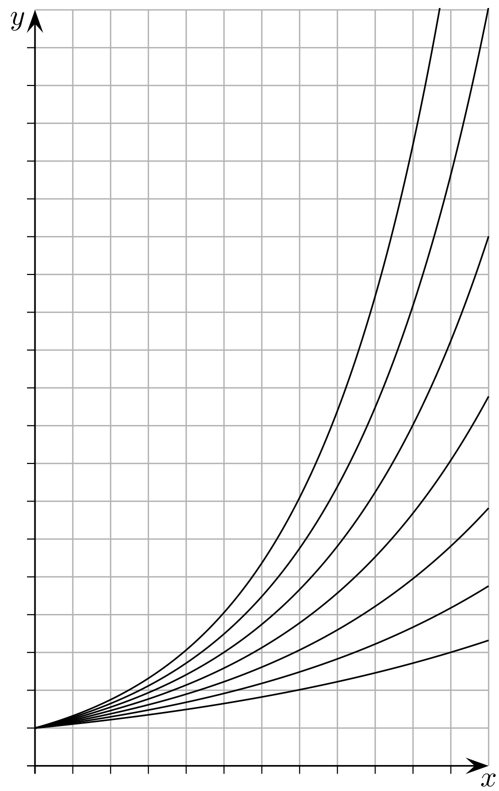
Wachstumsprozesse



1. Exponentielles Wachstum

$$f'(x) \;=\; k \cdot f(x) \qquad\qquad f(x) \;=\; a\,e^{kx} \quad \text{mit} \quad f(0) = a$$

$$\Delta y \;\approx\; k \cdot f(x) \quad \text{mit} \quad \Delta x = 1$$

Der Zuwachs ist proportional zum Bestand.

2. Begrenztes (beschränktes) Wachstum

$$f'(x) \;=\; k \cdot (G - f(x)) \qquad\qquad f(x) \;=\; G - a\,e^{-kx} \quad \text{mit} \quad f(0) = G - a$$

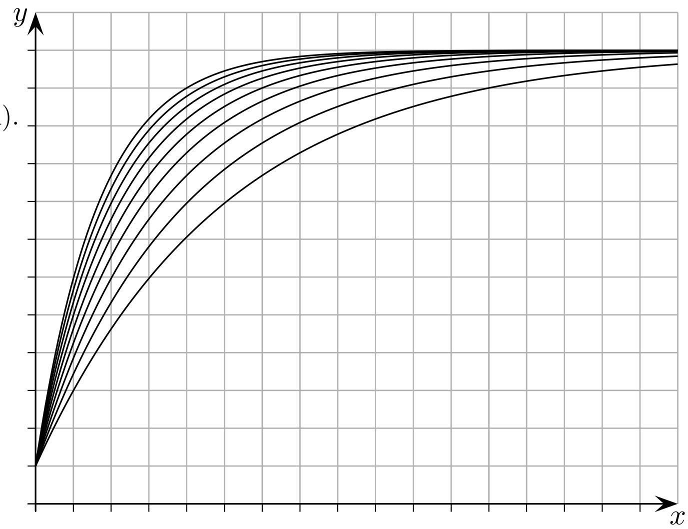
$$\Delta y \;\approx\; k \cdot (G - f(x)) \quad \text{mit} \quad \Delta x = 1$$

Der Zuwachs ist proportional zum Sättigungsmanko (Differenz Grenze G minus Bestand).

2. Sichtweise (Klammern wurden aufgelöst):

$$f'(x) \;=\; \underbrace{k \cdot G}_{m} - k \cdot f(x)$$

Ein konstanter Zuwachs wird um einen zum Bestand proportionalen Betrag verringert (siehe Tropfinfusion).



