

Logistische Funktion

Verhulst (1804-1849), belgischer Mathematiker

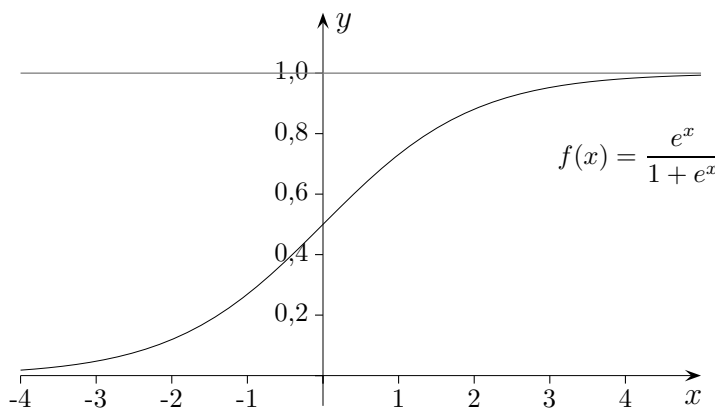
Wachstumsvorgänge sind letztendlich immer begrenzt. Beim begrenzten Wachstum wird die Sättigungsgrenze von Anfang an berücksichtigt. Bei vielen Wachstumsprozessen ist die Grenze aufgrund ihrer Größe für die anfängliche Entwicklung ohne Belang. Im Folgenden versuchen wir ein anfänglich exponentielles, schließlich jedoch begrenztes Wachstum zu modellieren.

Wegen des exponentiellen Wachstums zu Beginn sei der Ausgangspunkt die Funktion $f(x) = e^x$. Da eine Begrenzung vorliegen soll, muss das Ansteigen von e^x ausgeglichen werden. Dies kann durch eine Division durch $1 + e^x$ erfolgen. Die Funktion

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \quad \left(= \frac{1}{1 + e^{-x}} \right)$$

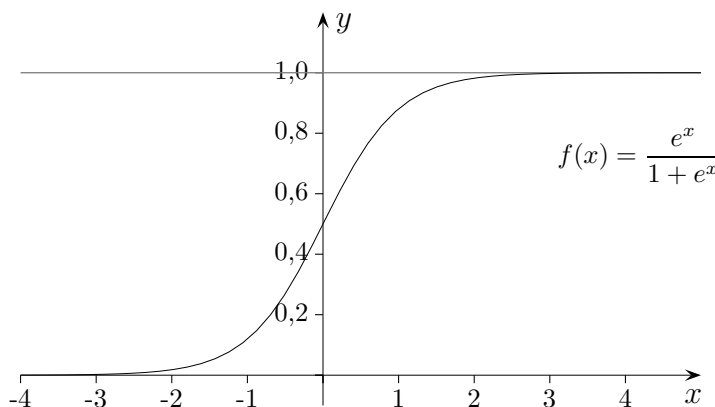
besitzt die Grenze $G = 1$, einen Wendepunkt an der Stelle $x = 0$ (wird noch bewiesen) mit der Steigung $f'(0) = \frac{1}{4}$. Die Grenze kann durch eine Multiplikation mit G verändert werden.

$$f(x) = \frac{G \cdot e^x}{1 + e^x}$$



Die Steilheit des Anstiegs im Wendepunkt kann durch den Parameter k variiert werden.

$$f(x) = \frac{G \cdot e^{kx}}{1 + e^{kx}}, \quad f'(0) = \frac{G \cdot k}{4}$$



Roofs

franz. logis Unterkunft, Wohnraum

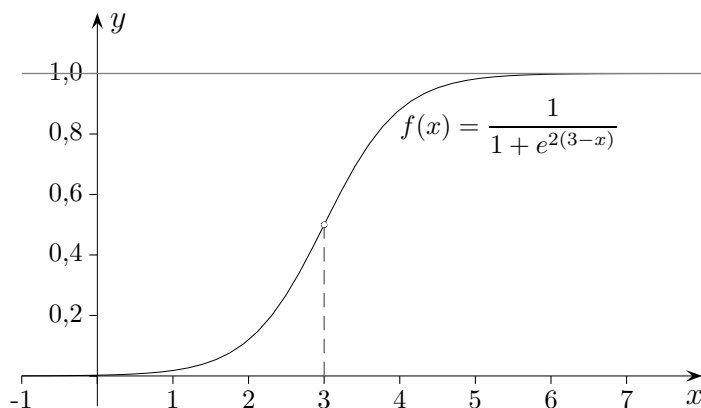
Logistische Funktion, Fortsetzung

Schließlich kann der Graph geeignet verschoben werden, a ist die Stelle des Wendepunkts.

$$f(x) = \frac{G \cdot e^{k(x-a)}}{1 + e^{k(x-a)}}, \quad \left(= \frac{G}{1 + e^{k(a-x)}} \right)$$

$$f(0) = \frac{G}{1 + e^{ka}}$$

$$f'(a) = \frac{G \cdot k}{4}$$



Wir untersuchen die Wachstumsgeschwindigkeit $f'(x)$.

