

Trigonometrische Funktionen

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2 \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2$

Ihr Graph sei K .

a) Skizzieren Sie K im Intervall $[0, 4]$.

Geben Sie die Periode von f an.

Geben Sie alle Hoch- und Tiefpunkte von K auf ganz \mathbb{R} an.

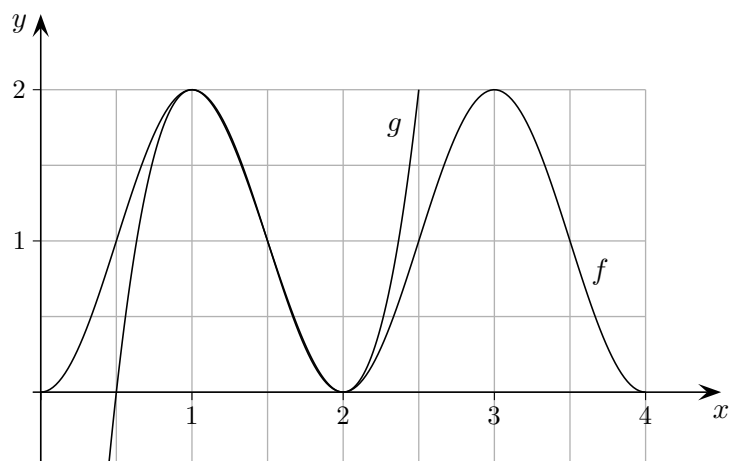
Für welche Werte von x nimmt f im Intervall $[0, 2]$ den Wert 1 an?

b) Die Funktion f kann auch in der Form $f(x) = a - \cos(bx)$ dargestellt werden. Bestimmen Sie a und b .

c) K und die x -Achse begrenzen zwischen benachbarten Nullstellen jeweils eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt einer solchen Fläche exakt.

d) Der Graph einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades hat in $P(1 | 2)$ einen Hochpunkt und in $Q(2 | 0)$ einen Tiefpunkt. Bestimmen Sie einen Funktionsterm für g .

An welchen Stellen im Intervall $[1, 2]$ weichen die Funktionswerte von f und g am stärksten voneinander ab?



1. a)

Periode $p = 2$

$H(2k + 1 \mid 2), k \in \mathbb{Z}$

$T(2k \mid 0), k \in \mathbb{Z}$

$x_1 = 0,5$ und $x_1 = 1,5$

b) $f(0) = 0 \implies a = 1$

$2 = p = \frac{2\pi}{b} \implies b = \pi$

$f(x) = 1 - \cos(\pi \cdot x)$

c) $A = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (1 - \cos(\pi \cdot x)) dx = \left[x - \frac{1}{\pi} \sin(\pi \cdot x) \right]_0^2 = 2$

d) Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Bedingungen:

1. $g(1) = 2$

2. $g'(1) = 0$

3. $g(2) = 0$

4. $g'(2) = 0$

1. $a + b + c + d = 2$

2. $3a + 2b + c = 0$

3. $8a + 4b + 2c + d = 0$

4. $12a + 4b + c = 0$

Die Funktion lautet: $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8$

Maximalstellen für $d(x) = |f(x) - g(x)|$ lauten: $x_1 = 1,28$ und $x_1 = 1,72$
 $d_{\max} = 0,02$.

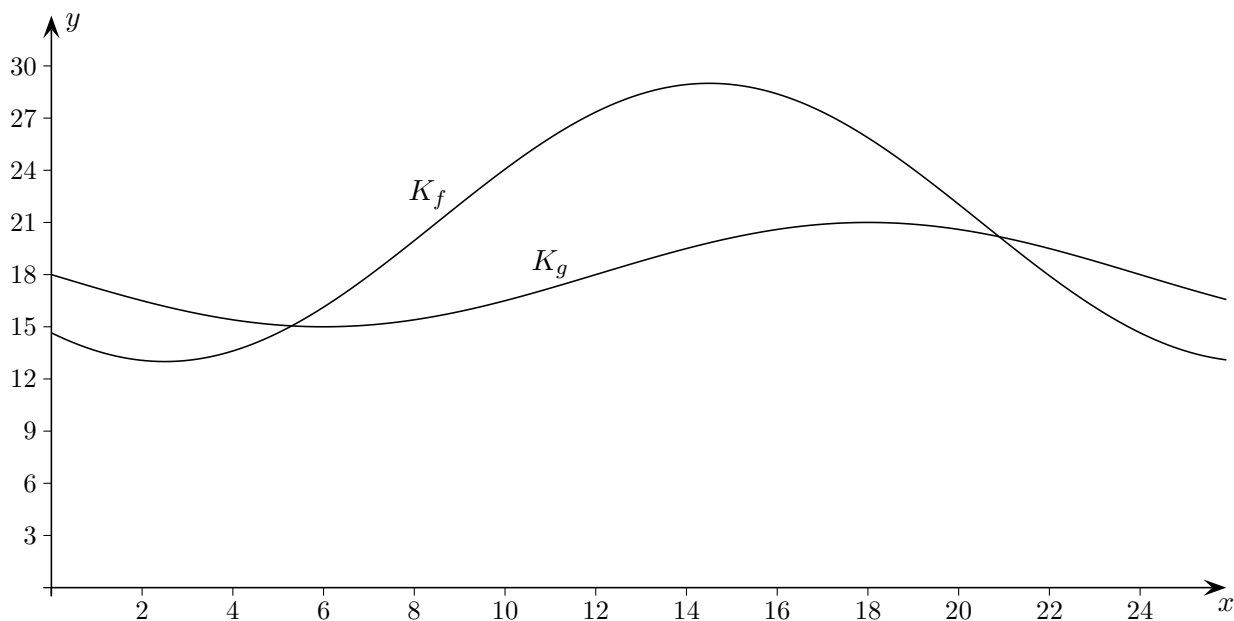
Trigonometrische Funktionen

2. Der Temperaturverlauf außerhalb eines Hauses während eines Tages kann durch eine Funktion

$$f(x) = 8 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x - 8,5)\right] + 21, \quad 0 \leq x \leq 24$$

beschrieben werden (x in Stunden, $f(x)$ in $^{\circ}\text{C}$).

Die Abbildung zeigt den Graphen K_f von f sowie den innerhalb des Hauses gemessenen Temperaturverlauf K_g .



- a) Berechnen Sie, zu welchen Uhrzeiten die Außentemperatur minimal bzw. maximal ist. Wie viele Stunden an diesem Tag beträgt die Außentemperatur höchstens 22°C ? Wann ist der Temperaturanstieg im Freien am größten? Bestimmen Sie die durchschnittliche Temperatur im Freien zwischen 6 und 18 Uhr.
- b) Bestimmen Sie einen Term der Funktion g , der den Temperaturverlauf K_g wiedergibt. Beschreiben Sie, wie K_g aus dem Schaubild der Sinusfunktion mit $y = \sin x$ entsteht. Geben Sie eine mögliche Ursache für die zeitliche Verschiebung der beiden Temperaturverläufe K_f und K_g an. Zu welcher Uhrzeit ist der Unterschied zwischen Innen- und Außentemperatur am größten?
- c) Für den folgenden Tag wird vermutet, dass der Temperaturverlauf außerhalb des Hauses durch eine Funktion h mit

$$h(x) = 10 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x - 8,5)\right] + ax + b, \quad 24 \leq x \leq 48$$

beschrieben werden (x in Stunden, $h(x)$ in $^{\circ}\text{C}$).

Dabei stimmen zum Zeitpunkt $x = 24$ sowohl die durch f und h beschriebenen Temperaturen als auch ihre momentanen Änderungsraten überein. Ermitteln Sie a und b .

Begründen Sie, warum die durchschnittliche Außentemperatur am zweiten Tag nur durch den Term $ax + b$ bestimmt wird.

2. a) Nach 2,5 Stunden (um 2:30 Uhr) beträgt die minimale Außentemperatur $13^\circ C$, nach 14,5 Stunden (um 14:30 Uhr) beträgt die maximale Außentemperatur $29^\circ C$.

$$x \leq 8,98 \text{ und } x \geq 20,02$$

$$8,98 + (24 - 20,02) = 13 \text{ [Stunden]}$$

Der Temperaturanstieg im Freien ist bei $x = 8,5$ am größten.

Durchschnittliche Temperatur zwischen 6 und 18 Uhr beträgt $25,0^\circ C$.

- b) Ansatz: $g(x) = a \cdot \sin[b(x + c)] + d$,

Der Graph von g ist um 18 nach oben verschoben, also $d = 18$.

Die Amplitude beträgt $a = 3$.

Die Periode von g beträgt 24 und damit gilt $24 = \frac{2\pi}{b} \implies b = \frac{\pi}{12}$

Der Graph ist um 12 nach rechts verschoben, also $c = -12$.

$$g(x) = 3 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x - 12)\right] + 18$$

Der Graph von g entsteht aus der Sinusfunktion durch folgende Schritte:

- 1) Streckung mit dem Faktor $a = 3$ in y -Richtung
- 2) Streckung mit dem Faktor $\frac{12}{\pi}$ in x -Richtung (Kehrwert!, beachte die Perioden 2π und 24)
- 3) Verschiebung um 12 nach rechts
- 4) Verschiebung um 18 nach oben

Die Ursache für die zeitliche Verschiebung liegt darin begründet, dass eine Temperaturänderung im Freien sich erst zeitversetzt im Haus bemerkbar macht.

Größter Unterschied zwischen Innen- und Außentemperatur:

Die Differenz wird dargestellt durch die Funktion $d(x) = |f(x) - g(x)|$.

