

# Vollständige Induktion

1. Wir wollen die Aussage: *Für alle natürlichen Zahlen gilt:  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$*  beweisen.

$(x)' = 1$  Dies ist unmittelbar einsichtig.

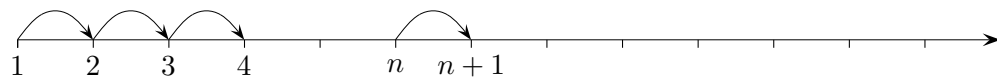
$(x^2)' = (x \cdot x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$  Wir verwenden die Produktregel.

$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$

$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3$

Um  $(x^4)' = 4x^3$  zu beweisen, haben wir  $(x^3)' = 3x^2$  verwendet.

Um  $(x^5)' = 5x^4$  zu beweisen, würden wir  $(x^4)' = 4x^3$  verwenden.



2. Sei  $A(n)$  die Aussage  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Bisher haben wir  $A(1)$ ,  $A(2)$ ,  $A(3)$ ,  $A(4)$  bewiesen.

Etwas genauer haben wir gezeigt:

$A(1)$	Das war der Anfang.
$A(1) \implies A(2)$	In Worten: Aus $A(1)$ folgt $A(2)$
$A(2) \implies A(3)$	
$A(3) \implies A(4)$	

Wenn es nun gelänge, den Übergang  $A(n) \implies A(n+1)$  allgemein zu beweisen, so wäre damit  $A(n)$  für alle natürlichen Zahlen gültig.

3. Der Nachweis ist nicht schwierig:

$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1) \cdot x^n$  Dies ist  $A(n+1)$ . Verwendet wurde  $A(n)$ .

Damit wurde auf einen Schlag gezeigt:

$A(4) \implies A(5)$	
$A(5) \implies A(6)$	
$A(6) \implies A(7)$	und so fort

4. Zusammengefasst: Um eine Aussage durch vollständige Induktion zu beweisen, genügt der Nachweis von

$A(1)$	Dies ist der Induktionsanfang.
$A(n) \implies A(n+1)$	Das ist der Induktionsschluss von $n$ auf $n+1$ .

5. Aufg. (eA)

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

Stelle eine Vermutung für die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)}$  auf und beweise sie.

# Vollständige Induktion

6. Beweise:

a)  $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$

b)  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

c)  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$

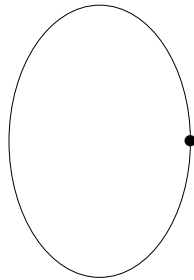
d)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$

e)  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$

f)  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n + 1)} = \frac{n}{n + 1}$

7. Eulerscher Polyedersatz:

Für beschränkte, konvexe Polyeder gilt: Anzahl Ecken + Anzahl Flächen = Anzahl Kanten + 2



Mit diesem Graphen kann der Induktionsbeweis begonnen werden. Erläutere dies.

Wo ist die 2. Fläche?

Füge eine weitere Kante hinzu und untersuche die neue Situation.

Wie sieht der allgemeine Schluss aus?