Logistisches Wachstum

Verhulst (1804-1849), belgischer Mathematiker

Das exponentielle Wachstum ist durch einen konstanten Wachstumsfaktor k gekennzeichnet. Zur Erinnerung:

$\Delta y = k \cdot f(x) \cdot \Delta x$ Der Zuwachs ist proportional zum Bestand und zur Zeit x.

d.h. $f'(x) = k \cdot f(x)$, die Lösung lautet: $f(x) = a \cdot e^{kx}$

Realistischer ist ein Wachstumsmodell, das die Beschränktheit des Wachstums berücksichtigt. Der Wachstumsfaktor k soll sich nun aus der konstanten Vermehrungsrate k_1 und der zum jeweiligen Bestand $f(x)$ proportionalen Sterberate k_2 zusammensetzen. Die zugehörige DGL (Differentialgleichung) lautet daher:

$$* \quad f'(x) = (k_1 - k_2 \cdot f(x)) \cdot f(x)$$

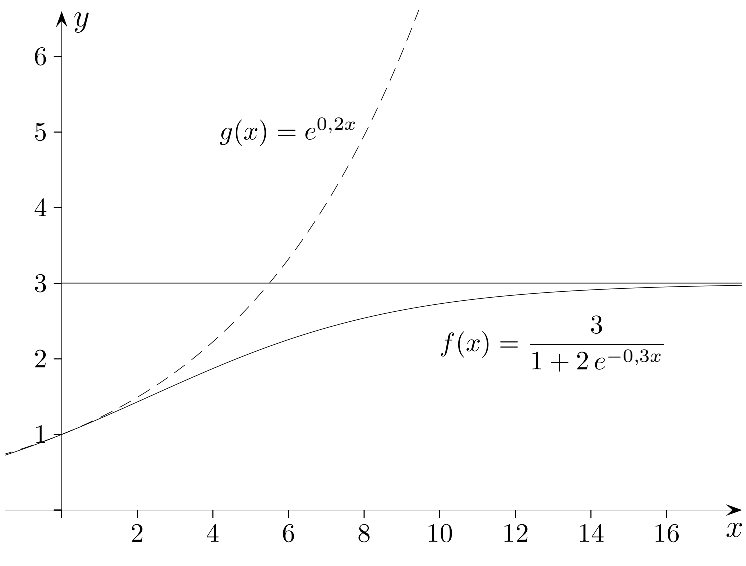
Beispiel:
$$* * \quad f'(x) = (0{,}3 - 0{,}1 \cdot f(x)) \cdot f(x)$$

Wir suchen eine Lösung, für die $f(0) = 1$ ist.

Aus dieser DGL sind einige Eigenschaften von f zu erkennen:

1. f ist monoton steigend,
2. die Funktionswerte von f nähern sich dem Wert 3, der nicht überschritten wird,
3. Der Graph von f hat einen s-förmigen (sigmoiden) Verlauf,
4. $g(x) = e^{0{,}2x}$ ist eine Näherungsfunktion für einen kleinen Bereich um $x = 0$.

Die Lösung der DGL $**$ lautet: $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2\,e^{-0{,}3x}}$



Herleitung:

$$\begin{aligned}
y' &= (0{,}3 - 0{,}1\,y)\,y \\
\frac{10\,y'}{(3-y)\cdot y} &= 1 \\
\frac{y'}{y} + \frac{y'}{3-y} &= \frac{3}{10} \qquad \textit{Partialbruch-zerlegung} \\
\ln y - \ln(3-y) &= \frac{3}{10}\,x + C \\
\frac{y}{3-y} &= e^{-0{,}3\,x} \cdot C^*, \quad C^* = \tfrac{1}{2} \\
y &= \ldots = \frac{3}{1 + 2\,e^{-0{,}3\,x}}
\end{aligned}$$

Aufg.
Leite beide Seiten der DGL $*$ ab und bestimme damit den y-Wert des Wendepunktes.

franz. logis Unterkunft, Wohnraum

Relatives Sättigungsmanko

Die DGL des logistischen Wachstums, die die Proportionalität der Wachstumsgeschwindigkeit zum Bestand und zum Sättigungsmanko beinhaltet,

$$f'(x) = k \cdot (G - f(x)) \cdot f(x)$$

wird durch

$$f(x) = \frac{G \cdot f(0)}{f(0) + (G - f(0)) \cdot e^{-kGx}} = \frac{G}{1 + ae^{-kGx}}\,, \qquad \text{mit} \quad a = \frac{G - f(0)}{f(0)}$$

gelöst.

