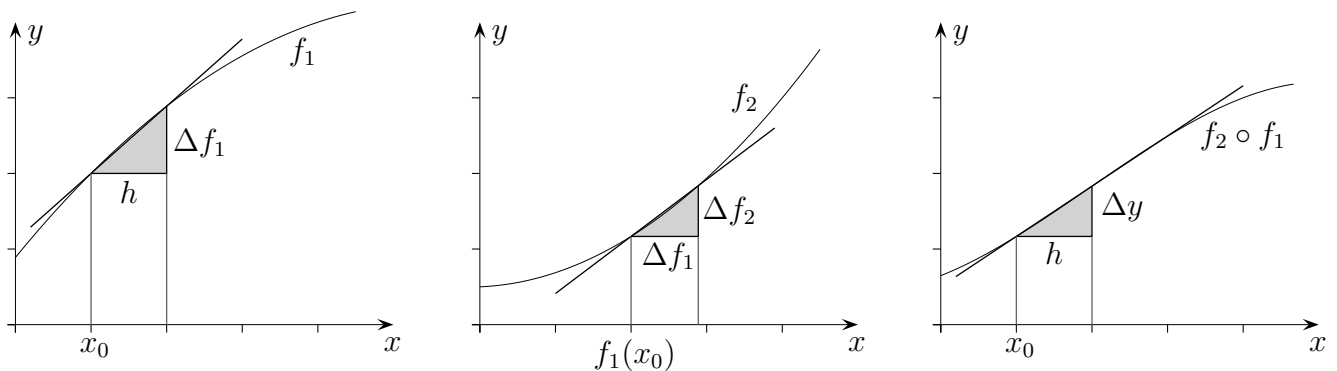


Kettenregel (Ableitung von $f_2 \circ f_1$)

Eine Funktion wie $f(x) = (\frac{1}{2}x - 1)^2 + 1$ kann in eine
 innere Funktion $f_1 = \frac{1}{2}x - 1$ und eine
 äußere Funktion $f_2 = x^2 + 1$ zerlegt werden. Es ist dann: $f(x) = f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x))$.

1. Zeichne die Graphen von f_1 , f_2 sowie die Verkettung $f_2 \circ f_1$.



Zur Erinnerung: $f_1'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x_0 + h) - f_1(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f_1}{h}$, $\Delta f_1 = f_1(x_0 + h) - f_1(x_0)$

Für die Verkettung gilt:

$$(f_2 \circ f_1)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(f_1(x_0 + h)) - f_2(f_1(x_0))}{h} \quad \text{Mit } f_1(x_0 + h) = f_1(x_0) + \Delta f_1 \text{ erhalten wir}$$

$$(f_2 \circ f_1)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(f_1(x_0) + \Delta f_1) - f_2(f_1(x_0))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(f_1(x_0) + \Delta f_1) - f_2(f_1(x_0))}{\Delta f_1} \cdot \frac{\Delta f_1}{h}$$

Der Übergang zu den Grenzwerten ergibt die Kettenregel: $(f_2 \circ f_1)'(x_0) = f_2'(f_1(x_0)) \cdot f_1'(x_0)$

2. Leite ab.

a) $f(x) = (2x + 1)^3$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = e^{5x}$

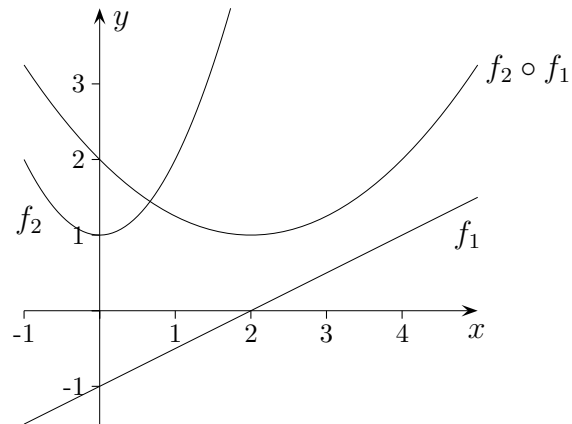
d) $f(x) = \sqrt{3x + 2}$

3. Zeige, dass gilt: $\Delta y = \Delta f_2$ (siehe obige Graphen).

Begründe die Kettenregel mit $\frac{\Delta y}{h} = \frac{\Delta f_2}{\Delta f_1} \cdot \frac{\Delta f_1}{h}$

Kettenregel

1.



2. Leite ab.

a) $f(x) = (2x + 1)^3$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = e^{5x}$

