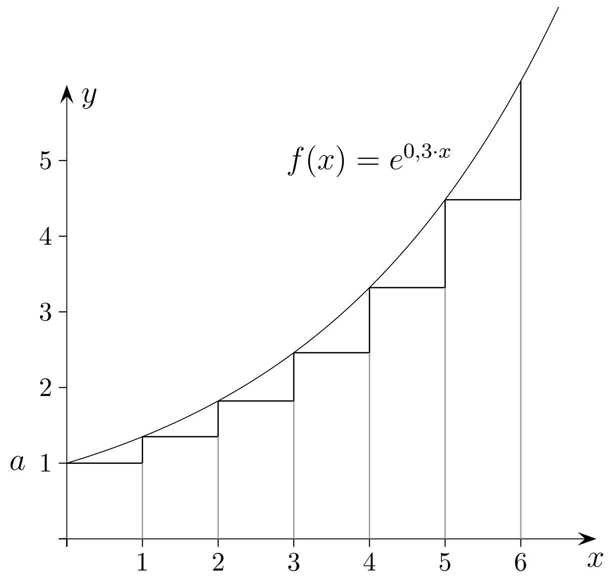
Prozentuales Wachstum

1. ## Exponentielles Wachstum

   wird durch die Funktion $f(x) = ae^{kx}$, $k > 0$, erfasst.
   Für die Wachstumsgeschwindigkeit f' gilt: $f'(x) = k \cdot f(x)$,
   d. h. sie ist proportional zum Bestand.

   Da $y_{n+1} = y_n \cdot e^k$ ist, besteht zwischen der prozentualen Zunahme (pro Zeiteinheit) p und der Wachstumskonstanten k die Beziehung:

   $e^k = 1 + \frac{p}{100}$, siehe Exponentielles und prozentuales Wachstum.

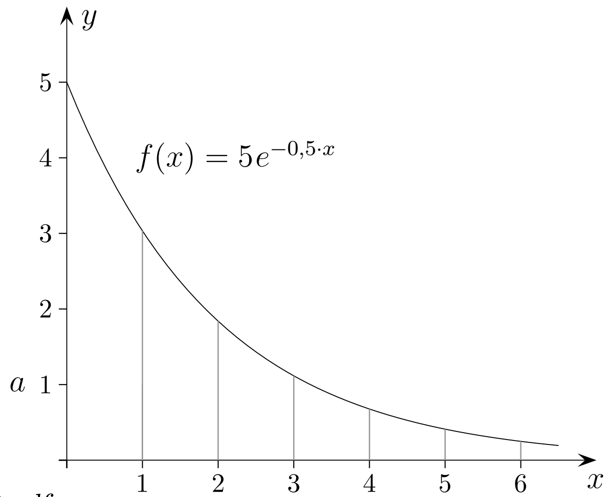


2. ## Exponentielle Abnahme

   wird durch die Funktion $f(x) = ae^{-kx}$, $k > 0$, beschrieben.
   Für die Wachstumsgeschwindigkeit f' gilt:
   $f'(x) = -k \cdot f(x)$, d. h. sie ist proportional zum Bestand.

   Da $y_{n+1} = y_n \cdot e^{-k}$ ist, besteht zwischen der prozentualen Abnahme (pro Zeiteinheit) p und der Wachstumskonstanten k die Beziehung:

   $e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$.

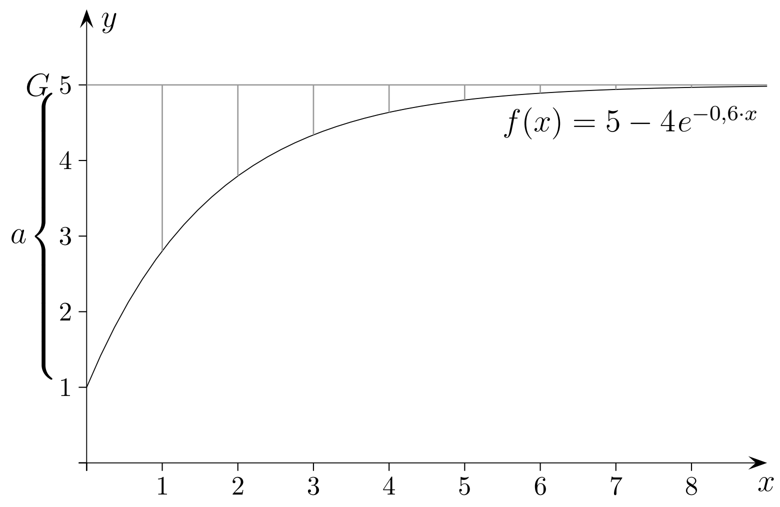


3. Begrenztes Wachstum
wird durch die Funktion $f(x) = G - ae^{-kx}$, $k > 0$, erfasst. Für den Anfangsbestand gilt: $f(0) = G - a$.