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x \cdot (1 + e^x) - (e^x)^2}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{1 + e^x} - \frac{(e^x)^2}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{1 + e^x} \cdot \left(1 - \frac{e^x}{1 + e^x}\right) \\ &= f(x) \cdot (1 - f(x)) \end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall gilt die Beziehung:

$$f'(x) = k \cdot f(x) \cdot (G - f(x))$$

1. Erläutere diese Beziehung.
2. Begründe, dass die Funktion $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$ an der Stelle $x = 0$ einen Wendepunkt hat.
3. Vier Schüler einer Schule mit 400 Schülern setzen ein Gerücht in die Welt. Das Gerücht breitet sich anfänglich annähernd exponentiell mit einem prozentualen Zuwachs von 20% pro Minute aus. Nach welcher Zeit kennen 380 Schüler das Gerücht?

Logistische Funktion

3. Vier Schüler einer Schule mit 400 Schülern setzen ein Gerücht in die Welt. Das Gerücht breitet sich anfänglich annähernd exponentiell mit einem prozentualen Zuwachs von 20% pro Minute aus. Nach welcher Zeit kennen 380 Schüler das Gerücht?

Lösung

Mit dem Funktionsansatz $f(x) = \frac{G}{1 + e^{k(a-x)}}$

können die beiden Gleichungen

$$\frac{400}{1 + e^{ka}} = 4$$

$$\frac{400}{1 + e^{k(a-1)}} = 4,8 \quad \text{aufgestellt werden.}$$

Aus ihnen ergeben sich $k = 0,1843$ und $a = 24,927$.

Mit $f(x) = 380$ ermitteln wir $x = 41$ (Minuten).

Logistische Funktionen Übung

Logistische Funktionen können auf vielfältige Weise angegeben werden.
Einige Funktionsterme lassen sich durch Umformung ineinander überführen, welche?

Geübt werden kann das Ermitteln:

- der Sättigungsgrenze,
- des Anfangswerts,
- der 1. Ableitung,
- der Stelle des stärksten Anstiegs,
- einer Stammfunktion,
- des Einflusses eines Parameters auf den Verlauf des Graphen.

$$1. \quad f(x) = \frac{a}{1 + \frac{a-b}{b} e^{-kax}} \qquad f'(x) = k \cdot (a - f(x)) \cdot f(x)$$

$$2. \quad f(x) = \frac{a}{b + e^{-kx}} \qquad f'(x) = k \cdot f(x) - \frac{kb}{a} \cdot f^2(x)$$

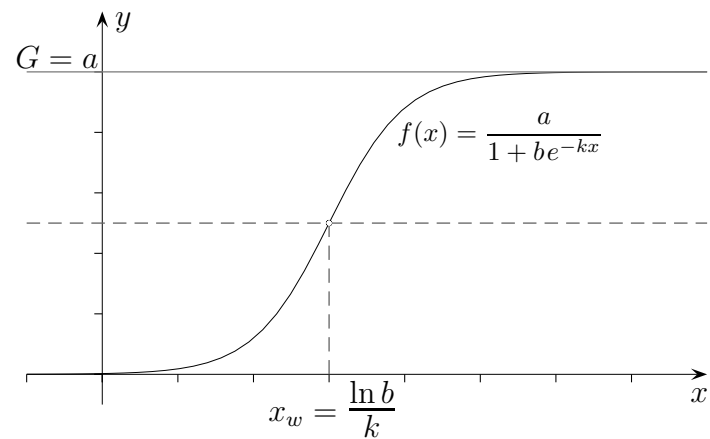
$$3. \quad f(x) = \frac{a}{1 + e^{-k(x-b)}} \qquad f'(x) = \frac{k}{a} \cdot (a - f(x)) \cdot f(x)$$

$$4. \quad f(x) = \frac{a \cdot e^{kx}}{b + e^{kx}} \qquad f'(x) = k \cdot f(x) - \frac{k}{a} \cdot f^2(x)$$

$$5. \quad f(x) = \frac{a}{1 + b e^{-kx}} \qquad f'(x) = \frac{k}{a} \cdot (a - f(x)) \cdot f(x)$$

$$6. \quad f(x) = a - \frac{ab}{b + e^{kx}} \qquad f'(x) = k \cdot f(x) - \frac{k}{a} \cdot f^2(x)$$

Logistische Funktion Ergänzungen



$$f(x) = \frac{a}{1 + b e^{-kx}}$$

$$f'(x) = \frac{abk e^{-kx}}{(1 + b e^{-kx})^2}$$

1. Wendepunkt.

$$f(x_w) = \frac{G}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_w = \frac{\ln b}{k}$$

2. Symmetrie

Der Graph ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt.

Die Bedingung lautet:

$$f(x_w + x) - \frac{G}{2} = \frac{G}{2} - f(x_w - x)$$

$$\iff f(x_w + x) + f(x_w - x) = G$$