e-Funktionen $\quad f(x) = e^{-x^2}$

1. Symmetrie:
   Der Graph ist achsensymmetrisch, da $f(-x) = f(x)$.

2. Nullstellen:
   Bed.: $f(x) = 0$
   Es sind keine Nullstellen vorhanden, da e^x stets positiv ist.

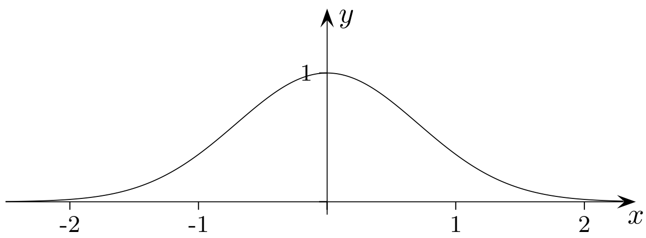
3. Extrema:
   notw. Bed.: $f'(x) = 0$

   $$f'(x) = -2xe^{-x^2} \qquad f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$
   $$x = 0 \qquad f''(0) = -2 \qquad Max(\,0 \mid 1\,)$$

4. Verhalten von f für $x \longrightarrow \pm\infty$

   $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

   Auch ohne die 2. Ableitung wäre nun zu erkennen, dass $E(\,0 \mid 1\,)$ ein Maximum sein muss.



5. Wendepunkte:

   notw. Bed.: $f''(x) = 0$

   $$f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$
   $$x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \qquad W_{1/2}(\,\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \mid \frac{1}{\sqrt{e}}\,)$$

   Die Existenz der Wendepunkte folgt aus dem Verhalten von f für $x \longrightarrow \pm\infty$.

Funktion $\quad f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

1. Nullstellen:
   Bed.: $f(x) = 0$
   $$x = 0$$

2. Extrema:
   notw. Bed.: $f'(x) = 0$

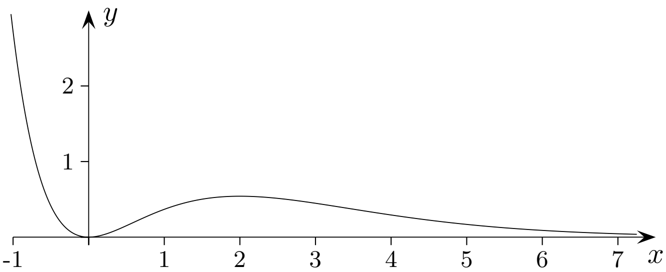
   $$f'(x) = e^{-x}\,(2x - x^2) \qquad f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$$
   $$x_1 = 0 \qquad f''(0) = 2 \qquad Min(\,0 \mid 0\,)$$
   $$x_2 = 2 \qquad f''(2) < 0 \qquad Max(\,2 \mid \frac{4}{e^2}\,)$$

3. Verhalten von f für $x \longrightarrow \infty$ und $x \longrightarrow -\infty$

   $$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$
   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

4. Wendepunkte:
   notw. Bed.: $f''(x) = 0$
   $$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

   Begründung für die Existenz der Wendepunkte ...



Funktion $\quad f(x) = 2e^x - k\,e^{2x}\,, \quad k > 0$

1. Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 2\,e^x - k\,e^{2x} &= 0 \\ e^x(2 - k\,e^x) &= 0 \\ 2 - k\,e^x &= 0 \\ x &= \ln\frac{2}{k} \end{aligned}$$

2. Extrema:

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 2\,e^x - 2\,k\,e^{2x} \qquad f''(x) = 2\,e^x - 4\,k\,e^{2x}$$

$$x = \ln\frac{1}{k} \qquad f''(\ln\frac{1}{k}) = -\frac{2}{k} < 0 \qquad Max(\ln\frac{1}{k} \mid \frac{1}{k})$$

3. Verhalten von f für $x \longrightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(2e^x - ke^{2x}) = \lim_{x\to\infty} e^x(2 - k\,e^x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2e^x - ke^{2x}) = \lim_{x\to-\infty} e^x(2 - k\,e^x) = 0$$

4. Wendepunkte:

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = 2\,e^x - 4\,k\,e^{2x}$$

$$x = \ln\frac{1}{2\,k} \qquad W(\ln\frac{1}{2\,k} \mid \frac{3}{4\,k})$$

Die Existenz des Wendepunkts folgt aus dem Verhalten von f für $x \longrightarrow -\infty$.