Welcher Zusammenhang (DGL) besteht zwischen der Wachstumsgeschwindigkeit f' und dem Bestand $f(x)$? Hierzu leiten wir f ab.

$$\begin{aligned}
f(x) &= G - a \cdot e^{-kx} \\
f'(x) &= -a \cdot e^{-kx} \cdot (-k) \\
&= \underbrace{a \cdot e^{-kx}}_{G - f(x) \quad (= G - (G - a \cdot e^{-kx}))} \cdot k \\
f'(x) &= k \cdot (G - f(x))
\end{aligned}$$

Die Wachstumsgeschwindigkeit f' ist proportional zu $G - f(x)$,
d. h. zur Differenz von Wachstumsgrenze und Bestand.



An den Funktionstermen ist zu erkennen, dass der Graph des begrenzten Wachstums aus dem Graphen der exponentiellen Abnahme (für gleiches a und k) durch Spiegelung an der x-Achse und Verschiebung in y-Richtung hervorgeht. Daher nehmen die Längen der senkrechten Strecken jeweils mit den Faktor e^{-k} ab. Die prozentuale Abnahme p (pro Zeiteinheit) bezogen auf die Differenz von Bestand und Grenze ist also konstant, es gilt somit auch hier: $e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$.
Diese Abnahme ist eine Zunahme des Bestandes. (siehe Aufg. 3)

Aufgaben

1. In einem Labor vermehren sich Bakterien (Anfangsbestand ist 15) einer bestimmten Art unbegrenzt, und zwar täglich um 20 %. Nach welcher Zeit sind 600 Bakterien vorhanden?

2. Milchsäurebakterien verdoppeln bei $37°C$ jeweils alle halbe Stunde ihre Anzahl. Wie viele Milchsäurebakterien sind nach 7 Stunden in einer Milch, in der sich anfänglich 10 Bakterien befinden?

3. Es werden 10 Fische in einem Teich ausgesetzt. Man nimmt an, dass sich die Fische jährlich um 25 % vom Unterschied zwischen dem vorhandenen Bestand und der geschätzten Kapazität des Teiches (800 Fische) vermehren. Nach welcher Zeit sind 750 Fische vorhanden?

4. Ein Patient erhält täglich am Morgen $m = 3\ mg$ eines Medikaments. Die im Körper befindliche Medikamentenmenge wird im Laufe des Tages um $p = 20\,\%$ abgebaut. Ermittle eine Funktion, die die Anreicherung des Medikaments im Körper erfasst. Welche Medikamentenmenge hat sich nach 12 Tagen angereichert?

   Überlege dir, dass die Anreicherung durch ein Gleichgewicht von Abbau und Neuaufnahme begrenzt ist. Beweise dann, dass ein begrenztes Wachstum vorliegt, indem du nachweist, dass die Differenz von Bestand und Grenze exponentiell abnimmt.

Aufgaben

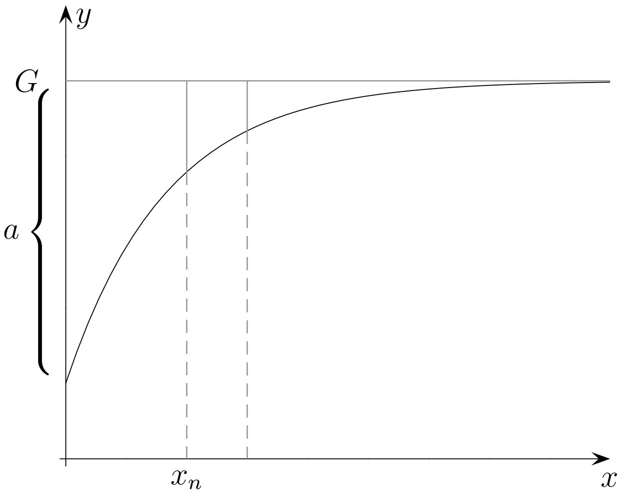
1. In einem Labor vermehren sich Bakterien (Anfangsbestand ist 15) einer bestimmten Art unbegrenzt, und zwar täglich um 20 %. Nach welcher Zeit sind 600 Bakterien vorhanden?

