

Wachstumsprozesse, iterativ

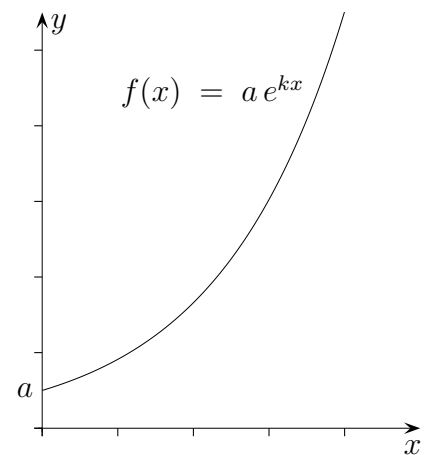
Exponentielles Wachstum

$$\text{DGL} \quad f'(x) = k \cdot f(x)$$

Differenzengleichung

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} &= k \cdot y_n \\ \Rightarrow y_{n+1} &= y_n + k \cdot y_n \cdot \Delta x \end{aligned}$$

$$\text{Anfangswert: } y_0 = a$$



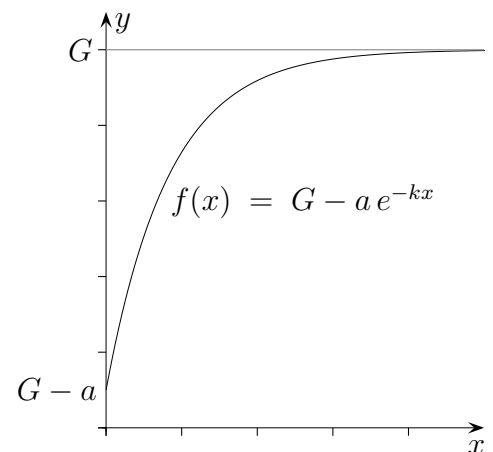
Beschränktes Wachstum

$$f'(x) = k \cdot (G - f(x))$$

Differenzengleichung

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} &= k \cdot (G - y_n) \\ \Rightarrow y_{n+1} &= y_n + k \cdot (G - y_n) \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Der Zuwachs ist stets ein Bruchteil der Differenz zur Grenze G .

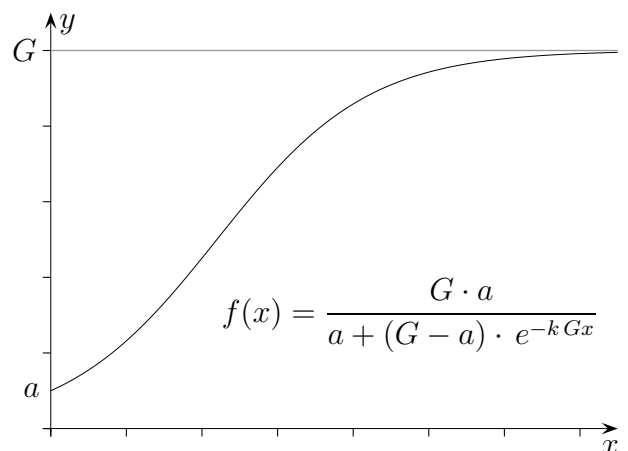


Logistisches Wachstum

$$f'(x) = k \cdot (G - f(x)) \cdot f(x)$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + k \cdot (G - y_n) \cdot y_n \cdot \Delta x$$

$$\begin{aligned} \text{umgeformt: } y_{n+1} &= y_n \left(1 + k^* \cdot \frac{G - y_n}{G} \cdot \Delta x \right) \\ &\text{mit } k^* = k \cdot G \end{aligned}$$



Durch die Umformung ist das anfängliche (näherungsweise) exponentielle Wachstum mit der Wachstumsrate k^* zu erkennen. k^* wird mit einem Faktor multipliziert, der gegen null strebt.

Wachstumsprozesse, iterativ

Vergiftetes Wachstum

$$f'(x) = (g - sx) \cdot f(x)$$

iterativ:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = y_n (g - sx_n)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_{n+1} &= y_n + y_n (g - sx_n) \cdot \Delta x \\ &\text{mit } x_n = n \cdot \Delta x \end{aligned}$$