5. Sei $k = 1$
Parabel durch $Max(0 \mid 1)$
mit bestmöglicher Approximation:

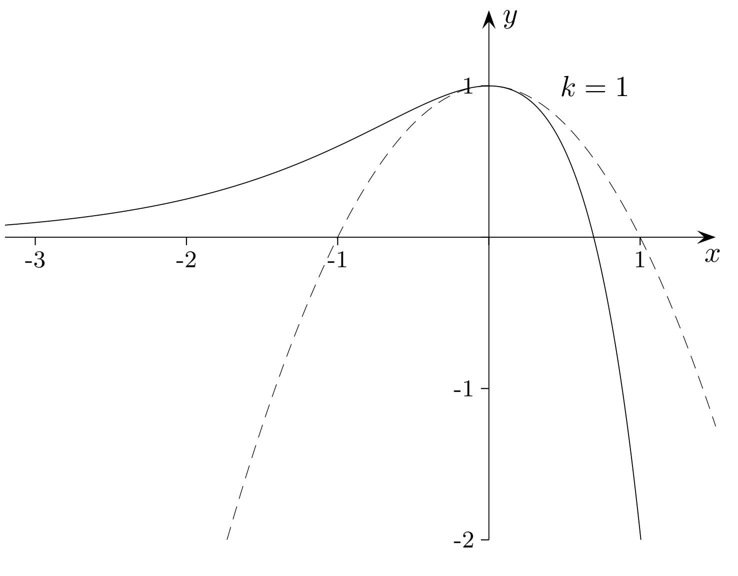
$g(x) = -a\,x^2 + 1$

Bed.: $f''(0) = g''(0)$

$$-2 = -2\,a$$

$$\Longrightarrow \quad a = 1$$

$g(x) = -x^2 + 1$



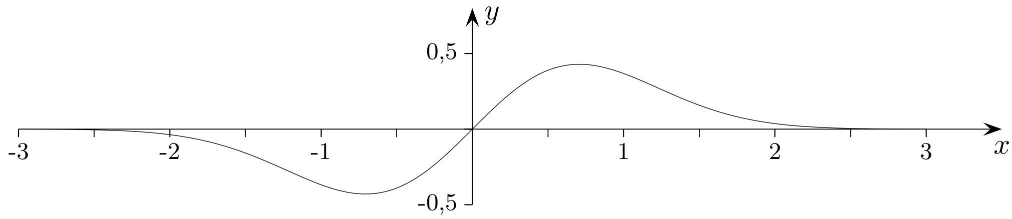
Funktion $\quad f(x) = x\,e^{-x^2}$

1. Wie lauten die Nullstellen, die Extrema und die x-Koordinaten der Wendepunkte?
2. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
3. Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie.
4. Fertigen Sie eine Skizze des Graphen von f an.

zur Kontrolle: $f'(x) = (1-2x^2)\cdot e^{-x^2}$, $f''(x) = (4x^3-6x)\cdot e^{-x^2}$,

$Max\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{e}}\right)$, $Min\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{e}}\right)$,

$W_1(0\mid 0)$, $W_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} \mid \ ...\right)$, $W_3\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6} \mid \ ...\right)$,



Die Graphen der Funktionen $f(x) = \frac{1}{e} \cdot x$ und $g(x) = \frac{1}{e} \cdot x + e^{1-x}$

schließen mit der y-Achse eine nach rechts unbegrenzte Fläche endlichen Inhalts A ein. Bestimmen Sie algebraisch A. Wie groß müsste eine rechte Grenze z für die Fläche gewählt werden, damit schon 99 % von A erreicht würden? (algebraisch)

Ergebnisse:

$A = e$
$z = -\ln 0{,}01 = 4{,}605$

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $\quad f_t(x) = e^x(e^x - t), \quad x \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie algebraisch die Nullstellen und Extrema (x- und y-Koordinate) (Begründung Min/Max <u>ohne</u> die 2. Ableitung).