2. Milchsäurebakterien verdoppeln bei $37°C$ jeweils alle halbe Stunde ihre Anzahl. Wie viele Milchsäurebakterien sind nach 7 Stunden in einer Milch, in der sich anfänglich 10 Bakterien befinden?

3. Es werden 10 Fische in einem Teich ausgesetzt. Man nimmt an, dass sich die Fische jährlich um 25 % vom Unterschied zwischen dem vorhandenen Bestand und der geschätzten Kapazität des Teiches (800 Fische) vermehren. Nach welcher Zeit sind 750 Fische vorhanden?

4. Ein Patient erhält täglich am Morgen $m = 3\ mg$ eines Medikaments. Die im Körper befindliche Medikamentenmenge wird im Laufe des Tages um $p = 20\,\%$ abgebaut. Ermittle eine Funktion, die die Anreicherung des Medikaments im Körper erfasst. Welche Medikamentenmenge hat sich nach 12 Tagen angereichert?

   Überlege dir, dass die Anreicherung durch ein Gleichgewicht von Abbau und Neuaufnahme begrenzt ist. Beweise dann, dass ein begrenztes Wachstum vorliegt, indem du nachweist, dass die Differenz von Bestand und Grenze exponentiell abnimmt.



Lösungen:

1. 20,2 Tage
2. 163840 Milchsäurebakterien
3. 9,6 Jahre
4. Für die Grenze G gilt: $\frac{p}{100} \cdot G = m \quad \Longrightarrow \quad G = \frac{m \cdot 100}{p}\,, \qquad G = 15$

   Sei y_n der Bestand zur Zeit x_n, zu zeigen ist:

   $(G - y_n) \cdot \text{Faktor} = G - (\, y_n \cdot (1 - \frac{p}{100}) + m\,)$

   Auf der rechten Seite wird die Veränderung von y_n durch Abbau und täglicher Einnahme berücksichtigt. Näheres siehe: Zu- und Abfluss

   Mit dem Term für die Grenze ermitteln wir den konstanten Faktor: $1 - \frac{p}{100}$. Man beachte, dass in ihm derselbe Prozentsatz wie in der Aufgabe enthalten ist.

   Mit $e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}\,, \quad f(x) = G - ae^{-kx}$ und $a = 12$ erhalten wir $f(12) = 14{,}2\ (mg)$.

Tropfinfusion

Ein Patient bekommt durch einen Tropf kontinuierlich stündlich die Infusionslösungsmenge m (in g) zugeführt. Im Körper werden stündlich $p\,\%$ der vorhandenen Infusionslösungsmenge abgebaut.

Die Zunahme der Infusionslösungsmenge im Körper währt solange, bis ein Gleichgewichtszustand von Abbau und zugeführter Menge m erreicht ist, d.h. das Lösungsmengenwachstum ist begrenzt.

Die DGL $f'(x) = -k \cdot f(x) + m$ mit dem Anfangswert $f(0) = 0$ modelliert diesen Vorgang.

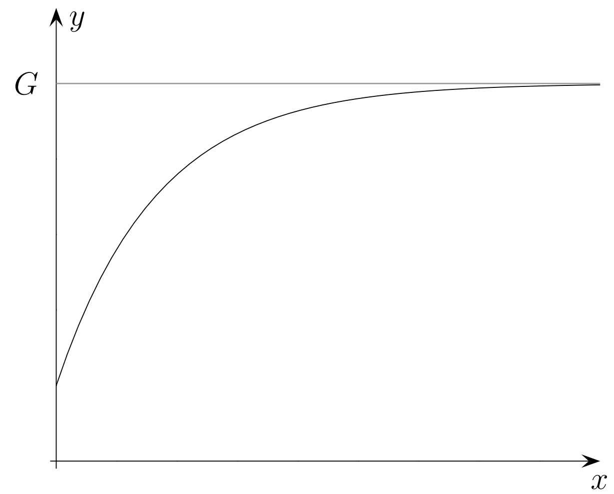
Mit einer einfachen Umformung ist zu erkennen, dass es sich hierbei um das bekannte beschränkte Wachstum mit der DGL $f'(x) = k \cdot \big(G - f(x)\big)$ (Zuwachs ist proportional zum Sättigungsmanko) und der Lösungsfunktion $f(x) = G - \big(G - f(0)\big)\, e^{-kx}$ handelt.

$$f'(x) = -k \cdot f(x) + m$$

$$f'(x) = k \cdot \big(\frac{m}{k} - f(x)\big)$$

Der Infusionsvorgang hat also die Grenze $G = \dfrac{m}{k}$

und wird durch die Funktion $f(x) = \dfrac{m}{k} - \dfrac{m}{k}\, e^{-kx}$ beschrieben.