Wachstumsprozesse

3. Logistisches Wachstum

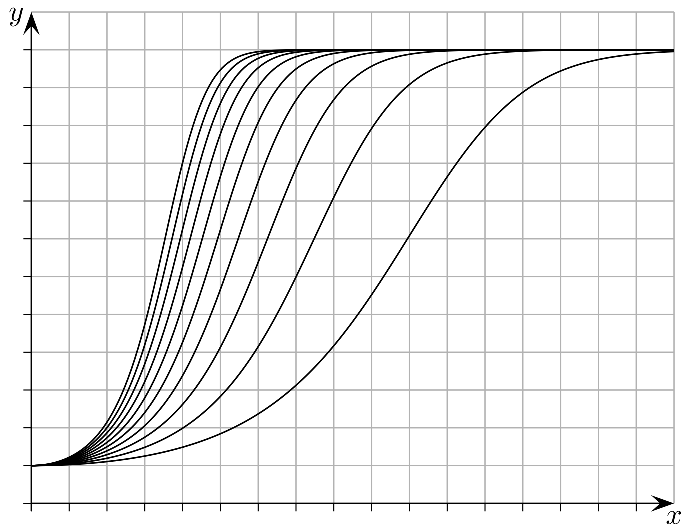
$$\begin{aligned} f'(x) &= k \cdot (G - f(x)) \cdot f(x) \\ &= \underbrace{k \cdot G} \cdot f(x) - k \cdot f(x) \cdot f(x) \end{aligned}$$

Begründe:
Anfänglich liegt ein nahezu exponentielles Wachstum vor.
$f(x)$ strebt gegen G für $x \longrightarrow \infty$.

$$f(x) = \frac{G}{1 + a e^{-kGx}} \qquad \text{mit} \qquad a = \frac{G - f(0)}{f(0)}$$

oder umgeformt

$$f(x) = \frac{G \cdot e^{bx}}{a + e^{bx}} \qquad \text{mit} \qquad b = kG$$

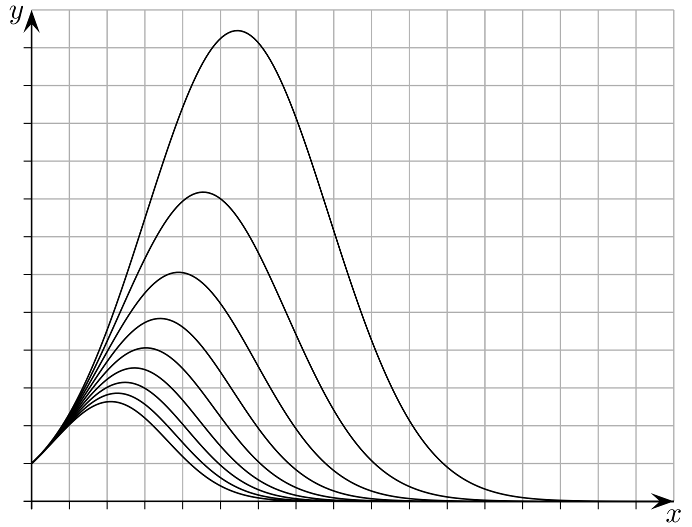


4. Vergiftetes Wachstum

$$f'(x) = (g - s\,x) \cdot f(x)$$

Im Gegensatz zum exponentiellen Wachstum
nimmt hier der Wachstumsfaktor mit der Zeit ab.

$$f(x) = a e^{gx - \frac{1}{2}sx^2}$$



a) Gegeben ist die DGL:

$$f'(x) = k \cdot f(x) + a$$

Die Änderung (Wachstumsgeschwindigkeit) setzt sich aus einem zum Bestand proportionalen Anteil und einer konstanten Zunahme/Abnahme zusammen.

Zeige, dass $f(x) = \left(b + \frac{a}{k}\right) \cdot e^{kx} - \frac{a}{k}$
die DGL löst, $b = f(0)$ (Anfangsbestand)

b) Gegeben ist die DGL:

$$f'(x) = k \cdot f(x) + ax$$

Die Änderung setzt sich aus einem zum Bestand proportionalen Anteil und einer zur Zeit x proportionalen Zunahme/Abnahme zusammen.

Zeige, dass $f(x) = \frac{k^2 + a}{k^2} \cdot e^{kx} - \frac{a}{k} x - \frac{a}{k^2}$
die DGL löst.
Wie groß ist hier der Anfangsbestand $f(0)$?

c) Gegeben ist die DGL:

$$f'(x) = k \cdot (f(x))^2$$

Die Änderung ist proportional zum Quadrat des Bestandes.

Zeige, dass $f(x) = \frac{a}{1 - akx}$

die DGL löst.
Wie groß ist hier der Anfangsbestand $f(0)$?