Für jedes $t > 0$ ist ein Punkt $P_t\left(\ln\frac{t}{2} \mid -\frac{t^2}{4}\right)$ gegeben.

b) Auf welcher Kurve liegen die Punkte P_t?

c) Gibt es einen Punkt P_t, der dem Ursprung am nächsten liegt? (mit GTR-Einsatz, jedoch kein Probieren) Wenn ja, welcher? (x- und y-Koordinate)

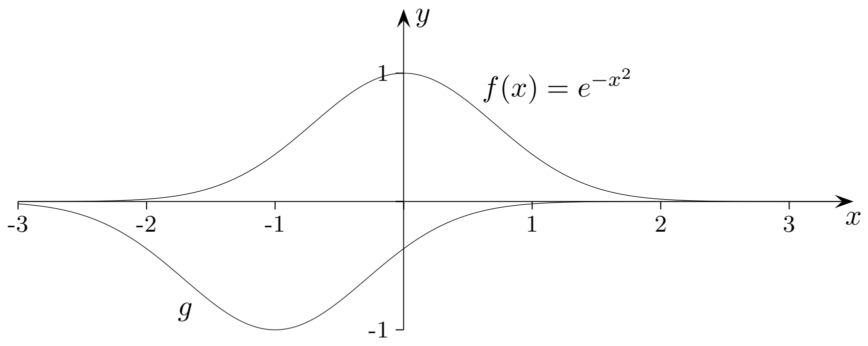
a) Nullstelle $x = \ln t$

$Min\left(\ln\frac{t}{2} \mid -\frac{t^2}{4}\right)$

b) $y = -e^{2x}$

c) $P_{1,34}(-0{,}4 \mid -0{,}44)$

Wie lautet ein Funktionsterm für g?



Gegeben sei $f_t(x) = \dfrac{x}{e^{tx^2}} - tx,\ x \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie die 1. Ableitung.

b) Die 2. Ableitung lautet: $f_t''(x) = (4t^2 \cdot x^3 - 6tx) \cdot e^{-tx^2}$
An welchen Stellen liegen Wendepunkte vor? (Nur notwendige Bedingung betrachten.)

c) Wie ist das a zu wählen, damit $F_t(x) = a(e^{-tx^2} + t^2x^2)$ eine Stammfunktion ist?

d) Wie lautet die Gleichung der Tangente von f_1 an der Stelle $x = -1$?

Gegeben sei $f_t(x) = \dfrac{x}{e^{tx^2}} - tx,\ x \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie die 1. Ableitung. $f_t'(x) = e^{-tx^2} - 2tx^2 \cdot e^{-tx^2} - t$

b) Die 2. Ableitung lautet: $f_t''(x) = (4t^2 \cdot x^3 - 6tx) \cdot e^{-tx^2}$
An welchen Stellen liegen Wendepunkte vor? (Nur notwendige Bedingung betrachten.)

$x_1 = 0,\ x_{2/3} = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2t}}$

c) Wie ist das a zu wählen, damit $F_t(x) = a(e^{-tx^2} + t^2x^2)$ eine Stammfunktion ist? $a = -\dfrac{1}{2t}$

d) Wie lautet die Gleichung der Tangente von f_1 an der Stelle $x = -1$?

$$y = (-e^{-1} - 1)(x + 1) - e^{-1} + 1$$
$$y = -xe^{-1} - 2e^{-1} - x$$
$$y = -(e^{-1} + 1)x - 2e^{-1}$$

Gegeben sei $f_k(x) = (x + k) \cdot e^{-x},\ k > 0.$

a) Untersuchen Sie die Funktionenschar f_k auf Nullstellen, Extrema und auf das Verhalten für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve der Extrema der Schar f_k.

c) Zeigen Sie, dass $F_k(x) = -(x + k + 1) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f_k ist.

d) Begründen Sie, dass die Fläche, die sich zwischen der x-Achse und dem Graphen von f_2 nach rechts ins Unendliche ausdehnt, einen endlichen Inhalt hat, und geben Sie diesen an.

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $W\big(2 - k \mid 2e^{k-2}\big)$. Diese begrenzt mit den Koordinatenachsen eine Dreiecksfläche. Für welchen Wert von k ist der Inhalt der Dreiecksfläche maximal? (GTR)

Gegeben sei $f_k(x) = (x + k) \cdot e^{-x},\ k > 0.$

a) Untersuchen Sie die Funktionenschar f_k auf Nullstellen, Extrema und auf das Verhalten für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$.

$f'(x) = (1 - x - k)e^{-x},\ f''(x) = (-2 + x + k)e^{-x}$

Nullstelle $x = -k$, $Max\big(1 - k \mid e^{k-1}\big)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve der Extrema der Schar f_k. $g(x) = e^{-x}$

c) Zeigen Sie, dass $F_k(x) = -(x + k + 1) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f_k ist.