Für die Konstante k gilt (Näheres siehe Zu- und Abfluss) wieder $e^{-k} = 1 - \dfrac{p}{100}$

und für $p \leq 10$ ist $k \approx \dfrac{p}{100}$.

Bevölkerungsschwund

Ein Land, das im Jahr 2000 noch 40 Millionen Einwohner hatte, würde einen jährlichen Bevölkerungsschwund von 3 % verzeichnen, wenn es nicht jährlich 120 000 Einwanderer aufnehmen würde.

a) Wie lautet die Differentialgleichung, mit der sich die Entwicklung der Einwohnerzahl näherungsweise beschreiben lässt?

b) Wie viele Einwohner erwartet man im Jahr 2030?
Wie wird sich die Einwohnerzahl langfristig entwickeln?

Bevölkerungsschwund

Ein Land, das im Jahr 2000 noch 40 Millionen Einwohner hatte, würde einen jährlichen Bevölkerungsschwund von 3 % verzeichnen, wenn es nicht jährlich 120 000 Einwanderer aufnehmen würde.

a) Wie lautet die Differentialgleichung, mit der sich die Entwicklung der Einwohnerzahl näherungsweise beschreiben lässt?

$f'(t) = -0{,}03 \cdot f(t) + 120\,000$ mit dem Anfangswert $f(0) = 40$ Mio.

$f(t) = 4 + 36\,e^{-0{,}03t}$ (in Mio.)

Allgemein:

$$f'(x) = -k \cdot f(x) + m$$

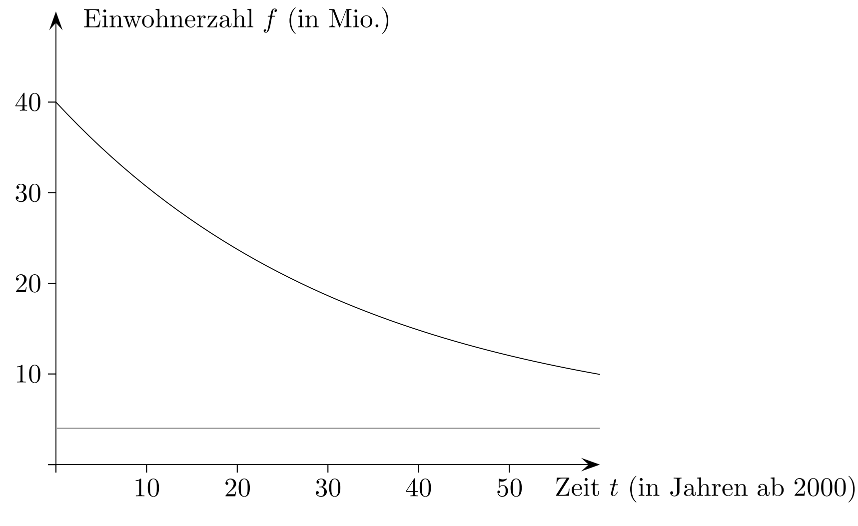
$$f'(x) = -k \cdot \left(f(x) - \frac{m}{k} \right)$$

Es ist zu erkennen, dass es sich hierbei um einen beschränkten Zerfall
mit der DGL $f'(x) = -k \cdot \big(f(x) - G \big)$
und der Lösungsfunktion (Trennung der Variablen) $f(x) = G + \big(f(0) - G \big)\, e^{-kx}$
handelt.

Die Grenze lautet $G = \dfrac{m}{k}$.

b) Wie viele Einwohner erwartet man im Jahr 2030? $f(30) = 18{,}6$ (Mio.)

Wie wird sich die Einwohnerzahl langfristig entwickeln? $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 4$ (Mio.)



Erwärmung GTR

Eine Materialprobe wird in einem Labor erhitzt.
Die Erwärmung wird durch die Funktion $T(t) = 70 - 50 \cdot e^{-0{,}2t}, \;\; t \geq 0,$
beschrieben, t in Minuten, $T(t)$ in Grad Celsius.

a) Skizzieren Sie die Graphen von T und T'.

b) Zu welcher Zeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Probe erwärmt, am größten, und wie groß ist sie dann?

c) Berechnen Sie die Durchschnittstemperatur der ersten 10 Minuten.

d) Nach welcher Zeit hat sich die Probe auf die Hälfte seiner Endtemperatur erwärmt?

e) Nach welcher Zeit hat sich die anfängliche Erwärmungsgeschwindigkeit halbiert?

