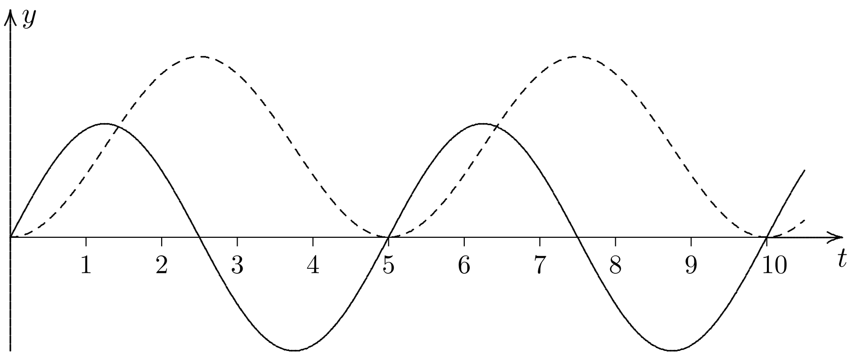
Trigonometrische Funktionen Luftvolumen

Die momentane Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge eines Menschen kann durch die Funktion f mit $f(t) = \frac{1}{2}\sin(\frac{2}{5}\pi t)$ modelliert werden, $f(t)$ in Litern pro Sekunde, Zeit t in Sekunden. Wir nehmen vereinfachend an, dass zur Zeit $t = 0$ keine Luft in der Lunge ist.

a) Welche inhaltliche Bedeutung hat die Funktion F mit $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$?
   Zeigen Sie, dass $F(t) = \frac{5}{4\pi} \cdot \left[1 - \cos(\frac{2\pi}{5}\,t)\right]$ gilt.



b) Das Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge und den zeitlichen Verlauf der momentanen Änderungsrate des Luftvolumens.
   Welche der beiden Kurven beschreibt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge?
   Bestimmen Sie das maximale und das minimale Luftvolumen in der Lunge.
   Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen die Lunge jeweils die Hälfte des maximalen Luftvolumens enthält.

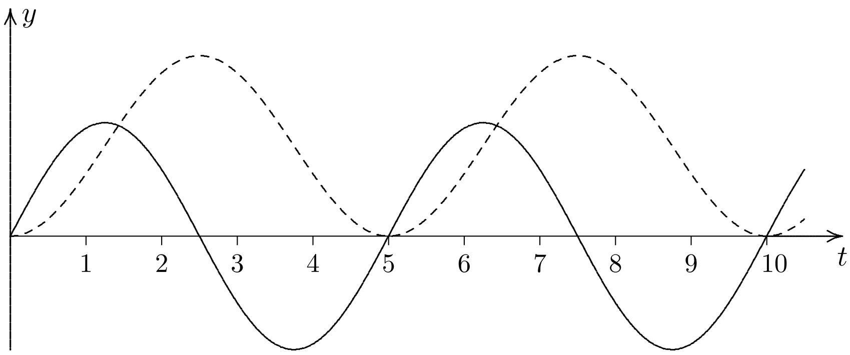
c) Wie groß ist die mittlere Änderungsrate des Luftvolumens während der Zeitintervalle [0; 2,5], [2,5; 5] und [0; 5]?
   Wie groß ist das mittlere Luftvolumen in der Lunge während der Zeitintervalle [0; 2,5], [2,5; 5] und [0; 5]?

Luftvolumen   Lösungshinweise

Die momentane Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge eines Menschen kann durch die Funktion f mit $f(t) = \frac{1}{2}\sin(\frac{2}{5}\pi t)$ modelliert werden, $f(t)$ in Litern pro Sekunde, Zeit t in Sekunden. Wir nehmen vereinfachend an, dass zur Zeit $t = 0$ keine Luft in der Lunge ist.

a) Welche inhaltliche Bedeutung hat die Funktion F mit $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$? — Luftvolumen

Zeigen Sie, dass $F(t) = \frac{5}{4\pi} \cdot \left[1 - \cos(\frac{2\pi}{5}\,t)\right]$ gilt. — $F'(t) = f(t)$



b) Das Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge und den zeitlichen Verlauf der momentanen Änderungsrate des Luftvolumens.
Welche der beiden Kurven beschreibt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge?

Graph gestrichelt

Bestimmen Sie das maximale und das minimale Luftvolumen in der Lunge. — $F(2{,}5) = 0{,}8$

Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen die Lunge jeweils die Hälfte des maximalen Luftvolumens enthält.

$1{,}25 + n \cdot 2{,}5, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
beachte die Symmetrie

c) Wie groß ist die mittlere Änderungsrate des Luftvolumens während der Zeitintervalle [0; 2,5], [2,5; 5] und [0; 5]?