Maximum an der Stelle $x = 13,1$, also um 13:06 Uhr.

- c) $h(24) = f(24) \iff 24a + b = 22,587$

$$h'(24) = f'(24) \iff a - 0,319 = 0$$

$$\implies a = 0,32 \text{ und } b = 14,9$$

$$D = \frac{1}{24} \int_{24}^{48} \left(\underbrace{10 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x - 8,5)\right]}_{\text{Periode } p = 24, \text{ Integral ist Null}} + ax + b \right) dx$$

Periode $p = 24$, Integral ist Null

Trigonometrische Funktionen

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 2\right) \cdot \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f im Intervall $\left[-\frac{3}{2}\pi \mid \frac{5}{2}\pi\right]$.

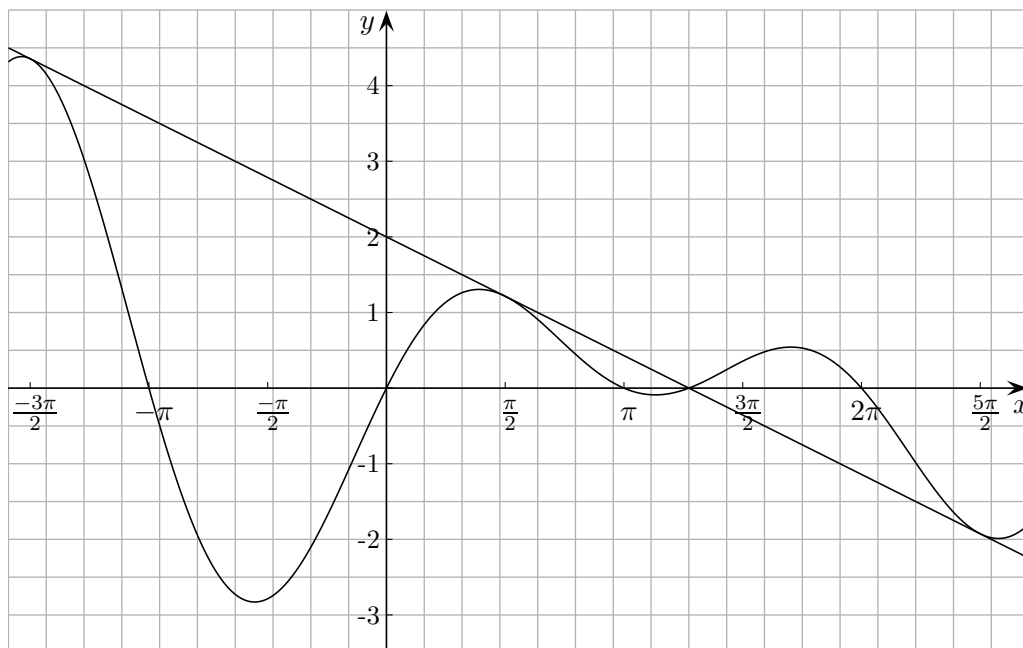
b) Zeigen Sie algebraisch, dass die Gerade g mit $y = -\frac{1}{2}x + 2$ im Punkt $P\left(\frac{\pi}{2} \mid f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ Tangente für den Graphen von f ist.

Untersuchen Sie, ob die Gerade g noch für weitere Punkte des Graphen von f Tangente ist.

c) Zeigen Sie, dass gilt: $f''(x) + f(x) = -\cos(x)$

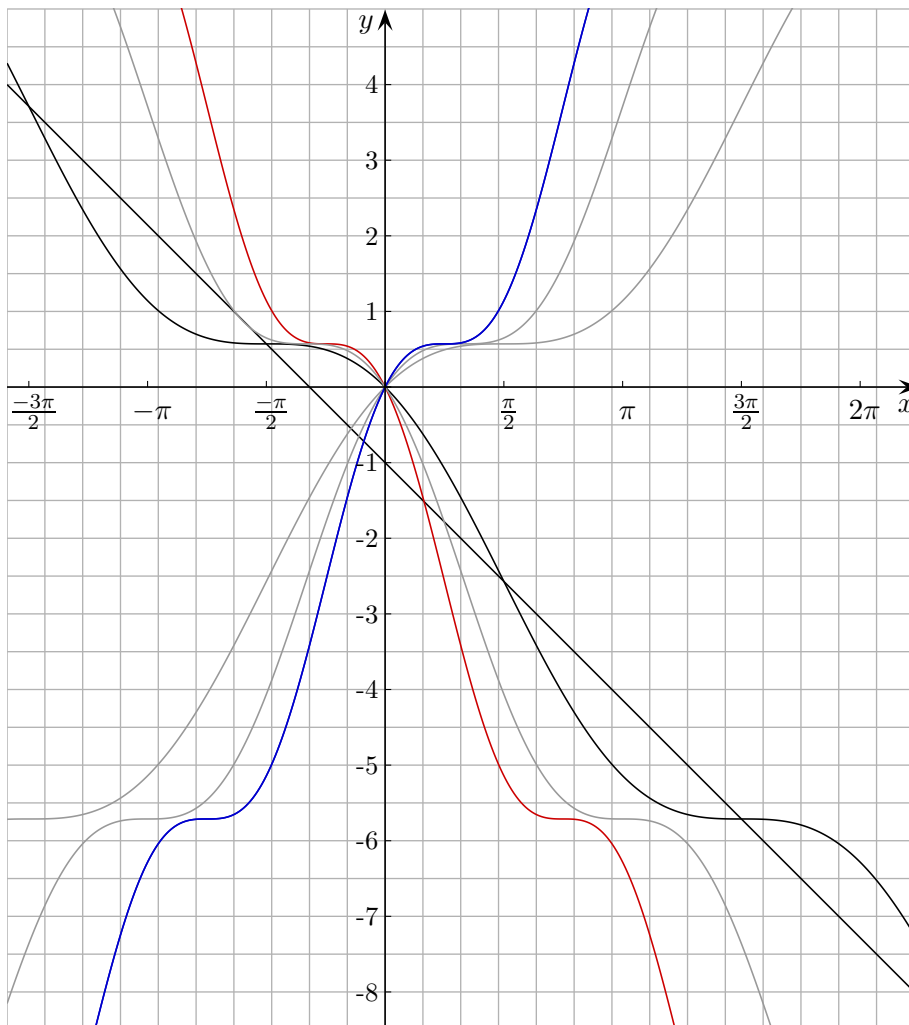
und begründen Sie damit (durch Integration beider Seiten):

$$\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x) + \left(\frac{1}{2}x - 2\right) \cdot \cos(x) + C$$



Trigonometrische Funktionen

4. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = \cos(kx) - kx - 1$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \in \mathbb{R}$.
- Durch welche Abbildungen gehen die Graphen von f_k aus dem Graph von f_1 hervor?
 - Begründen Sie: Die Graphen von f_k besitzen genau eine Nullstelle. Ermitteln Sie diese.
 - Untersuchen Sie die Schar auf Extrema und Wendepunkte.
 - Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, den der Graph von f_1 und die Gerade $y = -x - 1$ für $0 \leq x \leq 2\pi$ einschließen.
 - Zeigen Sie, dass f_1 punktsymmetrisch bezüglich $P(\frac{3}{2}\pi \mid f_1(\frac{3}{2}\pi))$ ist.
 - Die Gerade $y = -kx - 1$ und der Graph von f_k schließen zwischen zwei aufeinander folgenden Schnittpunkten eine Fläche A ein. Ermitteln Sie den Wert für k , damit gilt: $A = 4 \text{ FE}$.



Roofls

Trigonometrische Funktionen

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = \cos(kx) - kx - 1$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Durch welche Abbildungen gehen die Graphen von f_k aus dem Graph von f_1 hervor?

Streckung/Stauchung in x -Achsenrichtung für $k > 0$
Der Graph von f_{-k} geht durch y -Achsen-Spiegelung aus dem Graphen von f_k hervor.
Dieses wird im Weiteren häufig verwendet.

b) Begründen Sie: Die Graphen von f_k besitzen genau eine Nullstelle. Ermitteln Sie diese.

Bed. für f_1 : $\cos(x) = x + 1$, $x = 0$

c) Untersuchen Sie die Schar auf Extrema und Wendepunkte.

$$f_k''(x) = -\cos(kx) \cdot k^2$$

$$W\left(\frac{\pi}{2k} + z\frac{\pi}{k} \mid \dots\right), z \in \mathbb{Z}$$

d) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, den der Graph von f_1 und die Gerade $y = -x - 1$ für $0 \leq x \leq 2\pi$ einschließen.

$$A = 4$$

e) Zeigen Sie, dass f_1 punktsymmetrisch bezüglich $P\left(\frac{3}{2}\pi \mid f_1\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right)$ ist.

$$g(x) = f_1\left(x + \frac{3}{2}\pi\right) = \cos\left(x + \frac{3}{2}\pi\right) - \left(x + \frac{3}{2}\pi\right) - 1 = \sin(x) - x - \frac{3}{2}\pi - 1$$

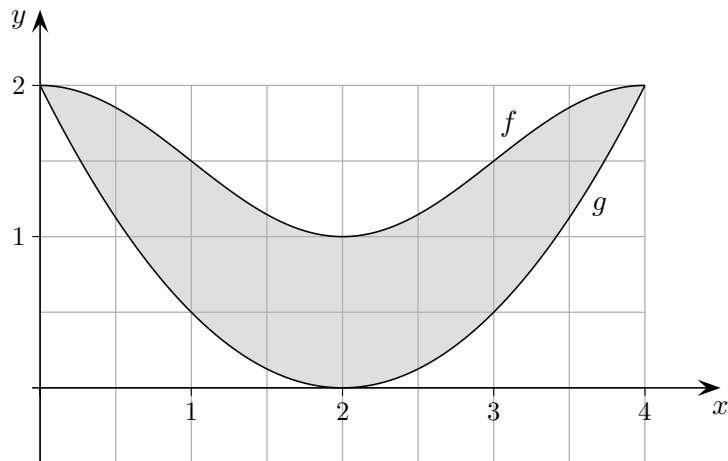
$$h(x) = \sin(x) - x \text{ ist punktsymmetrisch zum Ursprung}$$

$$\text{beachte: } g(0) = -\frac{3}{2}\pi - 1 = f_1\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

f) Die Gerade $y = -kx - 1$ und der Graph von f_k schließen zwischen zwei aufeinander folgenden Schnittpunkten eine Fläche A ein. Ermitteln Sie den Wert für k , damit gilt: $A = 4$ FE.

$$x_1 = \frac{\pi}{2k}, \quad x_2 = \frac{3}{2k}\pi$$

Für $k = 1$ gilt: $A = 2$. Daher muss $k = \frac{1}{2}$ sein.