Erwärmung GTR

Eine Materialprobe wird in einem Labor erhitzt.
Die Erwärmung wird durch die Funktion $T(t) = 70 - 50 \cdot e^{-0{,}2t}$, $t \geq 0$,
beschrieben, t in Minuten, $T(t)$ in Grad Celsius.

a) Skizzieren Sie die Graphen von T und T'.

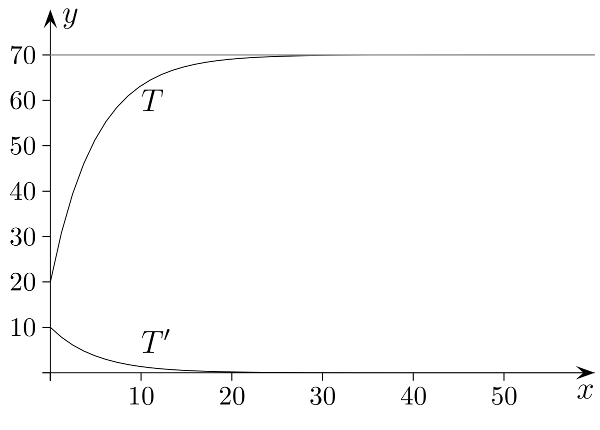
b) Zu welcher Zeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Probe erwärmt, am größten, und wie groß ist sie dann?

c) Berechnen Sie die Durchschnittstemperatur der ersten 10 Minuten.

d) Nach welcher Zeit hat sich die Probe auf die Hälfte seiner Endtemperatur erwärmt?

e) Nach welcher Zeit hat sich die anfängliche Erwärmungsgeschwindigkeit halbiert?

Ergebnisse: (ohne Einheiten)



a)

b) $t = 0$, 10

c) 48,4

d) 1,8

e) 3,5

Abkühlung

Der Kaffee in einer Tasse ist $80^\circ\,C$ heiß. Die Umgebungstemperatur beträgt $25^\circ\,C$. Nach 3 Minuten ist die Kaffeetemperatur um $10^\circ\,C$ gesunken.

a) Man nimmt an, dass die Kaffeetemperatur $f(x)$ zur Zeit x durch die Funktion $f(x) = a + b \cdot e^{-kx}$ beschrieben wird. Bestimmen Sie die Konstanten a, b und k und skizzieren Sie den Graphen von f.

b) Nach welcher Zeit liegt die Kaffeetemperatur unter $30^\circ\,C$?

c) Nach welcher Zeit unterscheidet sich die Kaffeetemperatur um höchstens $1^\circ\,C$ von der Endtemperatur?

d) $W(x) = \displaystyle\int_0^x (f(t) - 25)\,dt$ ist ein Maß für die abgegebene Wärmemenge.
Wie lautet der integralfreie Funktionsterm von $W(x)$?
Skizziere den Graphen von $W(x)$.

Abkühlung

Der Kaffee in einer Tasse ist $80^\circ\,C$ heiß. Die Umgebungstemperatur beträgt $25^\circ\,C$. Nach 3 Minuten ist die Kaffeetemperatur um $10^\circ\,C$ gesunken.

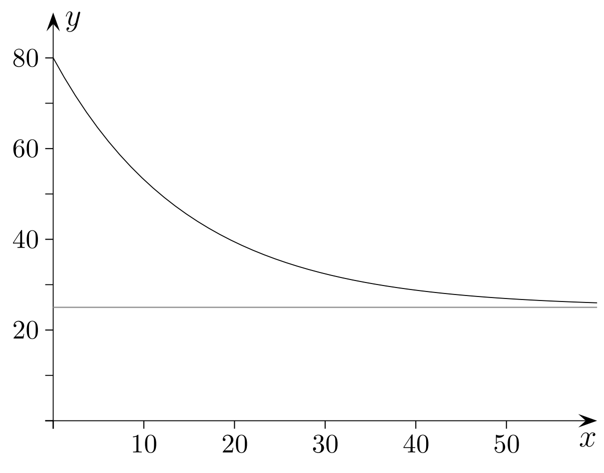
a) Man nimmt an, dass die Kaffeetemperatur $f(x)$ zur Zeit x durch die Funktion $f(x) = a + b \cdot e^{-kx}$ beschrieben wird. Bestimmen Sie die Konstanten a, b und k und skizzieren Sie den Graphen von f.

