Abkühlung Aufgabe

1. In einem Labor wird ein Körper mit der Temperatur $50°C$ zum Zeitpunkt $x = 0$ zum Abkühlen in einen Raum gebracht. Die Raumtemperatur beträgt $0°C$ und wird linear um $10°C$ pro Stunde erhöht.

   a) Geben Sie die Differentialgleichung an (mit Erläuterung), die diesen Abkühlungsvorgang beschreibt, die Abkühlungskonstante sei $k = 1$.

   b) Lösen Sie die Differentialgleichung und bestimmen Sie die Temperatur, die der Körper nach zwei Stunden hat. Skizzieren und erläutern Sie den Graphen des zeitlichen Verlaufs der Körpertemperatur.

   c) Ermitteln Sie die diskrete Näherungslösung der Differentialgleichung für die nächsten sechs Werte für $\Delta x = 0,5$.

Lösungshinweise:

Differentialgleichungen dieser Art können mit einem Ansatz $f(x) = a(x) \cdot b(x)$ gelöst werden, wobei ein Faktor so gewählt wird, dass die Rechnung erheblich vereinfacht wird, indem ein Term null wird.
Für eine diskrete Näherungslösung einer Differentialgleichung wird $f'(x)$ durch $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x}$ ersetzt und nach y_{n+1} aufgelöst. y_{n+1} kann dann iterativ errechnet werden.

Abkühlungsaufgabe Lösungskizze

1\. a) *Die Differentialgleichung lautet:* $f'(x) = -\,(f(x) - 10x)$, *wobei* $f(0) = 50$ *ist.*

b) *Produktansatz:* $f(x) = a(x) \cdot b(x)$, *kurz:* $f = a \cdot b$

$$\begin{aligned} a' \cdot b + a \cdot b' + a \cdot b &= 10 \cdot x \\ a \cdot (b' + b) + a' \cdot b &= 10 \cdot x \qquad \text{wähle } b \text{ so, dass } b' + b = 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad b = e^{-x}, \qquad$ *DGL:* $\quad a' \cdot e^{-x} = 10 \cdot x, \qquad a' = e^{x} \cdot 10 \cdot x$

partielle Integration führt zu: $\quad a = (10x - 10) \cdot e^{x} + C, \qquad f = a \cdot b = 10 \cdot x - 10 + C \cdot e^{-x}$

Bedingung $\quad f(0) = 50, \qquad -10 + C = 50 \quad \Longrightarrow \quad C = 60$

Also insgesamt: $f(x) = 10x - 10 + 60e^{-x}$

$f(2) = 18,12$

c) *Diskrete Näherungslösung:*

$y_{n+1} \;=\; y_n + (10\,x_n - y_n) \cdot 0,5 \quad \Longleftrightarrow \quad y_{n+1} \;=\; 0,5\,y_n + 5\,x_n$

Anfangswert: $\quad y_0 = 50$

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Näherung	50	25	15	12,5	13,8	16,9	20,9