Ortskurve

Gegeben ist die Funktionenschar:

$f_k(x) = 3x^2 - \frac{3}{k}x^3, \quad k > 0.$

Für sie gilt: $\quad Max\left(\underbrace{\frac{2}{3}k}_{x} \mid \underbrace{\frac{4}{9}k^2}_{y}\right)$

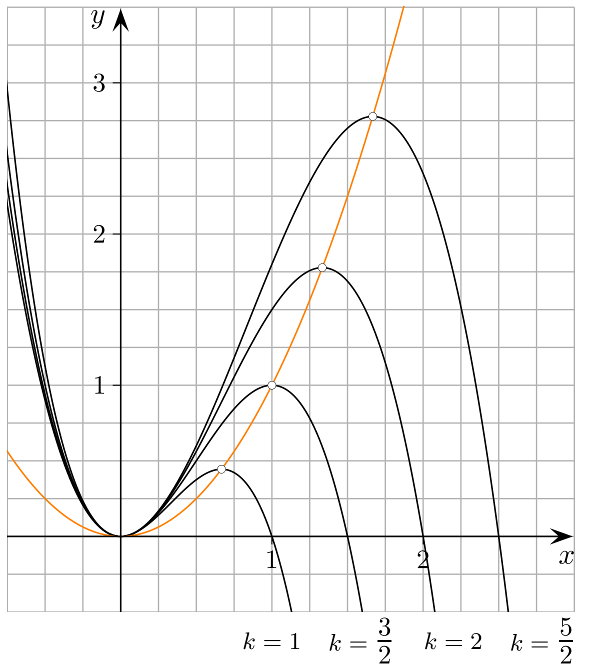
Um die Funktion zu ermitteln, auf derem Graph (Ortskurve) die Maxima liegen, eliminieren wir k.

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{3}\,k \\ y &= \frac{4}{9}\,k^2 \end{aligned}$$

indem wir die 1. Gleichung nach k auflösen und anschließend den Term für k in die 2. Gleichung einsetzen. Wir erhalten:

$$y = x^2$$

Durch den x-Wert ist der k-Wert eindeutig festgelegt (1. Gleichung), und durch den k-Wert der y-Wert (2. Gleichung). Es gibt daher eine direkte Beziehung zwischen dem x- und y-Wert.



Auf gleiche Weise ergibt sich als Ortskurve der Wendepunkte

$$W\left(\frac{k}{3} \mid \frac{2}{9}k^2\right) \qquad y = 2x^2$$

2. Beispiel:

Gegeben sei die Funktionenschar

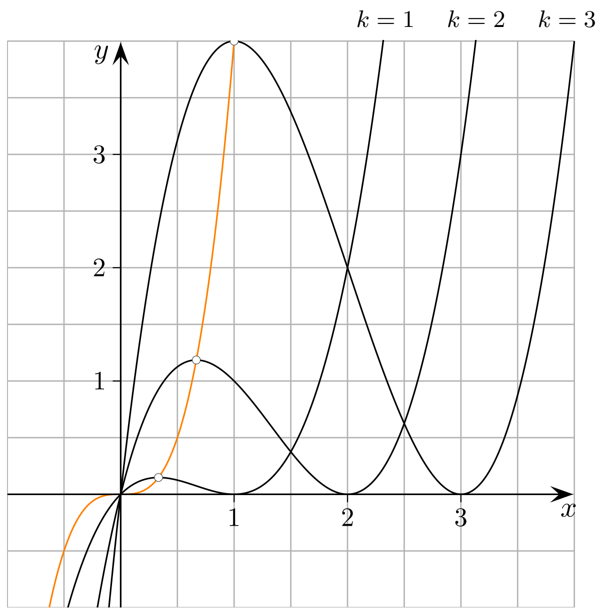
$f_a(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x, \quad a > 0$

Für sie gilt:

$Max\left(\frac{a}{3} \mid \frac{4}{27}a^3\right), \quad W\left(\frac{2}{3}a \mid \frac{2}{27}a^3\right)$