- a) Wie groß ist der Inhalt der Fläche zwischen den Graphen der trigonometrischen Funktion f und der Parabel g ?
- b) Unter welchem Winkel treffen sich die Graphen bei $x = 4$?

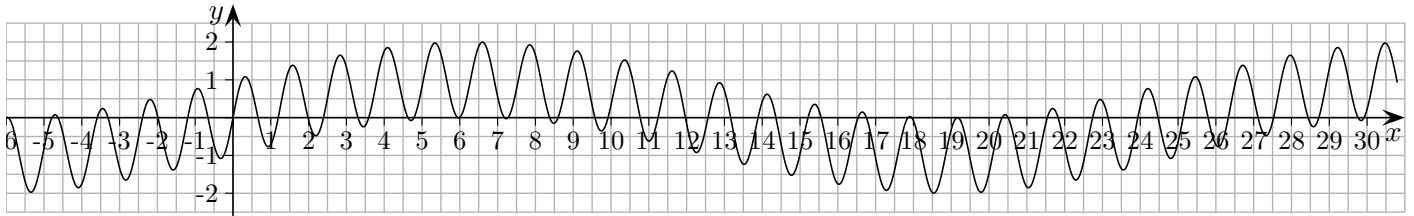
a) $f(x) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{3}{2}$

$$g(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2$$

$$A = \frac{10}{3} \text{ FE}$$

b) $\alpha = 63,4^\circ$

Gemeinsame Periode



Abgebildet ist der Graph von $f(x) = \sin(ax) + \sin(bx)$ für $a = 5$ und $b = \frac{1}{4}$.
Wie kann die Periode aus a und b bestimmt werden?

Die Perioden der Teilfunktionen lauten $p_1 = \frac{2}{5}\pi$ und $p_2 = 8\pi$.

Für eine Funktion mit der Periode p ist auch ein ganzzahliges Vielfaches von p ein Periodenintervall.

Die Periode von f ist daher das kleinste ganzzahlige Vielfache von p_1 und p_2 , hier also 8π .

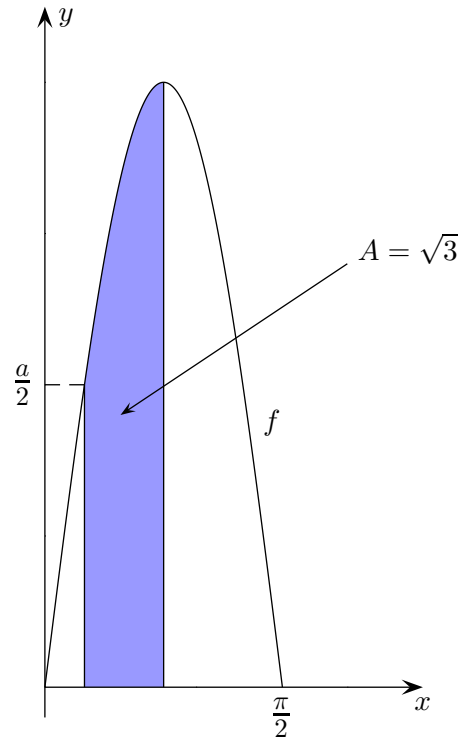
Die (in Ni mögliche) Ermittlung zweier Maxima mit dem GTR ist etwas mühsam.

Mit f besitzt auch f' die Periode p .

Für die obige Funktion f gilt: $f'(0) = f'(8\pi) = \frac{21}{4}$ und für $0 < x < 8\pi$ ist $f'(x) < \frac{21}{4}$.

Dies belegt, dass das kürzeste Periodenintervall die Länge 8π hat.

Rückwärtsrechnen



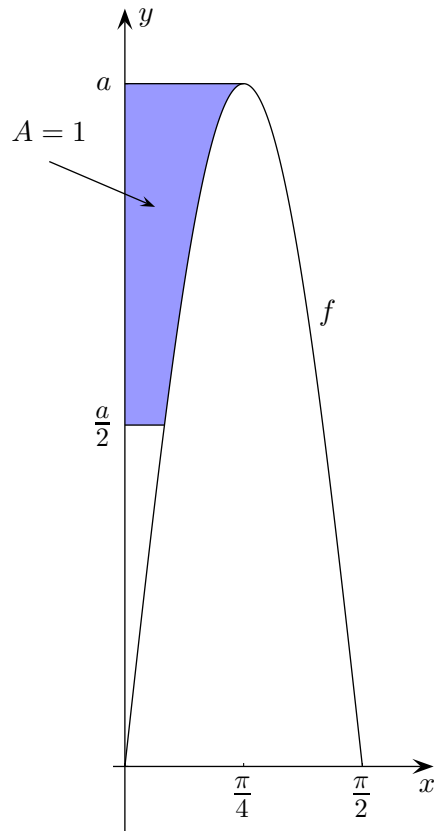
Zu sehen ist der Graph von $f(x) = a \cdot \sin(bx)$.
Bestimme a und b .

Periodenlänge $\pi \implies b = 2$

untere Integrationsgrenze: $f(x) = \frac{a}{2} \implies x = \frac{\pi}{12}$

$$A = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \sqrt{3} \implies a = 4$$

Rückwärtsrechnen



Zu sehen ist der Graph von $f(x) = a \cdot \sin(bx)$.
Bestimme a und b .

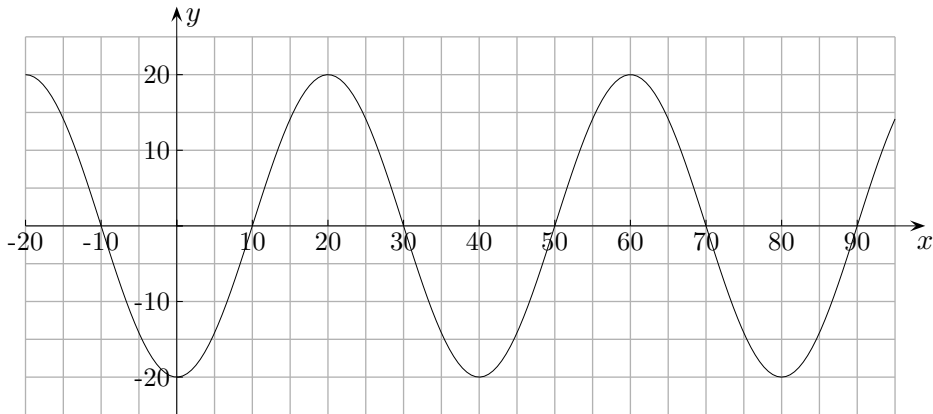
Periodenlänge $p = \pi \implies b = 2$

$$a \cdot \left[\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{12} - \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) dx \right] = 1 \implies a = 4,515$$

Roolfs

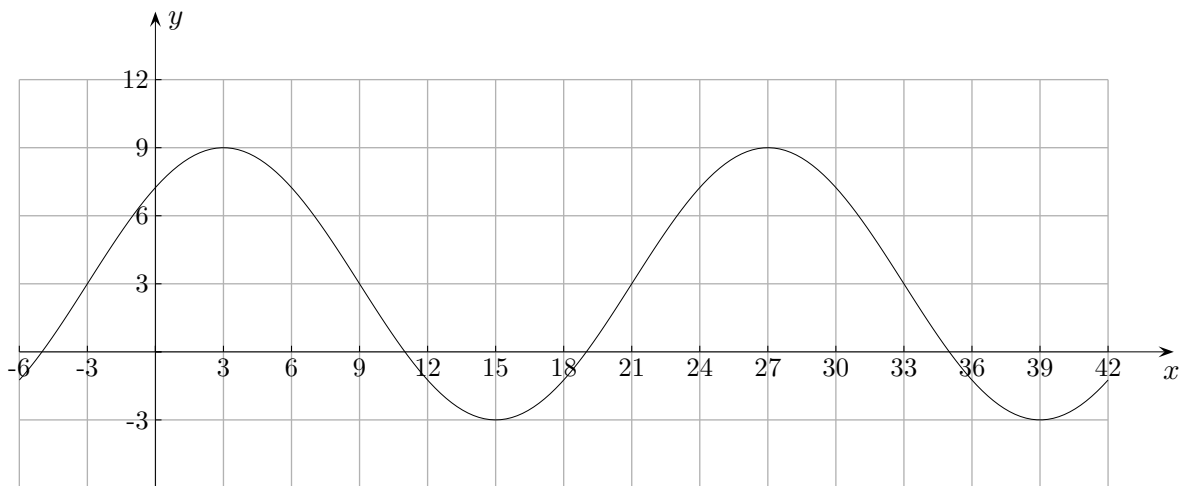
Trigonometrische Funktionen

a)