d) $f(x) = \sqrt{3x + 2}$

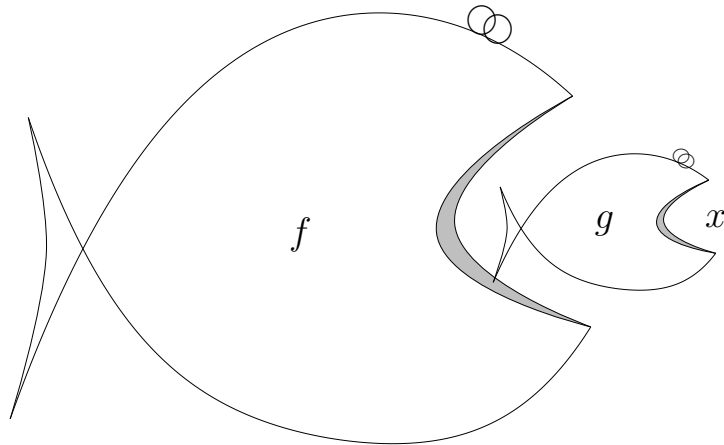
a) $f'(x) = 6 \cdot (2x + 1)^2$

b) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

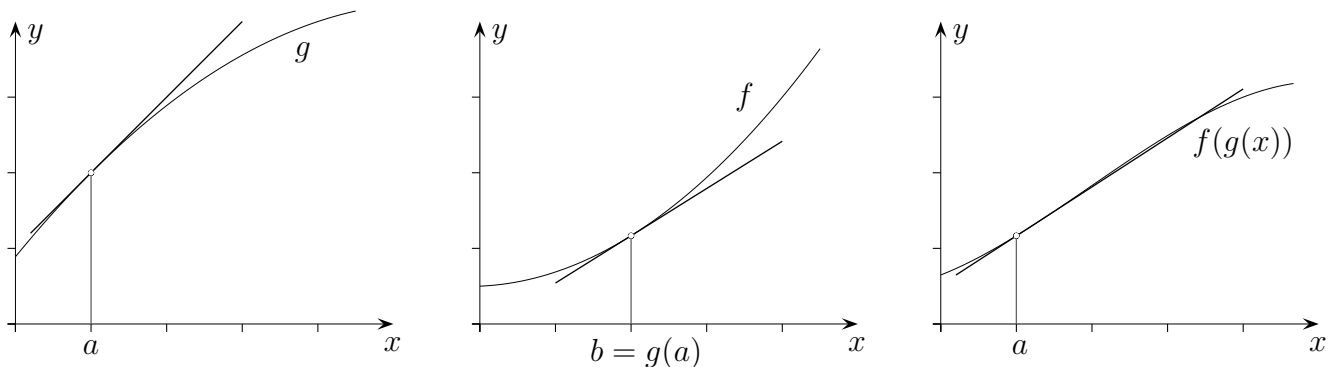
c) $f'(x) = 5e^{5x}$

d) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x + 2}}$

Verkettung $f(g(x))$



Kettenregel, Ableitung von $f(g(x))$



Wir gehen von Näherungen durch Tangenten aus

$$g(x) \approx g(a) + g'(a) \cdot (x - a) \quad \text{und}$$

$$f(x) \approx f(b) + f'(b) \cdot (x - b) \quad \text{d.h.}$$

$$f(x) \approx f(g(a)) + f'(g(a)) \cdot (x - g(a))$$

und verketten f und g :

$$f(g(x)) \approx f(g(a)) + \underbrace{f'(g(a)) \cdot g'(a)}_{\text{Ableitung}} \cdot (x - a)$$

$g(a)$ hebt sich auf.

g ist die innere Funktion,
 f die äußere.

Kettenregel:

Ableitung der äußeren Funktion an der Stelle der inneren,
 multipliziert mit der Ableitung der inneren Funktion

Leite ab.

a) $f(x) = (1 - 2x)^3$

b) $f(x) = e^{-x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{8 - x^2}$

Leite ab.

a) $f(x) = (1 - 2x)^3$

b) $f(x) = e^{-x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{8 - x^2}$

a) $f'(x) = -6(1 - 2x)^2$

b) $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

c) $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{8 - x^2}}$

Ableitungen Übung

1. $f(x) = x^2 \cdot e^{-kx}$ $f'(x) = -x e^{-kx} (-2 + kx)$ $f''(x) = e^{-kx} (2 - 4kx + x^2 k^2)$
2. $f(x) = e^{-kx^2+x}$ $f'(x) = (-2kx + 1) e^{-kx^2+x}$ $f''(x) = e^{-kx^2+x} ((-2kx + 1)^2 - 2k)$
3. $f(x) = (e^{-x} - 1)^2$ $f'(x) = 2(-e^{-2x} + e^{-x})$ $f''(x) = 2e^{-x} (2e^{-x} - 1)$
4. $f(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$ $f'(x) = \frac{-4e^x \cdot (e^x - 1)}{(e^x + 1)^3}$ $f''(x) = \frac{4e^x \cdot (e^{2x} - 4e^x + 1)}{(e^x + 1)^4}$
5. $f(x) = \frac{G}{1 + e^{-kx}}$ $f'(x) = \frac{Gk e^{-kx}}{(1 + e^{-kx})^2}$ $f''(x) = \frac{Gk^2 e^{-kx} (e^{-kx} - 1)}{(1 + e^{-kx})^3}$
6. $f(x) = x + \sin(1 - kx)$ $f'(x) = 1 - \cos(-1 + kx)k$ $f''(x) = \sin(-1 + kx)k^2$
7. $f(x) = ax^2 \cos(kx)$ $f'(x) = 2ax \cos(kx) - kax^2 \sin(kx)$
8. $f(x) = \ln(1 + x^2)$ $f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$ $f''(x) = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}$
9. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x^2}$ $f'(x) = -\frac{x+2}{x^2+x}$ $f''(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x^2(x+1)^2}$
10. $f(x) = \frac{1}{2}(x - \ln x)$ $f'(x) = \frac{x-1}{2x}$ $f''(x) = \frac{1}{2x^2}$
11. $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$ $f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$ $f''(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x^3}$
12. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ $f'(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$ $f''(x) = \frac{-4}{(x-1)^3}$
13. $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ $f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$ $f''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$

Zur Erinnerung:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Begründung:

$$e^{\ln x} = x \quad | \quad ()' \quad (\text{Kettenregel})$$

$$e^{\ln x} (\ln x)' = 1$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$