie, dass die Funktionen  $f_k$  eine DGL vom Typ  $f'(x) = af(x) + b$  erfüllen. Begründen Sie, dass die Funktionen jeweils beschränktes Wachstum beschreiben.  $a = -1, b = ke$
- c) Wie groß ist der konstante Zufluss?  $f'(-1) = b = ke$   
 $x = -1$  ist der (gedachte) Zeitpunkt, zu dem der Eimer noch leer war.  
 Was passiert langfristig, falls der Zulauf halbiert wird? Füllmenge halbiert sich.
- d) Bestimmen Sie  $k$  für eine Anfangsmenge im Eimer von 6 Liter.  $k = 3,5$
- e) Berechnen Sie für eine beliebige Anfangsmenge den Zeitpunkt, in der die Hälfte der Anfangsmenge hinzugekommen ist. Ist der Zeitpunkt von  $k$  abhängig?  $f_k(x) = 1,5 \cdot f_k(0), x = 1,96$  Stunden
- f) Ermitteln Sie für  $f_k$  die Tangenten an der Stelle  $x = 0$ .  $y = kx + k(e - 1)$   
 Haben diese Tangenten einen gemeinsamen Punkt?  $P(1 - e | 0)$

## Zu- und Abfluss

Die DGL des beschränkten Wachstums  $f'(x) = k \cdot (G - f(x))$

lässt sich leicht umformen zu:  $f'(x) = -kf(x) + k \cdot G$

Werden undichte Behälter befüllt, so setzt sich die Änderung (des Flüssigkeitsvolumens, der Füllhöhe) aus einem zum Bestand proportionalen Anteil  $-kf(x)$  und einer konstanten Zufussrate  $k \cdot G$  zusammen. Sie ergibt sich auch als Steigung in der Nullstelle von  $f$  (siehe umgeformte DGL), dem Zeitpunkt, an dem der Behälter noch leer war.

Der Flüssigkeitsverlust  $-kf(x)$  ist aufgrund des Drucks proportional zur Füllhöhe bzw. zum Volumen. Verliert ein Behälter z.B. 5% pro (kleiner) Zeiteinheit seines Volumens, bzw. der Füllhöhe, so ist  $k \approx 0,05$ .

Derartige Überlegungen können stets bei Vorgängen angestellt werden, bei denen sich exponentieller Zuwachs/bzw. Abnahme und linearer Zuwachs/bzw. Abnahme additiv überlagern, z.B. bei der regelmäßigen Medikamenteneinnahme oder der Fischzucht mit jährlichem Abfischen.

Die Lösungsfunktion der DGL des beschränkten Wachstums lautet (bekanntlich)  $f(x) = G - ae^{-kx}$ . Zufluss-Abfluss-Vorgänge werden mit der DGL  $f'(x) = -kf(x) + b$  beschrieben.

Die Konstante  $k$  ist ersichtlich unabhängig von  $b$ .

Für  $b = 0$  beschreibt  $g'(x) = -kg(x)$  einen exponentiellen Abnahmeprozess, nämlich  $g(x) = g(0)e^{-kx}$ .

Der diskrete Übergang von  $g(x)$  zu  $g(x+1)$  kann in Prozent (unabhängig von  $x$ ) bezogen auf die Zeiteinheit angegeben werden.

$$\frac{p}{100} = \frac{g(x) - g(x+1)}{g(x)} \iff g(x+1) = \left(1 - \frac{p}{100}\right)g(x)$$

Der Zusammenhang lautet:  $e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$

Beispiel:

Die tägliche Dosis eines Wirkstoffs (wird vom Blut aufgenommen) beträgt  $2 \text{ mg}$ .

Der Wirkstoff wird täglich zu 40% abgebaut.

Bei einem Medikamentenabbau, der nur wenige Tage anhält, sollte die Zeiteinheit soweit verkleinert werden, z.B. auf Stunden, dass  $k$  eine anschauliche Bedeutung gewinnt.

# Ähnliches

Die tägliche Dosis eines Wirkstoffs (wird vom Blut aufgenommen) beträgt  $2 \text{ mg}$ .  
Der Wirkstoff wird täglich zu  $40\%$  abgebaut.

$$f'(x) = -kf(x) + b$$

$40\%$  bedeuten hier nicht:

$$40\% = \frac{f(x) + b - f(x+1)}{f(x)}$$

Man kann sich fragen, ob es überhaupt eine differenzierbare Funktion  $g$  gibt, die

$$40\% = \frac{g(x) + b - g(x+1)}{g(x)} \iff g(x+1) = g(x) + b - 40\%g(x)$$

erfüllt. Der Bestand wird jährlich um  $b$  vergrößert und am Ende des Jahres um  $40\%$  von  $g(x)$  (Bestand am Anfang des Jahres) verringert. Der Neuzugang  $b$  (vielleicht Jungtiere) bleibt 1 Jahr verschont.

Es verwundert, aber das Einsetzen bestätigt:

$$g(x) = G - a \cdot e^{-kx}, \quad k = -\ln(0,6), \quad G = \frac{b}{40\%}, \quad (\text{einziger Unterschied!})$$

$g(0) = A$  liefert  $a = G - A$ .

Die zugehörige DGL ist:  $g'(x) = -kg(x) + kG$ .

Bei Zu- und Abfluss-Vorgängen ist die Änderungsrate des Abflusses aufgrund der physikalischen Gegebenheiten nur vom Bestand abhängig.

Die Funktion  $g$  erfüllt diese Eigenschaft nicht, da sie zu  $G = \frac{b}{k}$  führen würde.