Der Graph von $f(x) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}x - \frac{\pi}{c}\right)$ ist dargestellt. Bestimme a , b und c .

b)

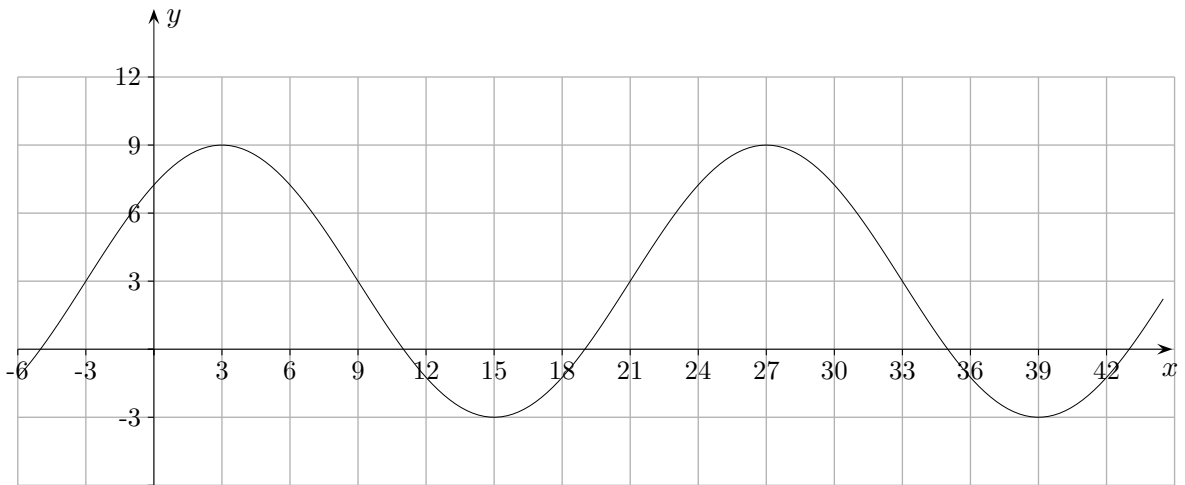


Der Graph von $f(x) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}x + \frac{\pi}{c}\right) + d$ ist dargestellt. Bestimme a , b , c und d .

a) $a = 20, b = 20, c = 2$

b) $a = 6, b = 12, c = 4, d = 1$

Sinus-Funktion



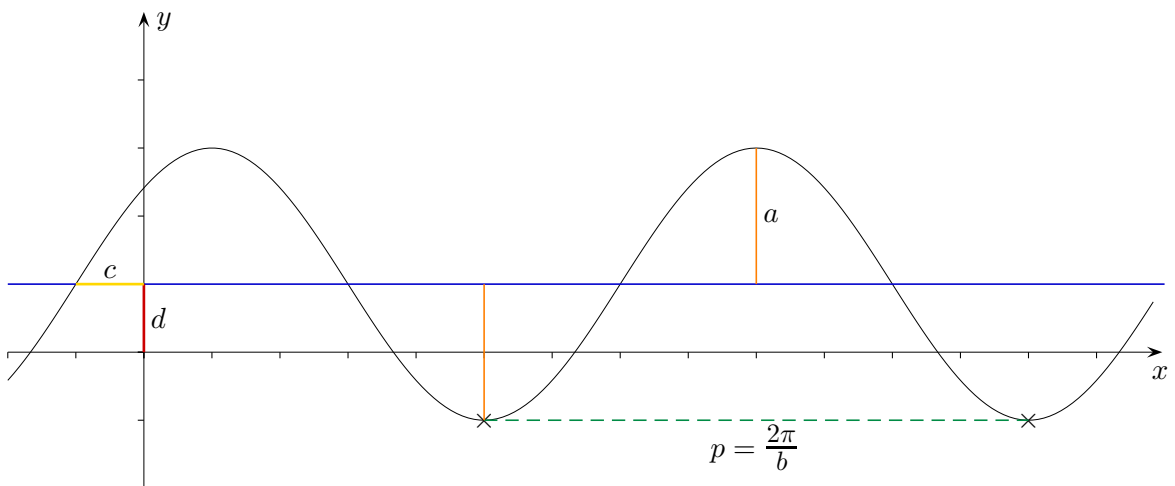
nach rechts verschieben ($c > 0$):

$$f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$$

nach links verschieben:

$$f(x) = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$$

Zuerst d ermitteln, dann a , b , c .



$$f(x) = 6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}(x + 3)\right) + 3$$

Roofls

Trigonometrische Funktionen

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin(2x) - \sin(x)$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie die Periode, die Null- und die Extremstellen von f .
Welche Symmetrien weist der Graph von f auf?

Es gilt:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$$

Trigonometrische Funktionen Ergebnisse

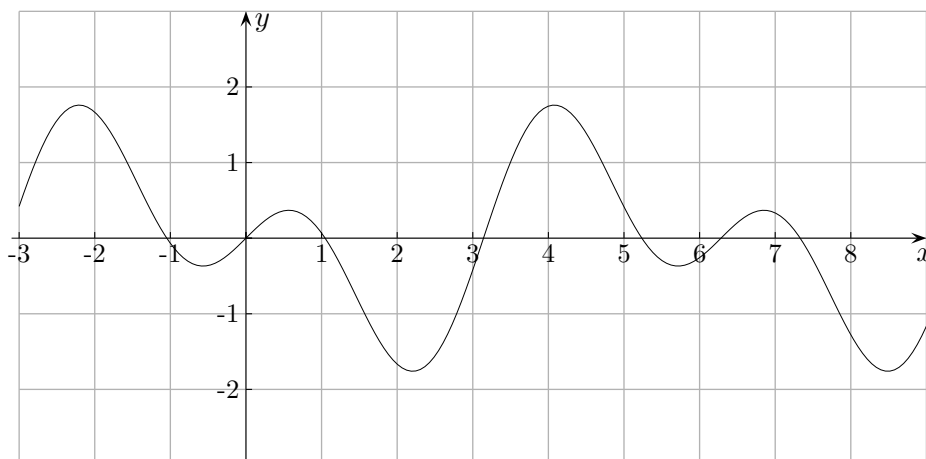
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin(2x) - \sin(x)$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie die Periode, die Null- und die Extremstellen von f .
Welche Symmetrien weist der Graph von f auf?

Es gilt:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$$



Periode $p = 2\pi$

Nullstellen:

$x_1 = \pi$, $x_2 = 2\pi$, $x_3 = \frac{1}{3}\pi$, $x_4 = \frac{5}{3}\pi$, sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.

Extremstellen:

$$\cos(x) - 4 \cdot \cos^2(x) + 2 = 0$$

$x_1 = 0,568$, $x_2 = 2,206$, $x_3 = 4,078$, $x_4 = 5,715$, sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.

Symmetrie:

Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung und zu allen Punkten auf der x -Achse, deren x -Koordinate ein ganzzahliges Vielfaches von π ist.

Trigonometrische Funktionen

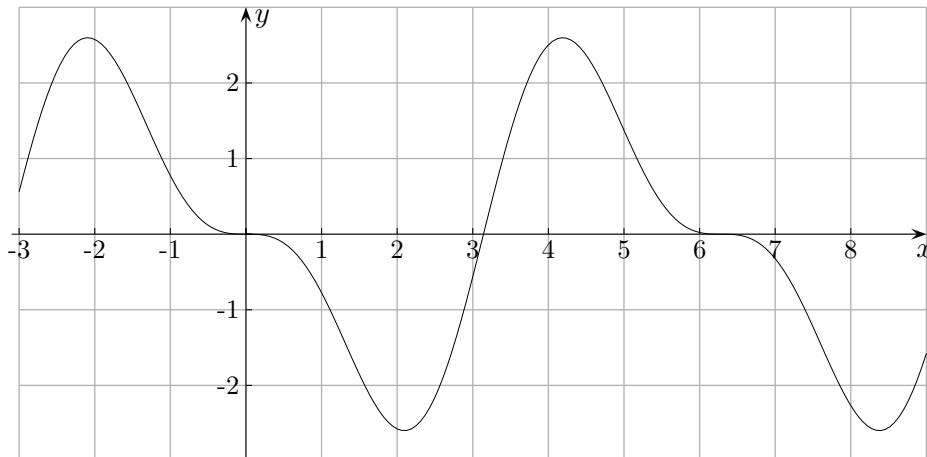
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin(2x) - 2 \sin(x)$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie die Periode, die Null- und die Extremstellen von f .
Welche Symmetrien weist der Graph von f auf?

Es gilt:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$$



Periode $p = 2\pi$

Nullstellen:

$x_1 = 0$, $x_2 = \pi$, $x_3 = 2\pi$, sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.

Extremstellen, notw. Bed.:

$$4 \cdot \cos^2(x) - 2 \cos(x) - 2 = 0$$

$x_1 = \frac{2}{3}\pi$, $x_2 = \frac{4}{3}\pi$, sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.

Symmetrie:

Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung und zu allen Punkten auf der x -Achse, deren x -Koordinate ein ganzzahliges Vielfaches von π ist.

