Partielle (teilweise) Integration

Aus der Ableitungsregel für ein Produkt $f \cdot g$ von Funktionen
kann eine Integrationsregel hergeleitet werden.

Die Produktregel lautet:	$(f \cdot g)'(x)$	$=$	$f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$
daher gilt:	$f(x) \cdot g(x)$	$=$	$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx + \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$
umgestellt:	$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx$	$=$	$f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$
oder kürzer:	$\int u \cdot v' \; dx$	$=$	$u \cdot v - \int u' \cdot v \; dx$

Beispiel:

$$\int \underset{u}{x} \cdot \underset{v'}{e^x} \; dx \;=\; \underset{u}{x} \cdot \underset{v}{e^x} \;-\; \int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{e^x} \; dx \;=\; x \cdot e^x - e^x \;=\; e^x\,(x-1)$$

integrieren *differenzieren*

$$\int 1 \cdot \ln x \; dx \;=\; x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \; dx$$

übernehmen *übernehmen*

1. Faktor integrieren, dann Ergebnis übernehmen
2. Faktor übernehmen, dann differenzieren

Wähle u und v' so, dass die Integration von v' leicht ausführbar ist und dass das Ableiten von u zu einer <u>einfacheren</u> Funktion führt.

Die eine Funktion des Produkts wird also integriert, das Ergebnis steht auch hinter dem Integralzeichen, sowie die Ableitung der anderen Funktion.

Integriere:

a) $\int x \;\cos x \, dx$	b) $\int x^2 \;\sin x \, dx$	c) $\int x^2 \, e^{3x} \, dx$
d) $\int x^2 \cdot \ln x \, dx$	e) $\int \ln x \, dx$	f) $\int e^x \;\sin x \, dx$

Partielle (teilweise) Integration

Integriere:

a) $\int x \; \cos x \; dx$ b) $\int x^2 \; \sin x \; dx$ c) $\int x^2 \, e^{3x} \; dx$

d) $\int x^2 \cdot \ln x \; dx$ e) $\int \ln x \; dx$ f) $\int e^x \; \sin x \; dx$

Ergebnisse

a) $x \sin x + \cos x \qquad (+ \; C)$

b) $-x^2 \cos x + 2\,(x \sin x + \cos x)$

c) $\frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x\, e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x}$

d) $\frac{x^3}{3} (\ln x - \frac{1}{3})$

e) $x\,(\ln x - 1)$

f) $\frac{1}{2} \; e^x (\sin x - \cos x)$