

Approximation der Funktion $f(x) = e^x$

1. Zunächst soll die Funktion $f(x)$ durch eine lineare Funktion $g(x) = ax + b$ an der Stelle $x = 0$ approximiert werden.

- a) $g(0) = 1$
 b) $g'(0) = 1$

Dies ergibt:

$$b = 1$$

$$a = 1$$

Die Funktion lautet daher: $g(x) = x + 1$

2. Nun soll die Funktion $f(x)$ durch ein Polynom 2. Grades $g(x) = ax^2 + bx + c$ an der Stelle $x = 0$ approximiert werden.

- a) $g(0) = 1$
 b) $g'(0) = 1$
 c) $g''(0) = 1$

Dies ergibt:

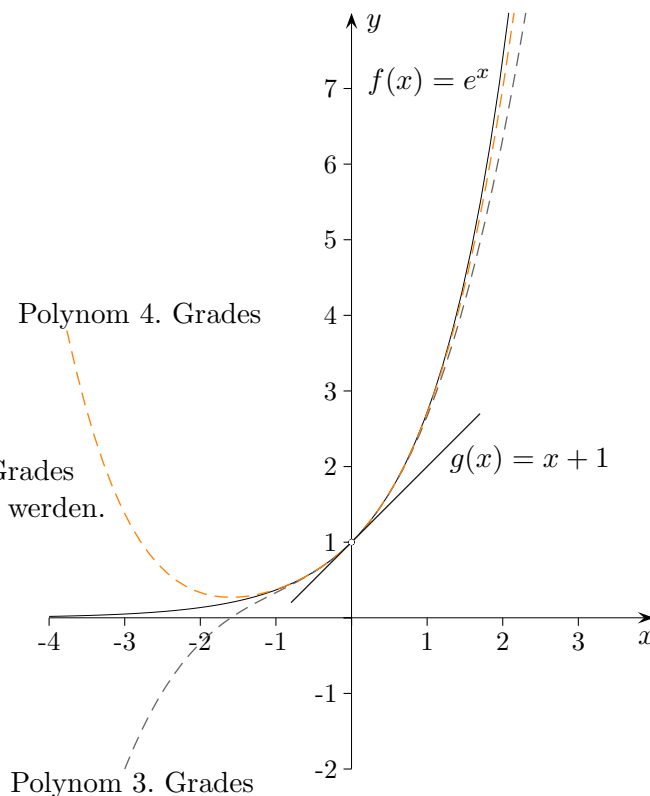
$$c = 1$$

$$b = 1$$

$$2a = 1$$

Also: $a = \frac{1}{2}$

Die Funktion lautet daher: $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$



3. Die nächstbesseren Näherungen durch Polynome 3. und 4. Grades lauten:

$$g(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1 \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

4. Wir vermuten, dass gilt: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

5. Und insbesondere: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$

Leite die einzelnen Summanden der e -Reihe ab. Was stellst du fest?