

# Integration durch Substitution

Durch eine Probe mit der Kettenregel kann bestätigt werden:

$$\int 2x \cdot e^{x^2+1} dx = e^{x^2+1}$$

$$\int (3x+1)^4 \cdot 3 dx = \frac{(3x+1)^5}{5}$$

Wie gehen wir vor, falls  $F(x) = \int e^{3x} dx$  ( $= \int f(x) dx$ ) gesucht ist?

In  $f(x) = e^{3x}$  setzen wir für  $x$  eine Funktion  $g(x)$  ein, so dass  $f(g(x))$  einfacher ist als  $f(x)$ . Die Funktion  $g$  lautet  $g(x) = \frac{x}{3}$ .

$$\text{Dann gilt: } \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int e^x \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} \cdot e^x = F(g(x))$$

Begründung für das letzte Gleichheitszeichen:

$F$  ist eine Stammfunktion von  $f$ , d.h.  $F' = f$  und damit ist

die Ableitung von  $F(g(x))$  nach der Kettenregel  $f(g(x)) \cdot g'(x)$ , daher  $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x))$ .

Wie erhalten wir nun  $F(x)$  aus  $F(g(x)) = \frac{1}{3} \cdot e^x$  ?

Wir setzen in  $F(g(x))$  die Umkehrfunktion  $g^{-1}(x) = 3x$  ein und erhalten gemäß  $g(g^{-1}(x)) = x$  das Ergebnis  $F(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{3x}$  (durch Probe bestätigen!).

Die einzelnen Rechenschritte lassen sich übersichtlich in einer symbolischen Rechnung zusammenfassen.

$$\int e^{3x} dx = ?$$

1.  $3x$  durch  $u$  ersetzen (substituieren)  $\int e^u dx$

2.  $3x = u$  nach  $x$  auflösen:  $x = \frac{1}{3}u$

3. hierin  $x$  als Funktion von  $u$  auffassen und ableiten:  $\frac{dx}{du} = \frac{1}{3}$

Integriere:

1.  $\int \frac{dx}{5x-4}$

4. nach  $dx$  auflösen und oben (siehe 1.) einsetzen:  $\int e^u \frac{1}{3} du$

2.  $\int \frac{dx}{(ax+b)^3}$

5. integrieren, anschließend für  $u$  wieder  $3x$  einsetzen:  $\frac{1}{3} \cdot e^{3x}$

3.  $\int x \cdot \sin x^2 dx$

---

Roofls

# Integration durch Substitution

Integriere:

1.  $\int \frac{dx}{5x - 4}$

2.  $\int \frac{dx}{(ax + b)^3}$

3.  $\int x \cdot \sin x^2 dx$

Lösungen:

1.  $\frac{1}{5} \ln(5x - 4)$ ,      Tipp:  $\int \frac{1}{x} dx = \ln x$

2.  $\frac{-1}{2a(ax + b)^2}$ ,       $\int x^{-3} dx =$   
 $-\frac{1}{2}x^{-2}$

3.  $-\frac{1}{2} \cos x^2$ ,       $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

---

*Roofs*

# Integration durch Substitution

Erläutere das Folgende:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{mit} \quad F'(x) = f(x)$$

$$(F(g(x)))' = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$F(g(x)) = \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

$$\underbrace{[F(g(x))]_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)}}_{F(b) - F(a)} = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

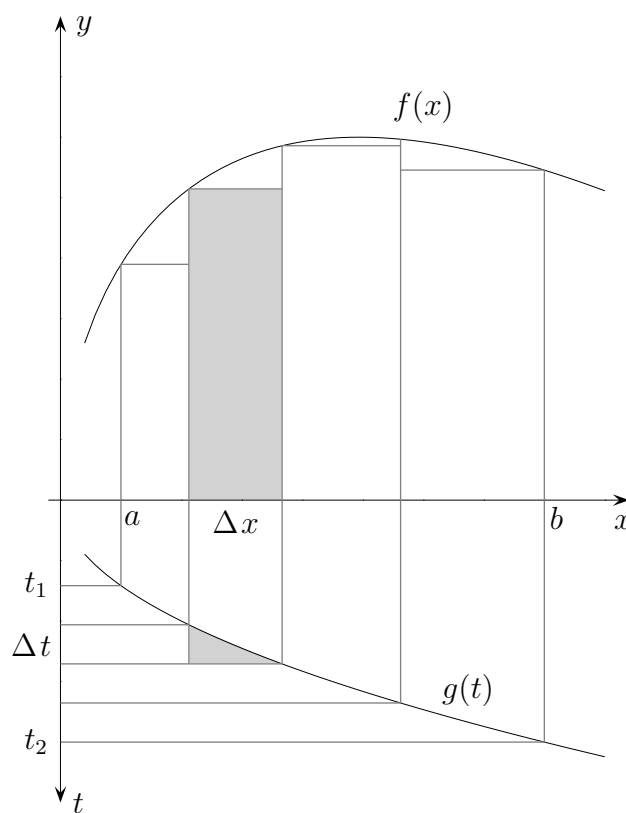
$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

# Integration durch Substitution    anschaulich

Der Substitutionsregel

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(g(t)) \cdot g'(t) dt \quad \text{mit } g(t_1) = a \text{ und } g(t_2) = b$$

liegt ein Wechsel der Variablen von  $x$  nach  $t$  zugrunde.



Statt die Rechtecke  $\Delta x f(x)$  zu addieren und zum Grenzwert überzugehen, kann auch das  $t$ -Intervall unterteilt werden; wegen  $\Delta x \approx g'(t) \cdot \Delta t$  ist  $\Delta t$  mit  $f(g(t)) \cdot g'(t)$  zu multiplizieren. Bei der Summenbildung sind die neuen Grenzen  $t_1$  und  $t_2$  zu beachten.