b) Nach welcher Zeit liegt die Kaffeetemperatur unter $30^\circ\,C$?

c) Nach welcher Zeit unterscheidet sich die Kaffeetemperatur um höchstens $1^\circ\,C$ von der Endtemperatur?

d) $W(x) = \int_0^x (f(t) - 25)\,dt$ ist ein Maß für die abgegebene Wärmemenge.
Wie lautet der integralfreie Funktionsterm von $W(x)$?
Skizziere den Graphen von $W(x)$.

Ergebnisse: (ohne Einheiten)

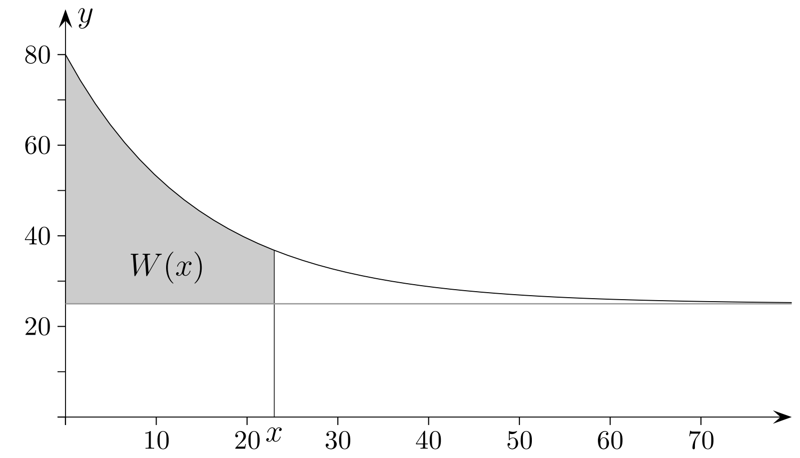


a) $f(x) = 25 + 55 \cdot e^{-0{,}0669\,x}$

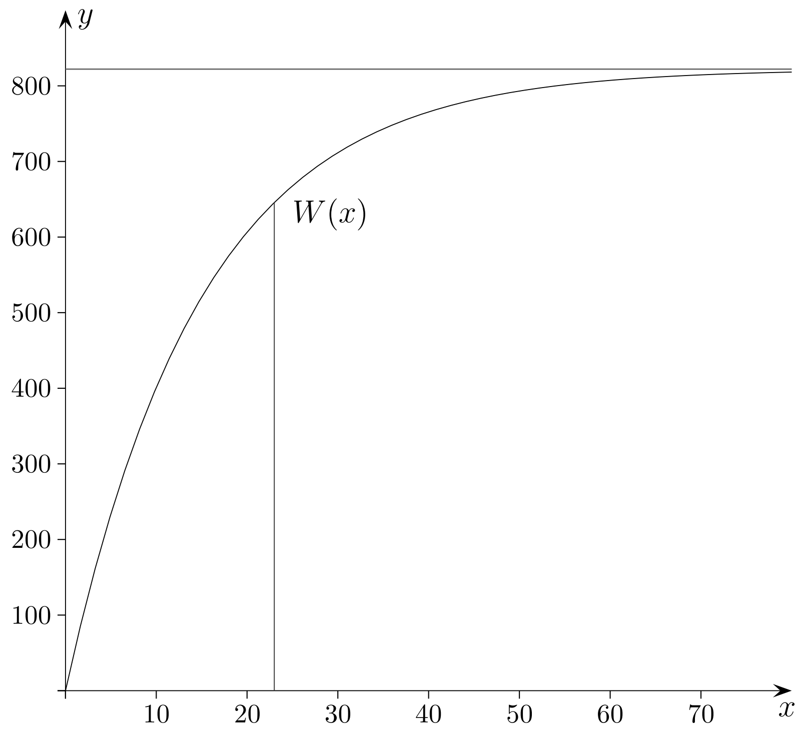
b) 35,8

c) 59,9

d) $W(x) = 822{,}123 - 822{,}123 \cdot e^{-0{,}0669 \cdot x}$



y
80
60
40
20
W(x)
10
20
x
30
40
50
60
70



y
800
700
600
500
400
300
200
100
W(x)
10
20
30
40
50
60
70
x