Trigonometrische Funktionen

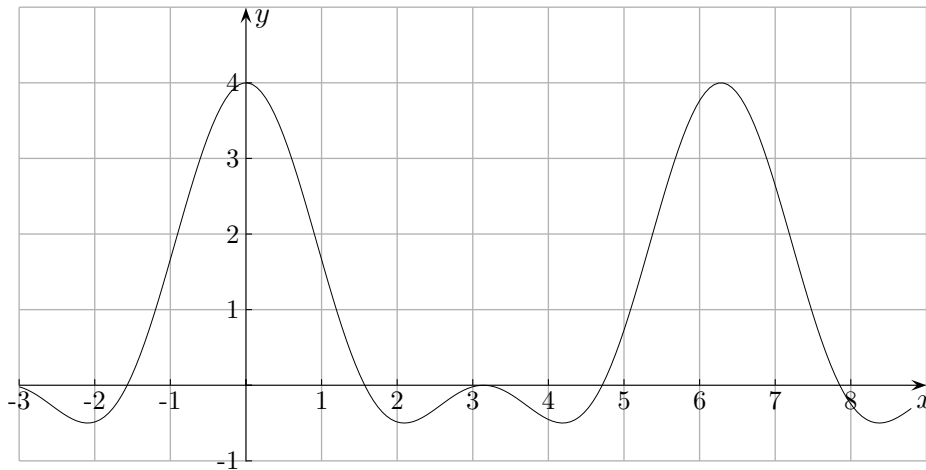
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \cos(2x) + 2 \cos(x) + 1$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie die Periode, die Null- und die Extremstellen von f .
Welche Symmetrien weist der Graph von f auf?

Es gilt:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$$



Periode $p = 2\pi$

Nullstellen:

$x_{1/2} = \pm\pi$, $x_{3/4} = \pm\frac{1}{2}\pi$, sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.

Extremstellen:

$$\sin(x)(1 + 2 \cos(x)) = 0$$

$x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}\pi$, $x_3 = \frac{4}{3}\pi$, sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.

Symmetrie:

Der Graph ist achsensymmetrisch zur y -Achse und zu allen Parallelen, deren Abstand ein ganzzahliges Vielfaches von π ist.

Roolfs

Trigonometrische Funktionen

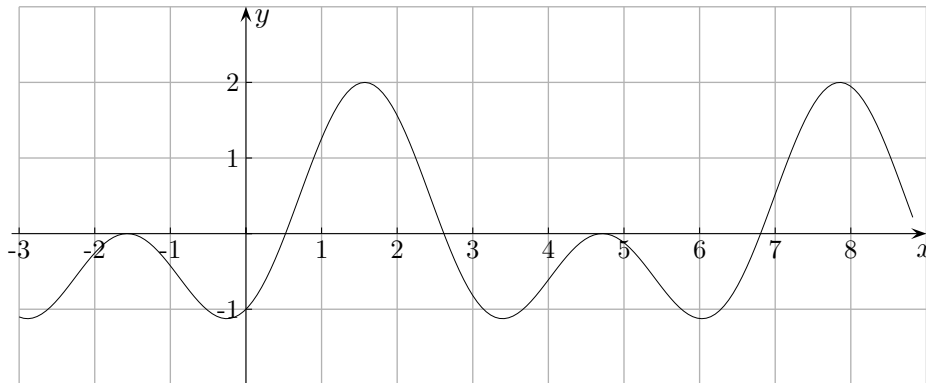
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin(x) - \cos(2x)$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie die Periode, die Null- und die Extremstellen von f .
Welche Symmetrien weist der Graph von f auf?

Es gilt:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$$



Periode $p = 2\pi$

Nullstellen:

$$2 \sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$$

Zwischenlösungen:

$$\sin(x) = -1 \text{ und } \sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{6}\pi, x_2 = \frac{5}{6}\pi, x_3 = \frac{3}{2}\pi, \text{ sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.}$$

Extremstellen, notw. Bed.:

$$\cos(x) \cdot (1 + 4 \sin(x)) = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\pi, x_2 = \frac{3}{2}\pi, x_3 = 3,394, x_4 = 6,031, \text{ sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.}$$

Symmetrie:

Der Graph ist achsensymmetrisch zu allen Parallelen zur y -Achse,

deren Abstand $\frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{3}{2}\pi$ plus einem ganzzahligen Vielfachen der Periode beträgt.

Roofls

Trigonometrische Funktionen

1. Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = \left(\frac{t^2}{2} + 1\right) \cdot \cos(tx)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$.

Sei $A(t)$ der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f_t in den Grenzen von 0 bis zur 1. (rechts liegenden) Nullstelle.

Für welches t ist $A(t)$ minimal?

2. Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = (t^2 + 1) \cdot \sin\left(\frac{t\pi}{2} \cdot x\right)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$.

- a) Zeichnen Sie die Graphen für $t = 1$ und $t = 2$.
Ermitteln Sie die Größe des Winkels, den beide Graphen in den gemeinsamen Schnittpunkten mit der x -Achse bilden.
 - b) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x -Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen für $t = 2$ und allgemeines t .
Untersuchen Sie, ob es Werte von t gibt, für die diese Fläche am kleinsten ist.
 - c) Ermitteln Sie die Ortslinie der Hochpunkte im 1. Quadranten mit kleinster x -Koordinate.
3. a) Welche quadratische Funktion (Parabel) g berührt den Graphen der Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ in $O(0 | 0)$ und $A(\pi | 0)$?
- b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von f und g .
 - c) Wie groß ist die maximale Differenz der Funktionswerte von f und g im Bereich $0 \leq x \leq \pi$?

Trigonometrische Funktionen

1. Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = (\frac{t^2}{2} + 1) \cdot \cos(tx)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$.

Sei $A(t)$ der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f_t in den Grenzen von 0 bis zur 1. (rechts liegenden) Nullstelle.

Für welches t ist $A(t)$ minimal? $x_N = \frac{\pi}{2t}$, $A(t) = \frac{t^2 + 2}{2t}$, $t_{\min} = \sqrt{2}$

2. Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = (t^2 + 1) \cdot \sin(\frac{t\pi}{2} \cdot x)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$.

- a) Zeichnen Sie die Graphen für $t = 1$ und $t = 2$.

Ermitteln Sie die Größe des Winkels, den beide Graphen in den gemeinsamen Schnittpunkten mit der x -Achse bilden. $\alpha_1 = 14,0^\circ$; $\alpha_2 = 21,3^\circ$

- b) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x -Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen für $t = 2$ und allgemeines t . $A_2 = \frac{10}{\pi}$, $A_t = \frac{4(t^2 + 1)}{\pi t}$

Untersuchen Sie, ob es Werte von t gibt, für die diese Fläche am kleinsten ist. $t_{\min} = 1$

- c) Ermitteln Sie die Ortslinie der Hochpunkte im 1. Quadranten mit kleinster x -Koordinate.

$$\text{Max}(\frac{1}{t} \mid t^2 + 1), \quad h(x) = \frac{1}{x^2} + 1$$

3. a) Welche quadratische Funktion (Parabel) g berührt den Graphen der Sinusfunktion

$$f(x) = \sin(x) \text{ in } O(0 \mid 0) \text{ und } A(\pi \mid 0)? \quad g(x) = -\frac{1}{\pi}x^2 + x$$

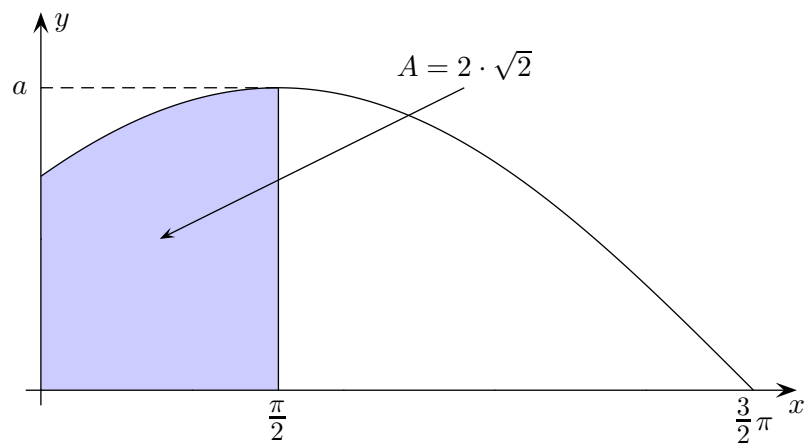
- b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von f und g .

$$A = 2 - \frac{\pi^2}{6} = 0,355$$

- c) Wie groß ist die maximale Differenz der Funktionswerte von f und g im Bereich $0 \leq x \leq \pi$?

$$d_{\max} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Rückwärtsrechnen



Zu sehen ist der Graph von $f(x) = a \cdot \cos(bx + c)$.
Bestimme a , b und c .

$$\text{Periodenlänge } 4\pi \implies b = \frac{1}{2}$$

$$\text{Verschiebung " } \longrightarrow \text{" um } \frac{\pi}{2} \implies c = -\frac{\pi}{4}$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 2 \cdot \sqrt{2} \implies a = 2$$