[0; 2,5]	$\frac{1}{2{,}5} \cdot F(2{,}5) = 0{,}3$
[2,5; 5]	$-0{,}3$
[0; 5]	0

Für die letzten beiden Intervalle ist das Ergebnis unmittelbar zu erkennen.

Wie groß ist das mittlere Luftvolumen in der Lunge während der Zeitintervalle [0; 2,5], [2,5; 5] und [0; 5]?

[0; 2,5]	$\frac{1}{2{,}5}\int_0^{2{,}5} F(t)\,dt = 0{,}4$
[2,5; 5]	0,4
[0; 5]	0,4

Für die letzten beiden Intervalle ist das Ergebnis unmittelbar zu erkennen.

Schwimmtraining

Baden-Württemberg 2004

Die Geschwindigkeit eines Schwimmers schwankt periodisch um einen Wert.
Messungen beim Training haben gezeigt, dass sich die Bewegung näherungsweise durch die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion

$$v(t) = 0{,}4 \cdot \sin(12t) + 1{,}5$$

beschreiben lässt (Zeit t in s, Geschwindigkeit $v(t)$ in m/s).

a) Bestimmen Sie die Periodendauer.

b) Zwischen welchen Werten schwankt die Geschwindigkeit des Schwimmers?

c) Skizzieren Sie den Graphen von $v(t)$.

d) Zu welchen Zeitpunkten nimmt die Geschwindigkeit am stärksten ab?

e) Welchen Weg legt der Schwimmer innerhalb von 50 Perioden zurück?

Ergebnisse:

a) $T = 0{,}52\ [s]$

b) $[1{,}1; 1{,}9]$

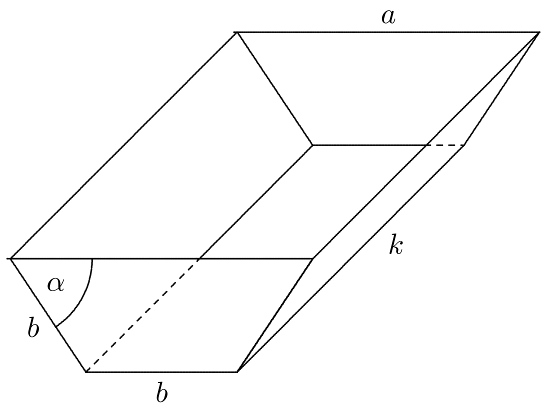
c)

d) $t = \frac{\pi}{12} + n\frac{\pi}{6}, \quad n = 1, 2, \ldots$

e) $s = 39{,}27\ [m]$.

Blumentrog

Eine Firma stellt (oben offene) prismaförmige Blumentröge der Länge k und der Breite b mit trapezförmigem symmetrischem Querschnitt her.



a) Weisen Sie nach, dass sich der Flächeninhalt der Querschnittsfläche durch die Funktion $A(\alpha) = b^2 \cdot (1 + \cos\alpha) \cdot \sin\alpha$ darstellen lässt.

b) Für welches α hat ein Trog mit quadratischer Pflanzfläche und der Breite $b = 0{,}5\,m$ maximales Volumen?

c) Für welche Werte von α benötigt man zum vollständigen Befüllen eines Troges mit quadratischer Pflanzfläche und $b = 0{,}5\,m$ mindestens vier Säcke Blumenerde von je 80 Liter Inhalt?

b) $k = a = b \cdot (1 + 2\cos\alpha)$
$V(\alpha) = A(\alpha) \cdot k = 0{,}5^3 \cdot \sin\alpha \cdot (1 + \cos\alpha) \cdot (1 + 2\cos\alpha)$
$\alpha = 45^\circ$ (GTR)

c) $V(\alpha) \geq 0{,}32\ [m^2]$
$30{,}2^\circ \leq \alpha \leq 60{,}9^\circ$ (GTR)

Sonnenscheindauer

In Freiburg im Breisgau, der wärmsten Stadt in Deutschland, scheint die Sonne im März ca. 100 Stunden; zwei Monate später sind es ca. 200 Stunden. Die Sonnenscheindauer des Monats soll in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Monaten, $t = 0$ im April) modellhaft durch eine Funktion

$$S(t) = a + b \cdot \sin(\tfrac{\pi}{6}t),\ a, b \in \mathbb{R}\ (S(t) \text{ in Stunden}) \text{ mit } t \in [0; 12]$$

beschrieben werden.

a) Ermitteln Sie die beiden Parameter a und b.

b) Bestimmen Sie die Sonnenscheindauer für den September.

c) Berechnen Sie mit dem GTR und algebraisch die Extrempunkte von S im angegebenen Intervall.

a) $a = 150$ und $b = 100$

b) $S(5) = 200$

c) $Max(3 \mid 250)$, $Min(9 \mid 50)$