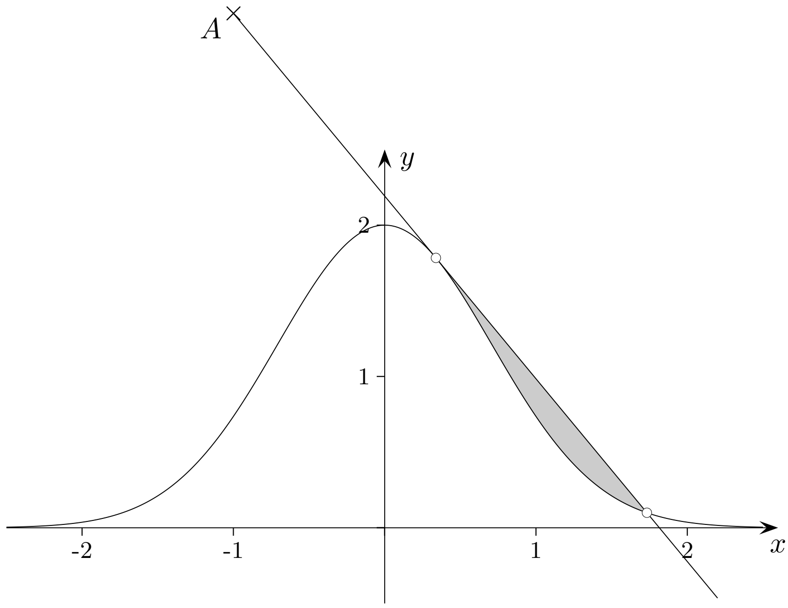
d) Begründen Sie, dass die Fläche, die sich zwischen der x-Achse und dem Graphen von f_2 nach rechts ins Unendliche ausdehnt, einen endlichen Inhalt hat und geben Sie diesen an. $A = e^2$

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $W\big(2 - k \mid 2e^{k-2}\big)$. Diese begrenzt mit den Koordinatenachsen eine Dreiecksfläche. Für welchen Wert von k ist der Inhalt der Dreiecksfläche maximal? (GTR)

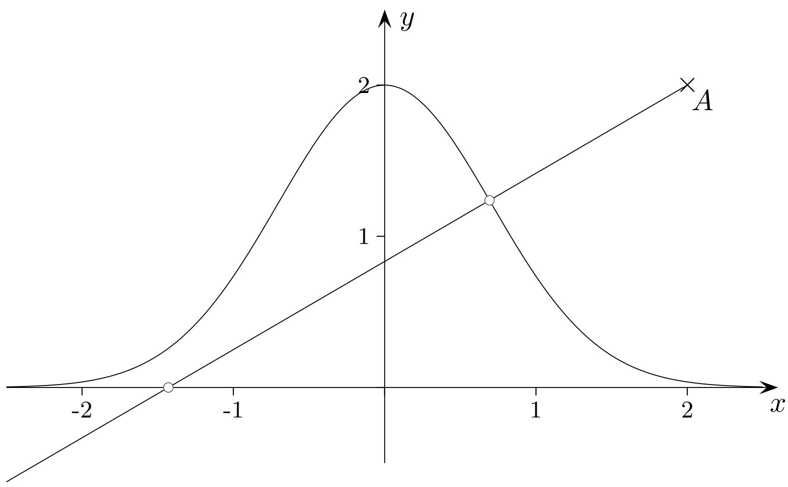
$A(k) = \frac{1}{2}(4 - k)^2 e^{k-2},\ \ k_{\max} = 2,\ \ A_{\max} = 2$

Tangente und Normalen

1. In der Grafik ist eine Tangente der Funktion $f(x) = 2e^{-x^2}$ zu sehen, die durch den Punkt $A(-1 \mid 3{,}4)$ verläuft. Wie groß ist der Inhalt der Fläche, den diese Tangente mit dem Graphen von f einschließt? Gibt es noch eine weitere Tangente, die durch A verläuft?

