

Partielle (teilweise) Integration

Aus der Ableitungsregel für ein Produkt $f \cdot g$ von Funktionen kann eine Integrationsregel hergeleitet werden.

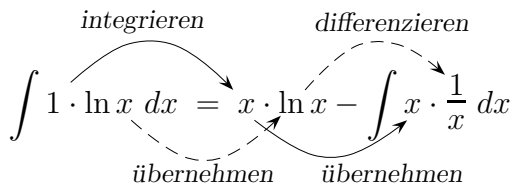
Die Produktregel lautet: $(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$

daher gilt: $f(x) \cdot g(x) = \int f(x) \cdot g'(x) dx + \int f'(x) \cdot g(x) dx$

umgestellt: $\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$

oder kürzer: $\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$

Beispiel:
$$\int \underset{u}{x} \cdot \underset{v'}{e^x} dx = \underset{u}{x} \cdot \underset{v}{e^x} - \int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{e^x} dx = x \cdot e^x - e^x = e^x (x - 1)$$



1. Faktor integrieren, dann Ergebnis übernehmen
2. Faktor übernehmen, dann differenzieren

Wähle u und v' so, dass die Integration von v' leicht ausführbar ist und dass das Ableiten von u zu einer einfacheren Funktion führt.

Die eine Funktion des Produkts wird also integriert, das Ergebnis steht auch hinter dem Integralzeichen, sowie die Ableitung der anderen Funktion.

Integriere:

a) $\int x \cos x dx$

b) $\int x^2 \sin x dx$

c) $\int x^2 e^{3x} dx$

d) $\int x^2 \cdot \ln x dx$

e) $\int \ln x dx$

f) $\int e^x \sin x dx$

Partielle (teilweise) Integration

Integriere:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int x \cos x \, dx & \text{b) } \int x^2 \sin x \, dx & \text{c) } \int x^2 e^{3x} \, dx \\ \text{d) } \int x^2 \cdot \ln x \, dx & \text{e) } \int \ln x \, dx & \text{f) } \int e^x \sin x \, dx \end{array}$$

Ergebnisse

$$\begin{array}{l} \text{a) } x \sin x + \cos x \quad (+ C) \\ \text{b) } -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) \\ \text{c) } \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} \\ \text{d) } \frac{x^3}{3} (\ln x - \frac{1}{3}) \\ \text{e) } x(\ln x - 1) \\ \text{f) } \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \end{array}$$