

Integration

Gegeben sei $f(x) = x^2 + 1$.

Eine Funktion $F(x)$, deren Ableitung f ist, heißt *Stammfunktion* von f .

Übliche Schreibweise für Stammfunktionen:

$$F(x) = \int (x^2 + 1) dx = \frac{1}{3}x^3 + x + C$$

C heißt *Integrationskonstante* (und spielt zunächst bei der Flächenberechnung keine Rolle).

$\int (x^2 + 1) dx$ heißt *unbestimmtes Integral*, im Gegensatz zum *bestimmten Integral* $A = \int_a^b f(x) dx$.

Eine Funktion zu integrieren bedeutet, eine Stammfunktion zu ermitteln.

Beispiele:

$$\int 2 dx = 2x + C$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:

$$A = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Schreibweise: $A = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

$$A = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^2 = \frac{8}{3} + 2 - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) = 6$$

1. Integriere die Funktionen.

a) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 5x + 1$

b) $f(x) = x^2 \cdot (x^3 + 3x^2 - 7x + 2)$

c) $f(x) = -\frac{3}{x^2} + 2x^3 + 1$

2. Überprüfe a) und c)

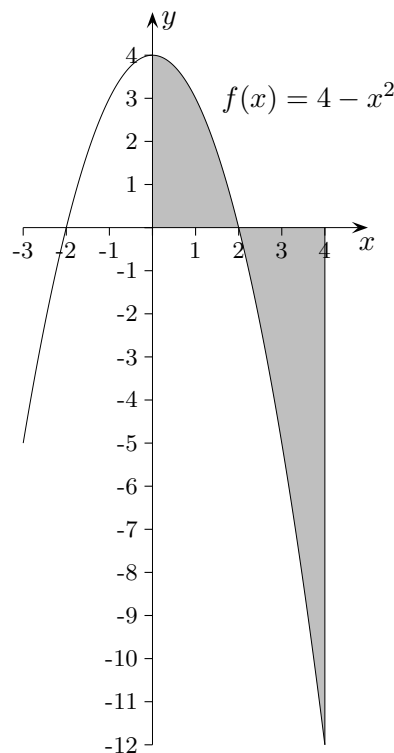
und gib b) und d) ohne Rechnung an.

a) $\int_0^2 (4 - x^2) dx = \frac{16}{3}$

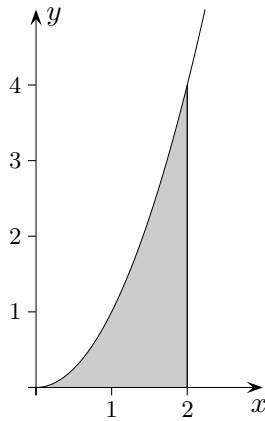
b) $\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx$

c) $\int_2^4 (4 - x^2) dx = -\frac{32}{3}$

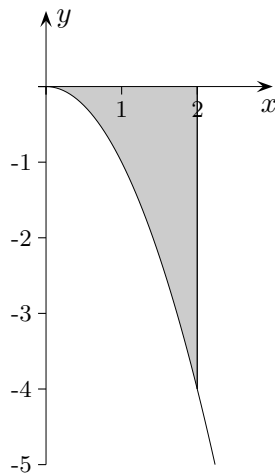
d) $\int_{-2}^4 (4 - x^2) dx$



Fläche unterhalb der x -Achse



$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \dots = \frac{8}{3}$$



$$\int_0^2 (-x^2) dx = \left[-\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \dots = -\frac{8}{3}$$

Die Auswertung des Integrals ergibt hier ein negatives Ergebnis.

Der Inhalt der Fläche unterhalb der x -Achse beträgt $\frac{8}{3} FE$.

Die folgende Aufgabe zeigt, wie nützlich diese Eigentümlichkeit ist.

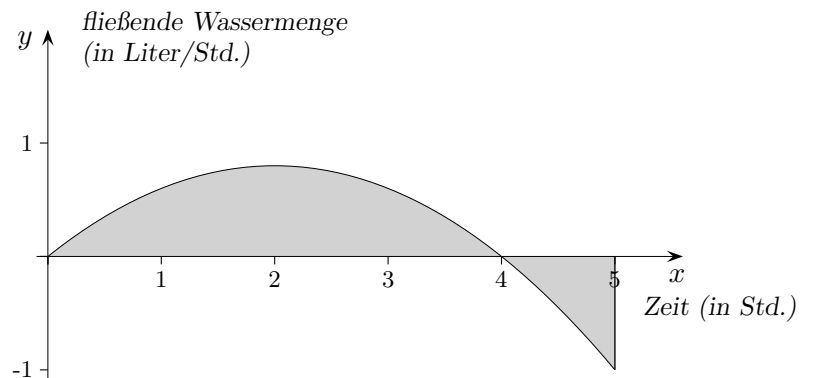
Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss eines Behälters geregelt.

Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).

Zeichne den zeitlich abhängigen Verlauf der Gesamtf Flüssigkeitsmenge im Behälter (zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer).

Bekannt ist die lokale Änderungsrate:

$$f'(x) = -\frac{1}{5}x(x - 4), \quad 0 \leq x \leq 5$$



Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).

Zeichne den zeitlich abhängigen Verlauf der Gesamtf Flüssigkeitsmenge im Behälter (zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer).

Bekannt ist die lokale Änderungsrate:

$$f'(x) = -\frac{1}{5}x(x - 4), \quad 0 \leq x \leq 5$$