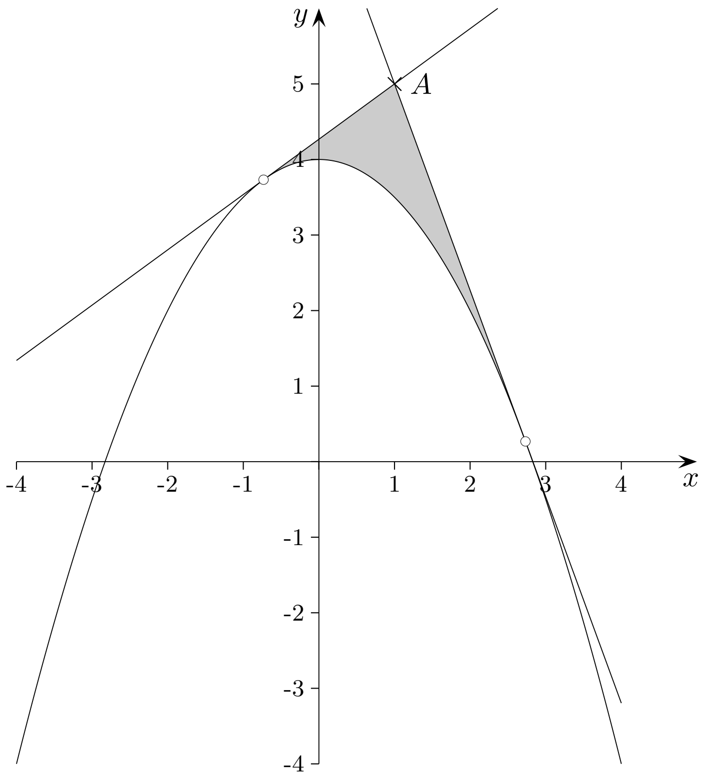


2. Eine Normale der Funktion $f(x) = 2e^{-x^2}$ verläuft durch den Punkt $A(2 \mid 2)$. Wie lautet die Nullstelle dieser Normalen?



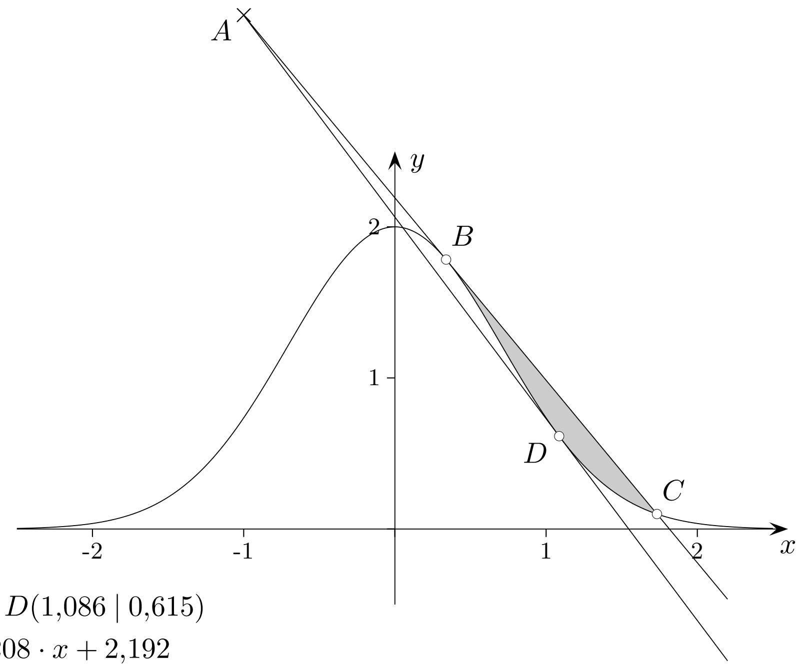
Tangenten

3. Durch den Punkt $A(1 \mid 5)$ verlaufen zwei Tangenten der Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$.
   Wie groß ist der Inhalt der Fläche, den diese Tangenten mit dem Graphen von f einschließen?