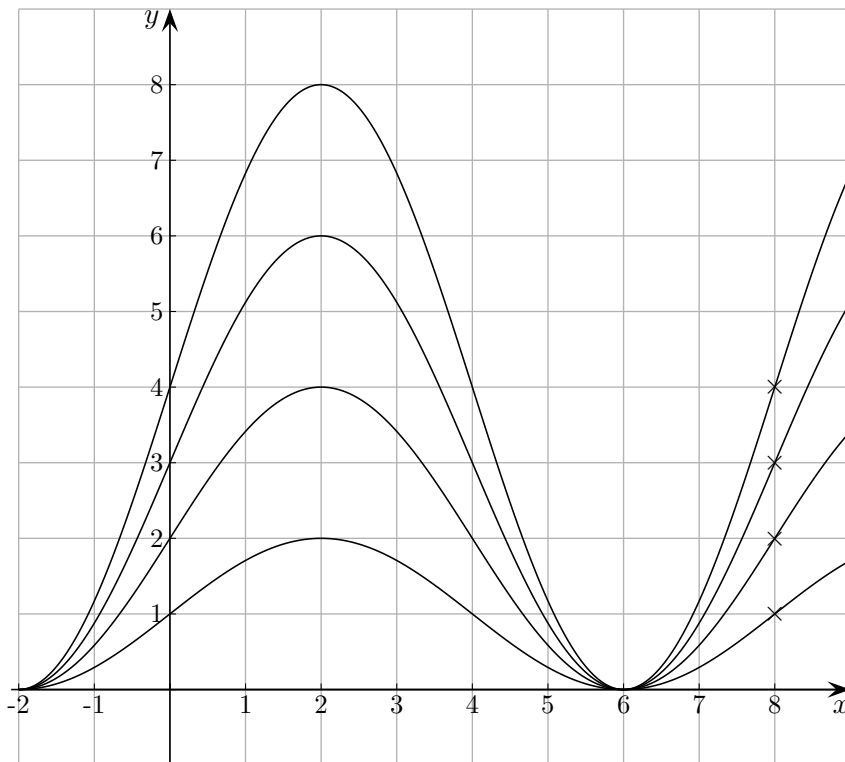
Roolfs

Funktionenschar

Von einer Funktionenschar f_k sind die Graphen von f_1, f_2, f_3 und f_4 abgebildet.

Gib einen möglichen Funktionsterm f_k an.

Zeigen Sie, dass die Tangenten in den Punkten $P_k(4 | \dots)$ von f_k einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

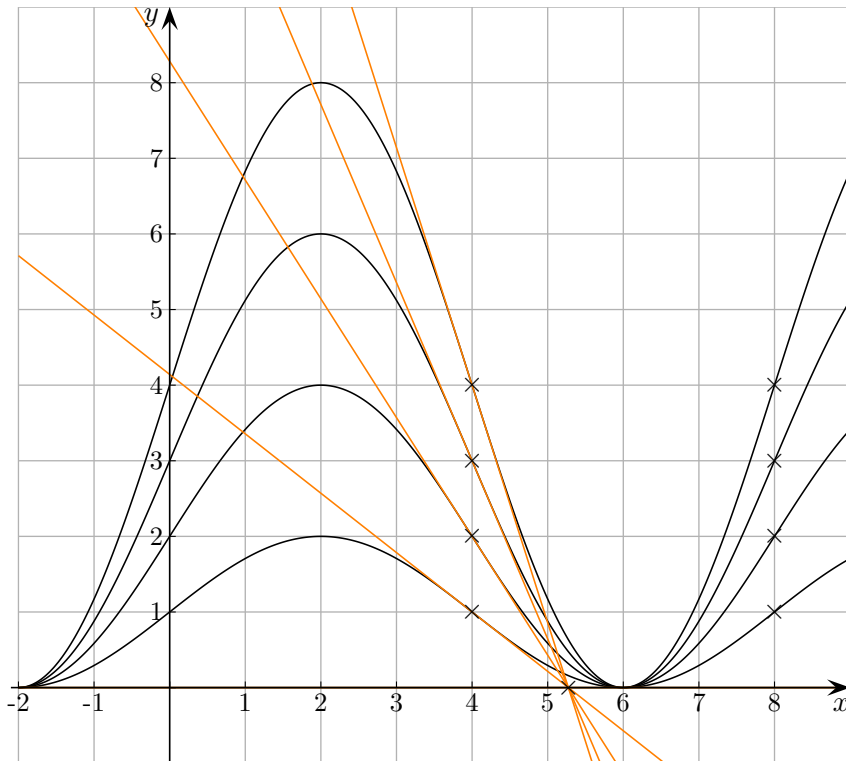


Funktionenschar

Von einer Funktionenschar f_k sind die Graphen von f_1, f_2, f_3 und f_4 abgebildet.

Gib einen möglichen Funktionsterm f_k an.

Zeigen Sie, dass die Tangenten in den Punkten $P_k(4 | \dots)$ von f_k einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.



$$f_k(x) = k + k \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

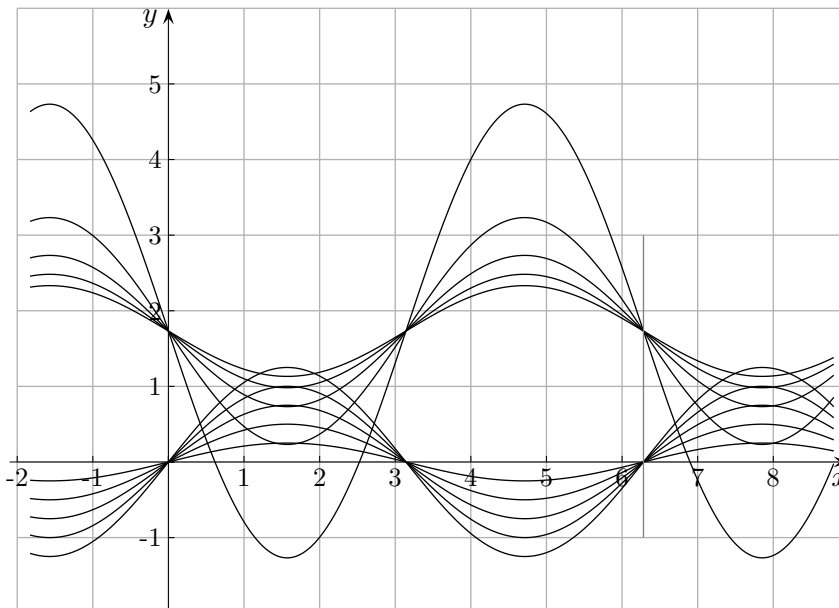
$$\text{Tangenten } y = -\frac{1}{4}k\pi(x - 4) + k \quad \text{oder} \quad y = k\left(-\frac{\pi}{4}x + \pi + 1\right)$$

$$\text{Schnittstelle } x_s = \frac{4(\pi+1)}{\pi}$$

Funktionenschar

Gegeben sind die beiden Funktionenscharen $f_a(x) = \frac{a}{4} \sin(x)$ und $g_a(x) = \sqrt{3} - \frac{3}{a} \sin(x)$ für $0 \leq x \leq 2\pi$ und $a \in \mathbb{R}^+$.

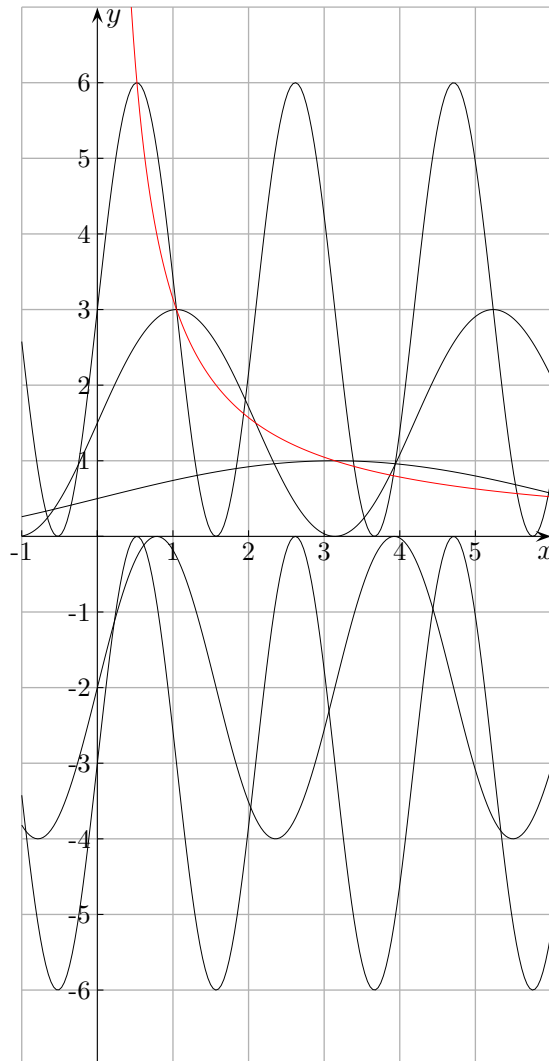
- a) Es sind Graphen für $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ abgebildet. Ordnen Sie sie zu.
- b) Wie lauten die Extrempunkte von g_a ?
- c) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von g_a in Abhängigkeit von a .
- d) Durch welche Abbildungen geht der Graph von g_2 aus dem Graph von f_4 hervor?
- e) Für welche Werte von a schneiden sich die Graphen von f_a und g_a an der Stelle $x = \frac{1}{3}\pi$?
- f) Für welche Werte von a berühren sich die Graphen?
- g) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, den die Graphen für $a = 2$ einschließen.
- h) Sei $a = 2$. Die Tangenten in den Schnittpunkten der beiden Graphen bilden ein Drachenviereck. Ermitteln Sie seinen Inhalt.