Der Bezug zum exponentiellen Wachstum wird hervorgehoben,
indem k durch $\frac{k^*}{G}$ ersetzt und anschließend k^* wieder in k umbenannt wird:

$$f'(x) = k \cdot f(x) \cdot \left(1 - \frac{f(x)}{G}\right)$$

$$f(x) = \frac{G}{1 + ae^{-kx}}$$

Eine Umformulierung der Lösung offenbart eine interessante Eigenschaft dieses Wachstums.

$$\frac{f(x)}{G} = \frac{1}{1 + ae^{-kx}}$$

$$\frac{G}{f(x)} = 1 + ae^{-kx}$$

$$\frac{G}{f(x)} - 1 = \frac{G - f(0)}{f(0)}\, e^{-kx}$$

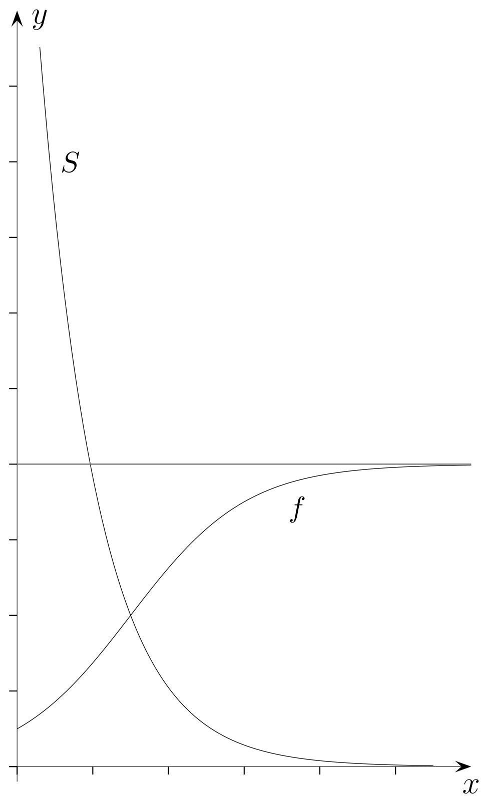
$$\frac{G - f(x)}{f(x)} = \frac{G - f(0)}{f(0)}\, e^{-kx}$$

Das zum Bestand relative Sättigungsmanko

$$S(x) = \frac{G - f(x)}{f(x)}$$

nimmt also exponentiell ab.

Beim begrenzten Wachstum gilt dies für das absolute Sättigungsmanko.



Einfache Lösung der logistischen DGL

Beginnen wir nun noch einmal von vorne mit der DGL

$$f'(x) = k \cdot f(x) \cdot \Big(1 - \frac{f(x)}{G}\Big), \qquad k > 0$$

und weisen für das relative Sättigungsmanko

$$S(x) = \frac{G - f(x)}{f(x)}$$

$$S(x) = -kS(x) \qquad \text{nach.}$$

Diese Beziehung ermöglicht ein einfaches Lösen der DGL und kann aufgrund von vorgegebenen Daten in Anlehnung an das begrenzte Wachstum vermutet werden.

$$\begin{aligned}
S(x) &= \frac{G}{f(x)} - 1 \\
S'(x) &= -\frac{G \cdot f'(x)}{(f(x))^2} \\
&= -\frac{G \cdot k \cdot \Big(1 - \frac{f(x)}{G}\Big)}{f(x)} \\
&= -k \cdot \frac{G - f(x)}{f(x)} \\
S'(x) &= -k\,S(x)
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
S(x) &= S(0)\,e^{-kx} \\
\frac{G - f(x)}{f(x)} &= S(0)\,e^{-kx} \\
\frac{G}{f(x)} - 1 &= S(0)\,e^{-kx} \\
\frac{G}{f(x)} &= 1 + S(0)\,e^{-kx} \\
\frac{f(x)}{G} &= \frac{1}{1 + S(0)\,e^{-kx}} \\
f(x) &= \frac{G}{1 + S(0)\,e^{-kx}} \qquad \text{mit} \quad S(0) = \frac{G - f(0)}{f(0)}
\end{aligned}$$