Tangente und Normalen

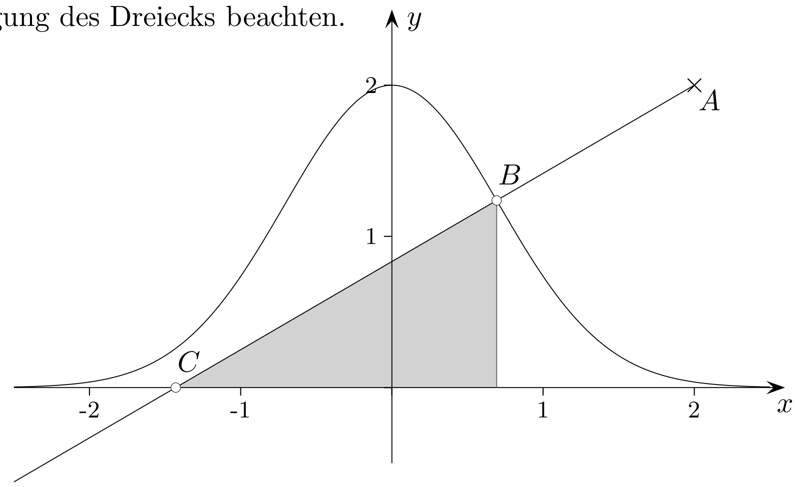
1. In der Grafik ist eine Tangente der Funktion $f(x) = 2e^{-x^2}$ zu sehen, die durch den Punkt $A(-1 \mid 3{,}4)$ verläuft. Wie groß ist der Inhalt der Fläche, den diese Tangente mit dem Graphen von f einschließt? Gibt es noch eine weitere Tangente, die durch A verläuft?



$B(0{,}339 \mid 1{,}783)$, $C(1{,}733 \mid 0{,}099)$, $D(1{,}086 \mid 0{,}615)$
Tangente durch A und B: $y = -1{,}208 \cdot x + 2{,}192$
Tangente durch A und D: $y = -1{,}335 \cdot x + 2{,}065$
Flächeninhalt 0,218 (FE)

2. Eine Normale der Funktion $f(x) = 2e^{-x^2}$ verläuft durch den Punkt $A(2 \mid 2)$. Wie lautet die Nullstelle dieser Normalen?

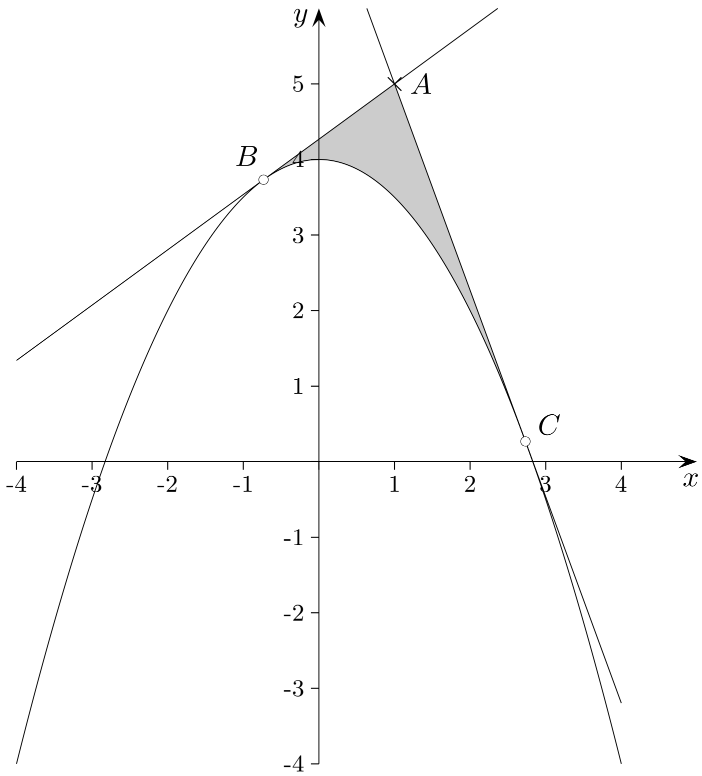
   Zeige, dass gilt: $|\,\overline{BC}\,| = f(x_B) \cdot \sqrt{1 + (f'(x_B))^2}$
   Tipp: Satz des Pythagoras und Steigung des Dreiecks beachten.