Funktionenschar Ergebnisse

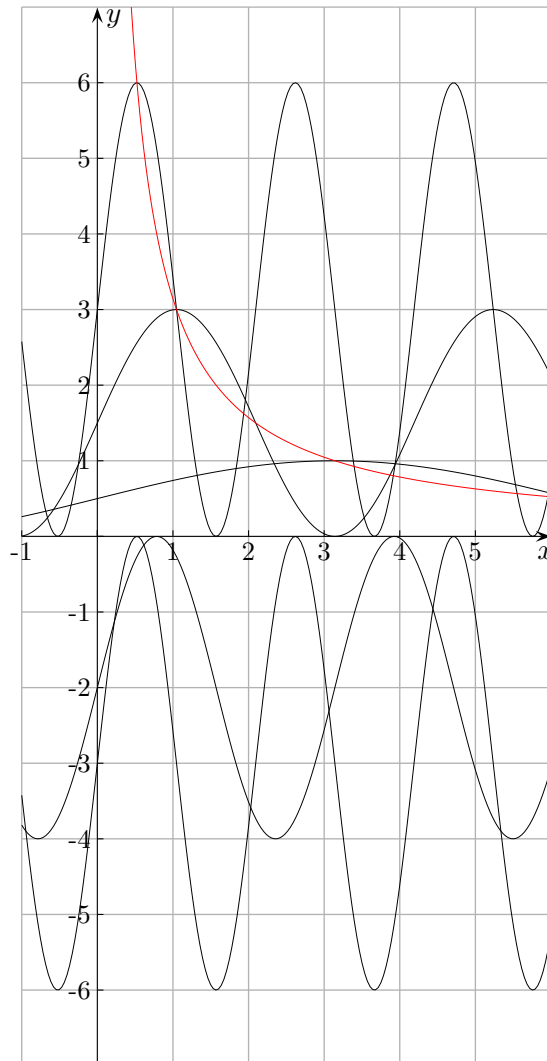
- a) Es sind Graphen für $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ abgebildet. Ordnen Sie sie zu. ...
- b) Wie lauten die Extrempunkte von g_a ?
 $\text{Min}\left(\frac{1}{2}\pi \mid \sqrt{3} - \frac{3}{a}\right), \text{Max}\left(\frac{3}{2}\pi \mid \sqrt{3} + \frac{3}{a}\right)$
- c) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von g_a in Abhängigkeit von a .
 2 Nullstellen für $a < \sqrt{3}$, 1 Nullstelle für $a = \sqrt{3}$, keine Nullstelle für $a > \sqrt{3}$
- d) Durch welche Abbildungen geht der Graph von g_2 aus dem Graph von $h(x) = \sin(x)$ hervor?
 Streckung in y -Richtung mit dem Faktor $k = 1,5$,
 Spiegelung an der x -Achse,
 Verschiebung in y -Richtung um $\sqrt{3}$
- e) Für welche Werte von a schneiden sich die Graphen von f_a und g_a an der Stelle $x = \frac{1}{3}\pi$?
 $a^2 - 8a + 12 = 0 \implies a_1 = 2, a_2 = 6$
- f) Für welche Werte von a berühren sich die Graphen?
 $f_a\left(\frac{1}{2}\pi\right) = g_a\left(\frac{1}{2}\pi\right)$ (Extremstellen!)
 $a^2 - 4\sqrt{3}a + 12 = 0 \implies a_{1/2} = 2\sqrt{3}$
- g) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, den die Graphen für $a = 2$ einschließen.
 $A = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} [f_2(x) - g_2(x)] dx = 0,186$
- h) Sei $a = 2$. Die Tangenten in den Schnittpunkten der beiden Graphen bilden ein Drachenviereck. Ermitteln Sie seinen Inhalt.
 $S_1\left(\frac{1}{3}\pi \mid \frac{1}{4}\sqrt{3}\right), S_2\left(\frac{2}{3}\pi \mid \frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$
 Tangentengleichungen in S_1 :
 $y = 0,25x + 0,1712$
 $y = -0,75x + 1,2184$
 an der Stelle $x = \frac{1}{2}\pi$: $y_1 = 0,5639, y_2 = 0,0403$
 Diagonallängen $e = 1,0472, f = 0,5236$ (vertikal)
 $A = 0,274$

Funktionenschar



- Zu sehen sind verschiedene Graphen der Kurvenschar $f_k(x) = k \cdot (1 + \sin(kx))$ für $k \neq 0$. Ermitteln Sie begründet die Parameter für die dargestellten Graphen.
- Für positive Werte des Parameters k liegen die 1. Hochpunkte rechts von der y -Achse auf einer Ortslinie. Ermitteln Sie deren Gleichung.
- Zeichnen Sie die Graphen für $k = 1$ und $k = 2$. Ermitteln Sie jeweils den Flächeninhalt zwischen Graph und x -Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen. Stellen Sie eine Vermutung für den Flächeninhalt für allgemeine Werte für k auf. Machen Sie diese plausibel. Beweisen Sie Ihre Vermutung.

Funktionenschar



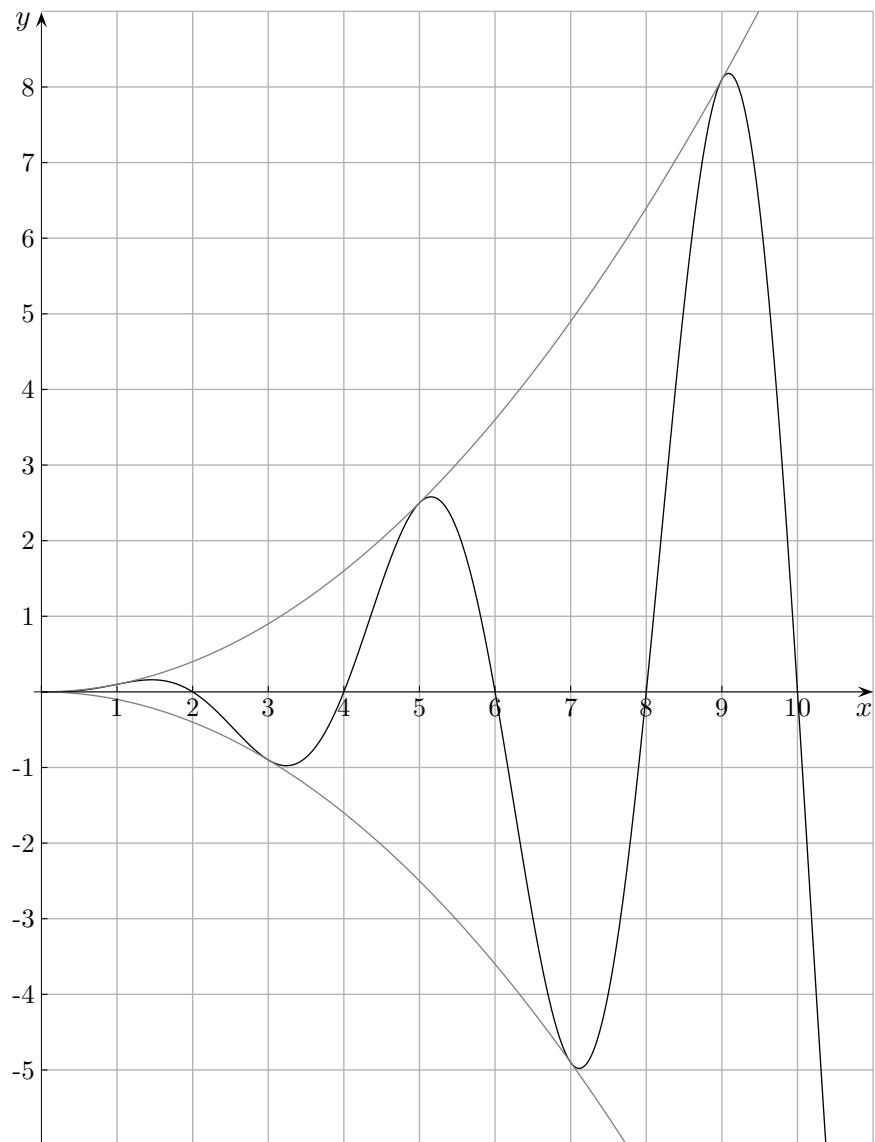
- a) Zu sehen sind verschiedene Graphen der Kurvenschar $f_k(x) = k \cdot (1 + \sin(kx))$ für $k \neq 0$.
Ermitteln Sie begründet die Parameter für die dargestellten Graphen. Beachte: $f_k(0) = k$
- b) Für positive Werte des Parameters k liegen die 1. Hochpunkte rechts von der y -Achse auf einer Ortslinie. Ermitteln Sie deren Gleichung. $\text{Max}(\frac{\pi}{2k} | 2k), g(x) = \frac{\pi}{x}$
- c) Zeichnen Sie die Graphen für $k = 1$ und $k = 2$. Ermitteln Sie jeweils den Flächeninhalt zwischen Graph und x -Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen. $k = 1: x_1 = \frac{3}{2}\pi, x_2 = \frac{7}{2}\pi$
 $k = 2: x_1 = \frac{3}{4}\pi, x_2 = \frac{7}{4}\pi, A = 2\pi$
- Stellen Sie eine Vermutung für den Flächeninhalt für allgemeine Werte für k auf. Machen Sie diese plausibel. Beweisen Sie Ihre Vermutung. A ist unabhängig von k .
Beachte: Steckung/Stauchung in x - und y -Achsenrichtung

Funktion $f(x) = ax^2 \cdot \sin(bx)$

Die mit einer quadratischen Funktion multiplizierte Sinusfunktion ist vom angegebenen Typ, $P(5 | 2,5)$ liegt auf ihrem Graphen.

