

Abkühlung

Mathematisch ähnlich wie das beschränkte Wachstum kann die Abkühlung eines Körpers beschrieben werden, dessen Temperatur höher ist als die der Umgebung. $f(x)$ sei die Temperatur des Körpers zum Zeitpunkt x , a sei die Temperatur zur Zeit $x = 0$ und U die konstante Umgebungstemperatur.

Die Temperaturabnahme Δy ist proportional zur Differenz von Temperatur $f(x)$ und Umgebungstemperatur U und proportional zur Zeit.

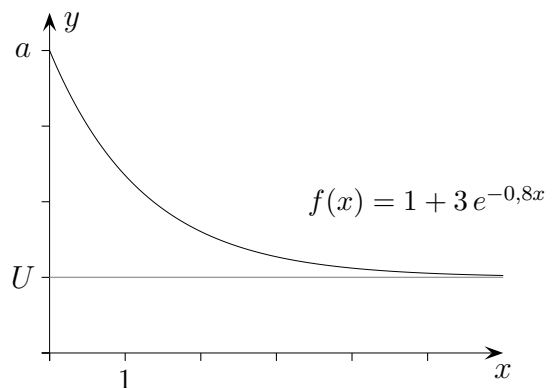
$$\Delta y = -k \cdot (f(x) - U) \cdot \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -k \cdot (f(x) - U)$$

$$** \quad f'(x) = -k \cdot (f(x) - U)$$

Die allgemeine Lösung der DGL ** lautet:

$$f(x) = U + (a - U) e^{-kx} .$$



In einem Labor wird ein Körper mit der Temperatur 50°C zum Zeitpunkt $x = 0$ zum Abkühlen in einen Raum gebracht. Die Raumtemperatur beträgt 0°C und wird linear um 10°C pro Stunde erhöht.

- Geben Sie die Differentialgleichung an (mit Erläuterung), die diesen Abkühlungsvorgang beschreibt, die Abkühlungskonstante sei $k = 1$.
- Lösen Sie die Differentialgleichung und bestimmen Sie die Temperatur, die der Körper nach zwei Stunden hat. Skizzieren und erläutern Sie den Graphen des zeitlichen Verlaufs der Körpertemperatur.
- Ermitteln Sie die diskrete Näherungslösung der Differentialgleichung für die nächsten sechs Werte für $\Delta x = 0,5$.

Lösungshinweise:

Differentialgleichungen dieser Art können mit einem Ansatz $f(x) = a(x) \cdot b(x)$ gelöst werden, wobei ein Faktor so gewählt wird, dass die Rechnung erheblich vereinfacht wird, indem ein Term null wird.

Für eine diskrete Näherungslösung einer Differentialgleichung wird $f'(x)$ durch $\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x}$ ersetzt und nach y_{n+1} aufgelöst. y_{n+1} kann dann iterativ errechnet werden.

Abkühlungsaufgabe Lösungsskizze

a) Die Differentialgleichung lautet: $f'(x) = -(f(x) - 10x)$, wobei $f(0) = 50$ ist.

b) Produktansatz: $f(x) = a(x) \cdot b(x)$, kurz: $f = a \cdot b$

$$a' \cdot b + a \cdot b' + a \cdot b = 10 \cdot x$$

$$a \cdot (b' + b) + a' \cdot b = 10 \cdot x \quad \text{wähle } b \text{ so, dass } b' + b = 0$$

$$\implies b = e^{-x}, \quad \text{DGL:} \quad a' \cdot e^{-x} = 10 \cdot x, \quad a' = e^x \cdot 10 \cdot x$$

partielle Integration führt zu: $a = (10x - 10) \cdot e^x + C$, $f = a \cdot b = 10 \cdot x - 10 + C \cdot e^{-x}$

$$\text{Bedingung } f(0) = 50, \quad -10 + C = 50 \implies C = 60$$

Also insgesamt: $f(x) = 10x - 10 + 60e^{-x}$

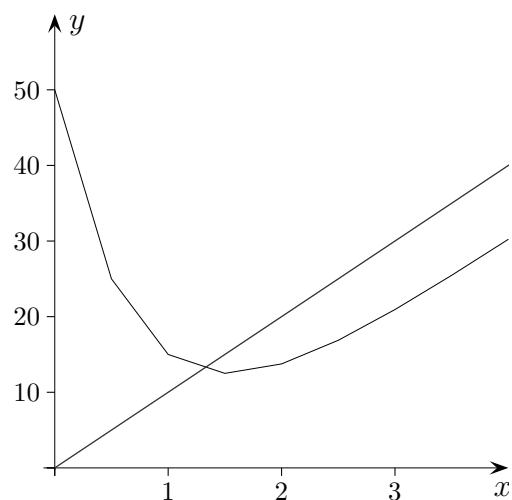
$$f(2) = 18,12$$

c) Diskrete Näherungslösung:

$$y_{n+1} = y_n + (10x_n - y_n) \cdot 0,5 \iff y_{n+1} = 0,5y_n + 5x_n$$

Anfangswert: $y_0 = 50$

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Näherung	50	25	15	12,5	13,8	16,9	20,9



Roofls

Bestimmung des Todeszeitpunkts

Ein Leichnam mit einer Körpertemperatur von $28,5^\circ\text{C}$ wird um Mitternacht bei einer konstanten Umgebungstemperatur von $17,4^\circ\text{C}$ entdeckt. Nach Ablauf von 2 Stunden beträgt die Temperatur des Leichnams $23,2^\circ\text{C}$. Um die Todesursache (Unfalltod oder Mord) herauszufinden, ist der Todeszeitpunkt zu bestimmen.

Aus experimentellen Untersuchungen ist bekannt, dass sich die Oberflächentemperatur $f(x)$ einer Leiche proportional zur Differenz zwischen der Leichen- und der Umgebungstemperatur U ändert (Newtonsches Abkühlungsgesetz). Die DGL lautet daher:

$$f'(x) = -k \cdot (f(x) - U) \quad \text{mit } k > 0.$$

Die allgemeine Lösung ist $f(x) = U + (y_0 - U) e^{-kx}$ mit $f(0) = y_0$.

Nachweis: $f'(x) = -k \cdot (f(x) - U)$

$$\frac{f'(x)}{f(x) - U} = -k$$

$$\ln(f(x) - U) = -kx + C$$

beachte: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + C$

$$f(x) - U = e^{-kx+C}$$

$$f(x) = U + e^{-kx+C}$$

$$f(x) = U + e^{-kx} \cdot e^C$$

$$f(0) = y_0 \implies y_0 = U + e^C \implies e^C = y_0 - U$$

$$f(x) = U + (y_0 - U) e^{-kx}$$

Zum Zeitpunkt $x_0 = 0$ wird der Leichnam entdeckt, seine Temperatur beträgt y_0 ($^\circ\text{C}$).

Die Konstante k kann aus einer weiteren Temperaturmessung ermittelt werden. Sei zum Zeitpunkt x_1 die Temperatur y_1 , d.h.

$$U + (y_0 - U) e^{-kx_1} = y_1$$

$$e^{-kx_1} = \frac{y_1 - U}{y_0 - U}$$

$$k = -\frac{1}{x_1} \ln\left(\frac{y_1 - U}{y_0 - U}\right)$$

Der Todeszeitpunkt wird aus $f(x_T) = 37$ ermittelt.

Lösung:

$$k = 0,3245, \quad x_T = -1,752$$

(1 Stunde 45 Minuten vor Mitternacht)

