

Leibniz' Kalkül

Im 17. Jahrhundert entdeckten Barrow (Lehrer von Newton), Newton und Leibniz den Zusammenhang von Tangenten- und Flächenbestimmungen. Es entstand eine einheitliche Theorie zur Berechnung von Volumen, Schwerpunkten, Bogenlängen, Oberflächen usw. Zuvor konnten viele derartige Einzelprobleme von den Mathematikern Cavalieri, Roberval, Fermat, Huygens, Wallis und Descartes und weiteren gelöst werden.

Dass der Leibnizsche *calculus differentialis et integralis* so erfolgreich war, liegt nicht zuletzt an den glücklichen, nach langem Überlegen und Probieren gefundenen Bezeichnungen

$$\frac{df}{dx} \quad \text{und} \quad \int f dx$$

mit denen sich die Regeln des Kalküls einfach formulieren und handhaben lassen - und außerdem auch noch fast als selbstverständlich erscheinen, wie z.B. die Kettenregel oder die Regel zur Differentiation der Umkehrfunktion:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Leibniz rechnete mit Differentialen wie dy und dx . Das waren für ihn unendlich kleine von null verschiedene (infinitesimale) Größen. Auf die Frage von Kritikern, was genau nun darunter sich vorzustellen sei, antwortete er ausweichend und warnte vor exzessiver Gewissenhaftigkeit.

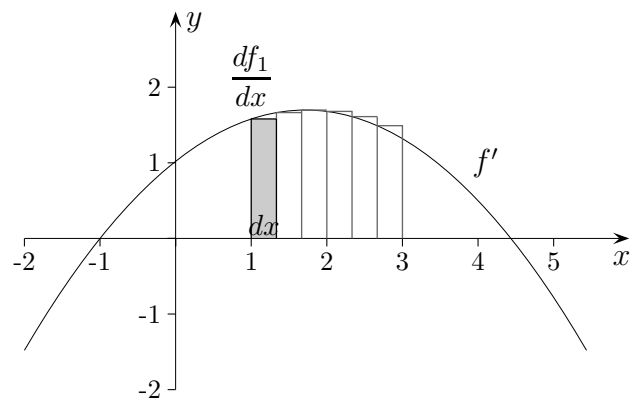
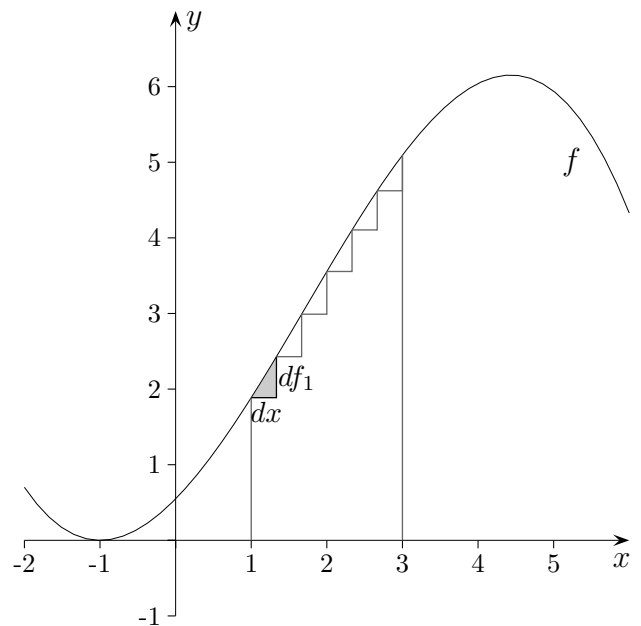
Ohne dass die Grundlagen befriedigend geklärt waren, entwickelte sich die Mathematik rasant weiter (Johann Bernoulli, Euler, Lagrange, Taylor). Neue Gebiete der Mathematik wurden entdeckt. Im 18. Jahrhundert, als mathematische Ungereimtheiten auftauchten, dachte man erneut und nun erfolgreich über die Grundlagen der Analysis nach (Bolzano, Cauchy).

Entnehme den nebenstehenden Zeichnungen die Leibnizsche Idee der Flächenberechnung.

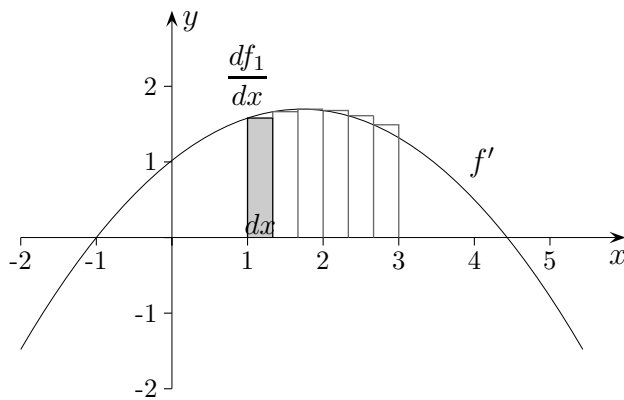
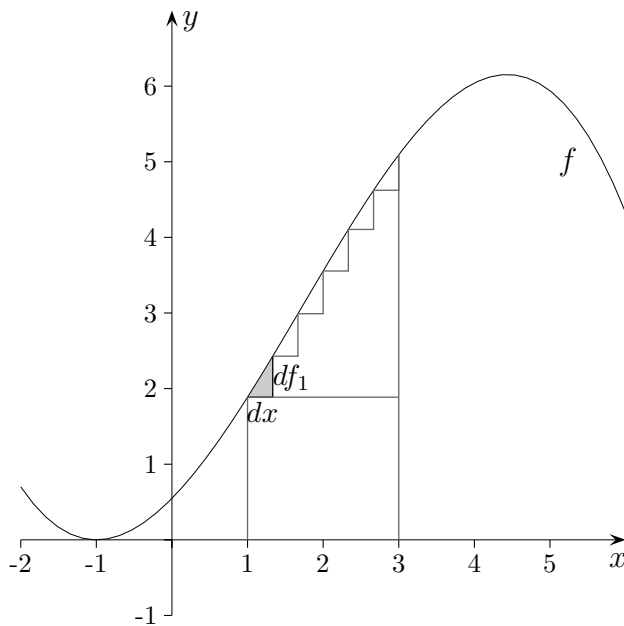
Berechne: $A = \int_0^2 x^2 dx$

Roofls

(integrare, lat. wiederherstellen)



Leibniz' Kalkül



Der Inhalt des 1. (linken) Rechtecks beträgt $\frac{df_1}{dx} \cdot dx = df_1$,

der des 2. $\frac{df_2}{dx} \cdot dx = df_2$, usw.

$df_1 + df_2 + \dots$ ist die Summe aller Rechteckflächeninhalte.

Sie kann kürzer (genähert) als Funktionsdifferenz $f(3) - f(1)$ ermittelt werden.

f ist hier die Aufleitung von f' .

Der Inhalt der Fläche unter einem Graphen kann als Differenz der Aufleitung an der Stelle der rechten und linken Grenze bestimmt werden.