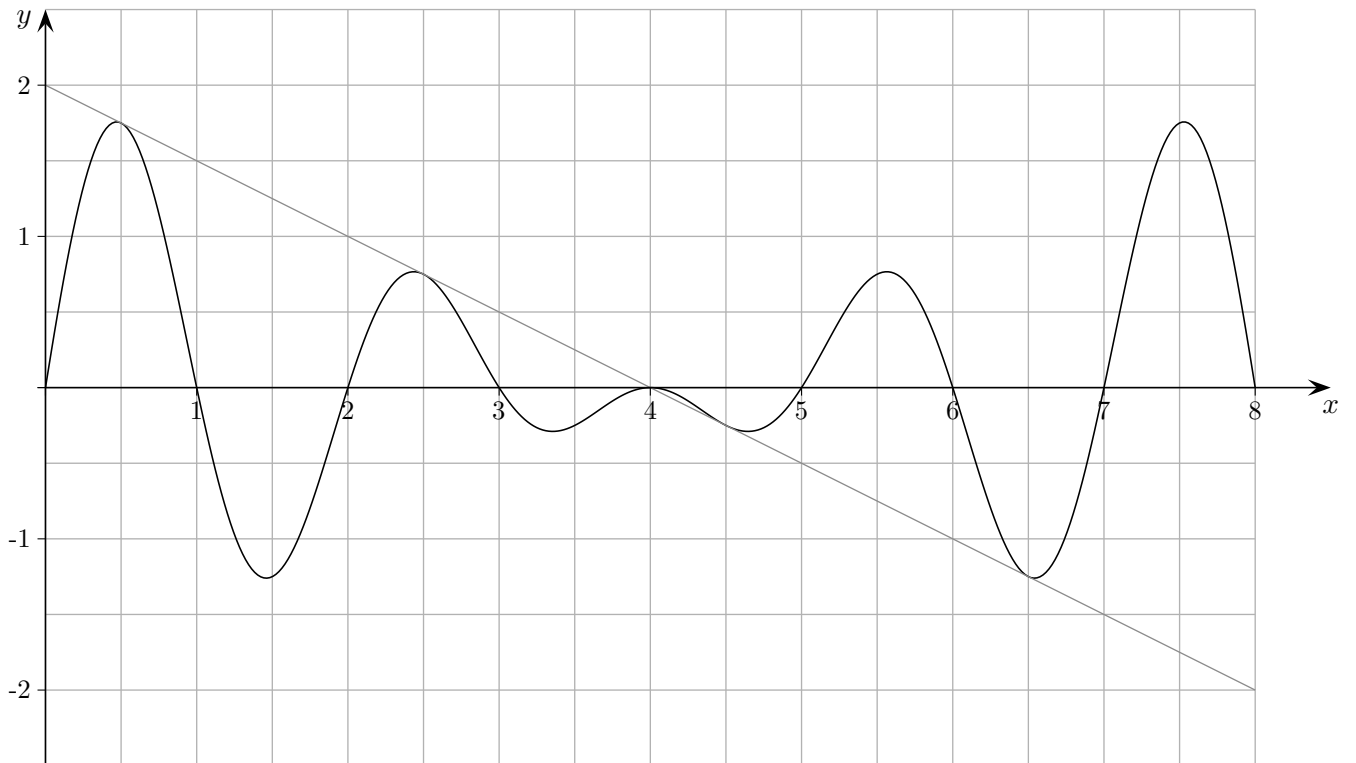
Ermitteln Sie a und b

und sodann die Stellen mit waagerechter Tangente im Bereich $4 \leq x \leq 4$.



Sinus-Funktion

Ermitteln Sie den Funktionsterm.

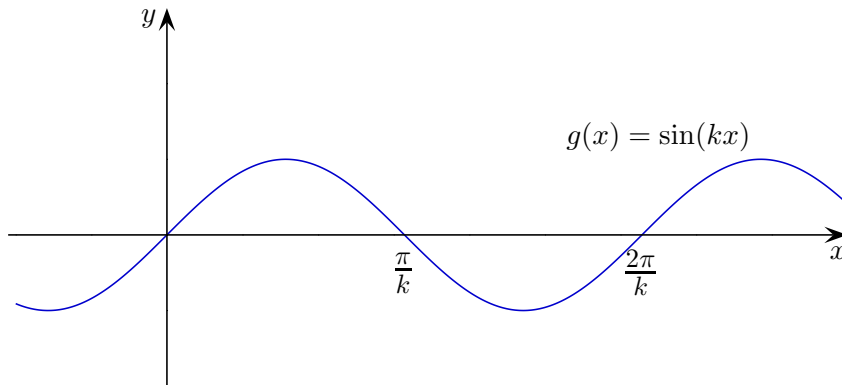


Roolfs

1. Wie lautet die 3. Nullstelle von $f_k(x) = (-\frac{1}{2}x + 2) \cdot \sin(kx)$ für $x \geq 0$ vom Ursprung aus betrachtet?
2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot \cos(x)$.
Zeigen Sie $f''(x) + f(x) = -2 \sin(x)$ und berechnen Sie $\int f(x) dx$.

Funktionenschar

Wie lautet die 3. Nullstelle von $f_k(x) = (-\frac{1}{2}x + 2) \cdot \sin(kx)$ für $x \geq 0$ vom Ursprung aus betrachtet?



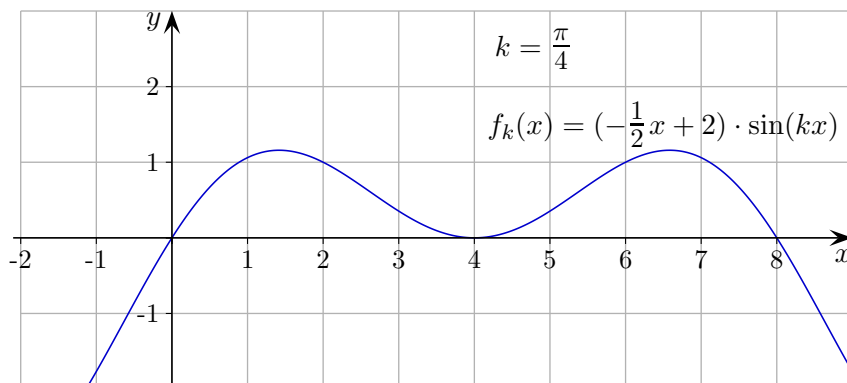
Es sind 4 Fälle zu unterscheiden:

$$4 < \frac{\pi}{k} \iff k < \frac{\pi}{4}, \quad x_N = \frac{\pi}{k}$$

$$\frac{\pi}{k} < 4 \leq \frac{2\pi}{k} \iff \frac{\pi}{4} < k \leq \frac{\pi}{2}, \quad x_N = 4$$

$$4 = \frac{\pi}{k} \iff k = \frac{\pi}{4}, \quad x_N = \frac{2\pi}{k} = 8$$

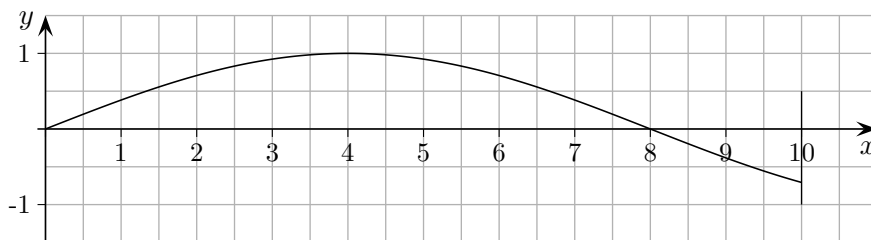
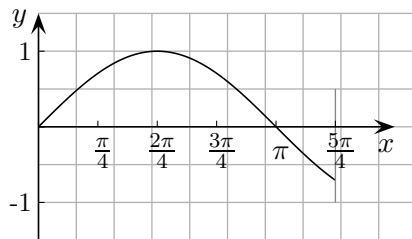
$$\frac{2\pi}{k} < 4 \iff \frac{\pi}{2} < k, \quad x_N = \frac{2\pi}{k}$$

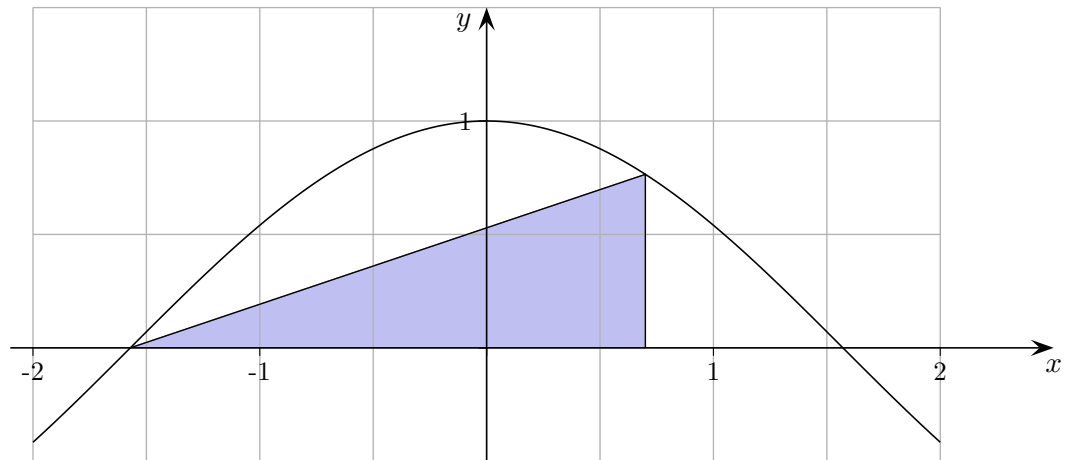


Roofs

Streckung

Der untere Graph geht durch Streckung in x -Richtung aus dem oberen Sinus-Graph hervor.
Ermitteln Sie den Funktionsterm des unteren Graphen.





Gegeben ist der Graph von $f(x) = \cos(x)$.
Ermitteln Sie den maximalen Flächeninhalt des eingeschriebenen Dreiecks.