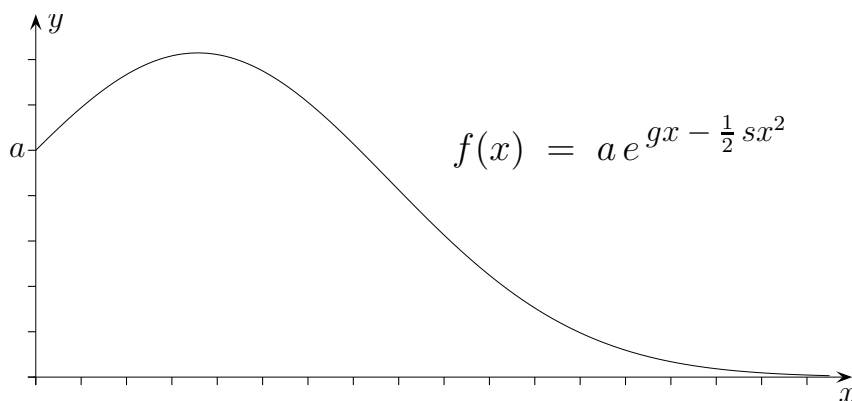
Geburtenrate g

Sterberate sx (proportional zur Zeit)

Beim exponentiellen Wachstum sind
Geburten- und Sterberate konstant.

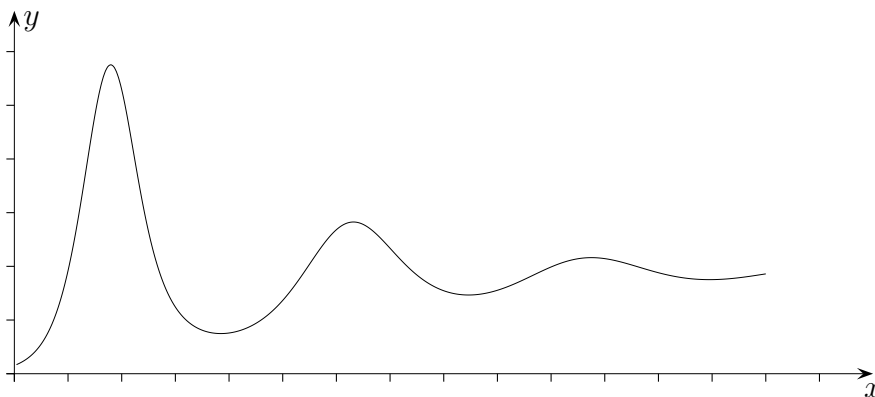
$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= g \cdot y_n - s \cdot y_n \quad (\Delta x = 1) \\ &= (g - s) \cdot y_n = k \cdot y_n \end{aligned}$$

Anfangswert: $y_0 = a$



Wachstum mit Giftabbau

(siehe Excel-Blatt)



Wachstumsprozesse, iterativ

Die Iterationsgleichung für das logistische Wachstum

$$y_{n+1} = y_n + k \cdot (G - y_n) \cdot y_n \cdot \Delta x$$

kann für $G = 1$ (y_n ist dann der Anteil) und $\Delta x = 1$ auf die Form

$$y_{n+1} = a y_n \cdot (1 - b y_n)$$

mit $a = k + 1$ und $b = \frac{k}{k + 1}$ gebracht werden.

Es gibt eine Fülle von weiteren Wachstumsmodellen, z.B. für die Erfassung von Fischpopulationen:

Ricker 1958

$$y_{n+1} = a y_n \cdot e^{-b y_n}$$

$$y_{n+1} = y_n \cdot e^{r(1 - \frac{y_n}{G})}$$

Beverton-Holt 1957

$$y_{n+1} = \frac{a y_n}{1 + b y_n}$$

Aus dem exponentiellen Wachstum mit der DGL $f'(x) = k \cdot f(x)$ ergibt sich ein neues Wachstumsmodell, wenn die Wachstumskonstante k von der Zeit abhängig angenommen wird, siehe z.B. vergiftetes Wachstum.

Die DGL lautet dann: $f'(x) = k(x) \cdot f(x)$

und die Lösungsfunktion: $f(x) = e^{\int_0^x k(y) dy}$ mit $f(0) = 1$

Ergänzung zum logistischen Wachstum, z.B. Ausbreitung eines Gerüchts, $\Delta x = 1$ (Zeiteinheit)

$$y_{n+1} = y_n + k \cdot (G - y_n) \cdot y_n$$

$$\text{umgeformt: } y_{n+1} = y_n + k^* \cdot \frac{G - y_n}{G} \cdot y_n \quad \text{mit } k^* = k \cdot G$$

$\frac{G - y_n}{G}$ ist der Anteil der Unwissenden (nicht Infizierten, ...) bzw. die Wahrscheinlichkeit, auf einen Unwissenden zu stoßen. Dieser Versuch wird y_n -mal wiederholt.