Ortskurve der Maxima: $\quad y = 4x^3$

Ortskurve der Wendepunkte: $\quad y = \frac{1}{4}x^3$



Ortskurve $\quad$ e-Funktionen

1. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion gegeben durch

$$f_t(x) = e^x\,(t - x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass

a) das Maximum $Max\big(t-1 \mid e^{t-1}\big)$ ist (Begründung ohne die 2. Ableitung),

b) die Ortskurve der Maxima lautet: $g(x) = e^x$

Zur Kontrolle: $\quad f_t'(x) = e^x\,(t - x - 1)$

2. Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion gegeben durch

$$f_t(x) = e^{tx}\,(x-1)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass

a) alle Funktionen f_t zwei gemeinsame Punkte haben,

b) die 1. Ableitung lautet: $f_t'(x) = (x-1)(tx - t + 2)\,e^{tx}$,

c) ein Minimum und ein Maximum existieren (Begründungen ohne die 2. Ableitung),

d) die Ortskurve der Maxima lautet: $g(x) = e^{\frac{2x}{1-x}}\,(x-1)^2$

3. Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eine Funktion gegeben durch

$$f_t(x) = -\frac{2x}{t}\,e^{tx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass

a) der Wendepunkt $W\left(-\frac{2}{t} \mid \frac{4}{e^2 \cdot t^2}\right)$ ist (nur notw. Begründung),

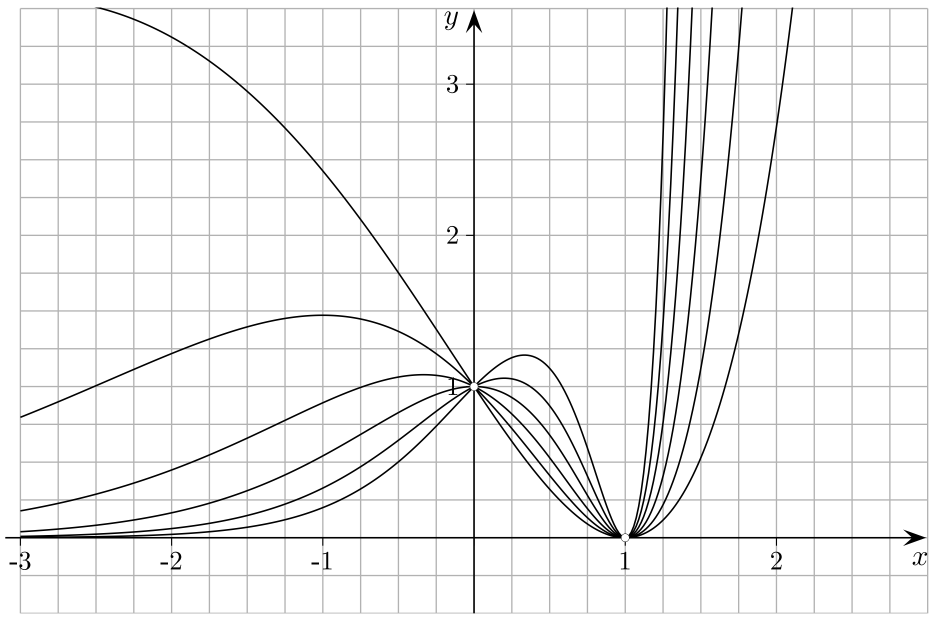
b) die Ortskurve der Wendepunkte lautet: $g(x) = \frac{x^2}{e^2}$

Zur Kontrolle: $\quad f_t'(x) = -2e^{tx}\,(x + \frac{1}{t})$

$f_t''(x) = -2e^{tx}\,(2 + tx)$

Funktionenschar

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion gegeben durch $f_t(x) = e^{tx}\,(x-1)^2, \quad x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass alle Funktionen f_t zwei gemeinsame Punkte haben.



Die offensichtlich gemeinsamen Punkte der Graphen könnten mit der Funktion verifiziert werden.
Die gemeinsamen Punkte könnte man sich auch anhand des Funktionsterms überlegen.
Ein algebraischer Ansatz wäre $f_{t_1}(x) = f_{t_2}(x)$ oder
z. B. $f_1(x) = f_t(x)$.