$B(0{,}693 \mid 1{,}238)$, $C(-1{,}430 \mid 0)$
Normale durch A und B: $y = 0{,}583 \cdot x + 0{,}834$

Tangenten

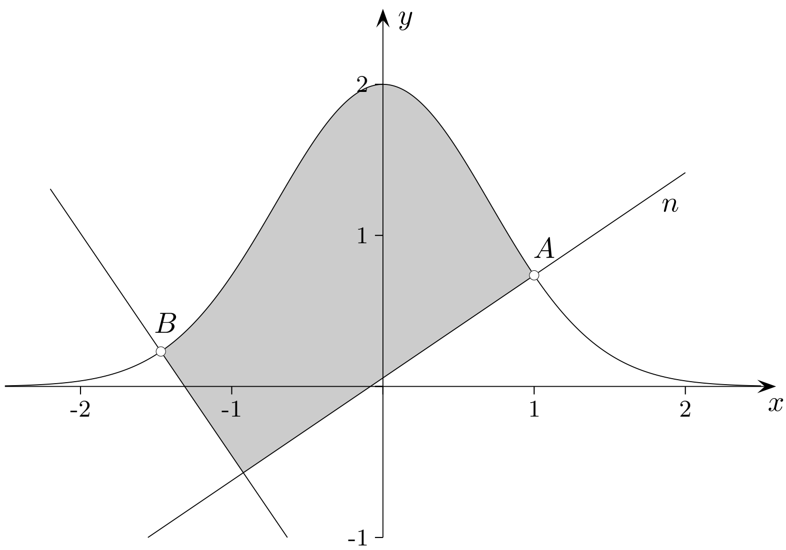
3. Durch den Punkt $A(1 \mid 5)$ verlaufen zwei Tangenten der Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$.
   Wie groß ist der Inhalt der Fläche, den diese Tangenten mit dem Graphen von f einschließen?



$B(-0{,}732 \mid 3{,}732)$, $\quad C(2{,}732 \mid 0{,}268)$
Tangente durch A und B: $\quad y = 0{,}732 \cdot x + 4{,}268$
Tangente durch A und C: $\quad y = -2{,}732 \cdot x + 7{,}732$
Flächeninhalt $\ 2 \cdot 0{,}866 = 1{,}732\ (FE)$

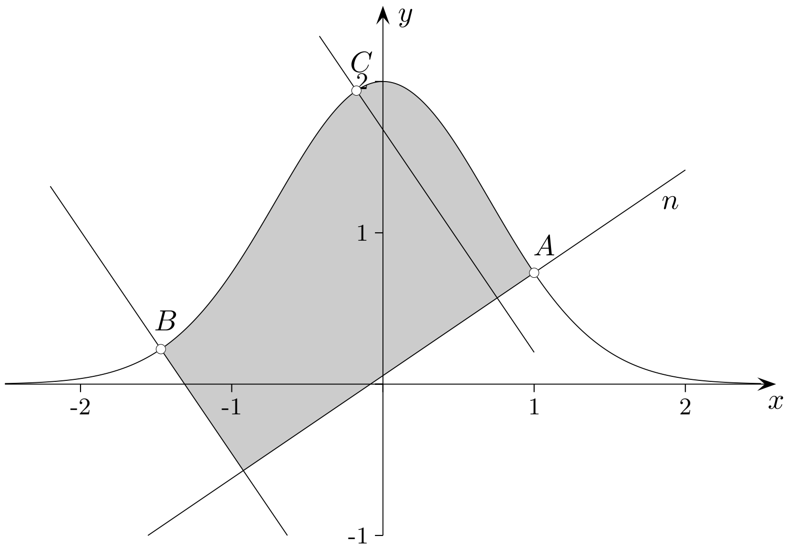
Normalen

4. Die Normale n der Funktion $f(x) = 2e^{-x^2}$ verläuft durch den Punkt $A\big(1 \mid 2e^{-1}\big)$.
   Eine zweite Normale verläuft senkrecht zu n durch B. Wie groß ist der Inhalt der grauen Fläche?
   Gibt es noch eine weitere Normale, die senkrecht zu n verläuft?



Normalen

4. Die Normale n der Funktion $f(x) = 2e^{-x^2}$ verläuft durch den Punkt $A\big(1 \mid 2e^{-1}\big)$.
   Eine zweite Normale verläuft senkrecht zu n durch B. Wie groß ist der Inhalt der grauen Fläche?
   Gibt es noch eine weitere Normale, die senkrecht zu n verläuft?



$B(-1{,}469 \mid 0{,}231)$, $\quad C(-0{,}175 \mid 1{,}940)$
Normale durch A: $\quad y = 0{,}680 \cdot x + 0{,}056$
Normale durch B: $\quad y = -1{,}472 \cdot x - 1{,}930$
Schnittstelle $\quad x_s = -0{,}923$
Normale durch C: $\quad y = -1{,}472 \cdot x + 1{,}682$
Flächeninhalt $3{,}134$ (FE)