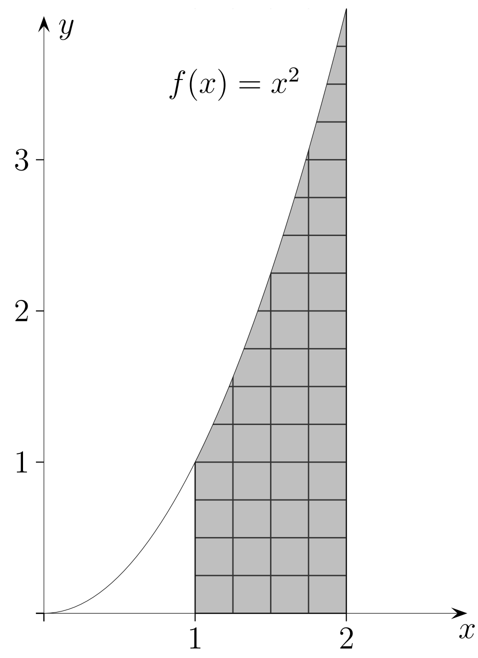
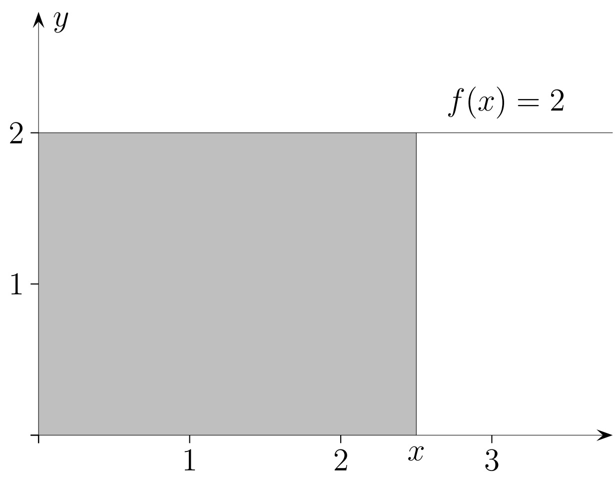
Integralrechnung

Mit der Integralrechnung können Flächen unterhalb eines Graphen in festgelegten Grenzen, hier 1 und 2, exakt berechnet werden.



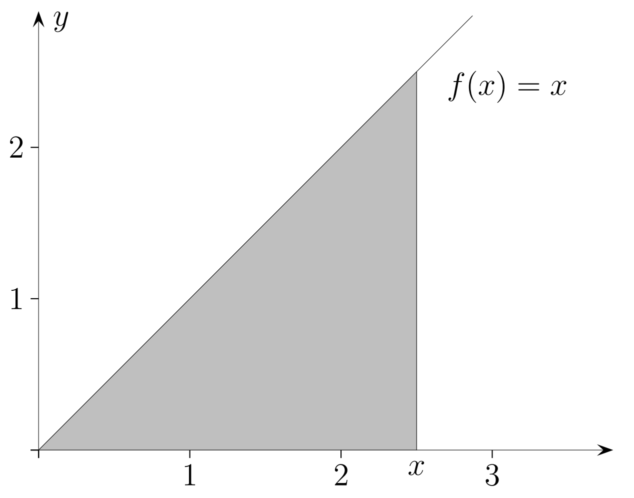
Wir betrachten zunächst Flächeninhalte, die elementar berechnet werden können.
Sei $A(x)$ der Flächeninhalt unterhalb des Graphen in den Grenzen von 0 bis x.
Ermittle $A(1)$, $A(2)$, $A(x)$. Was fällt dir auf?

a)

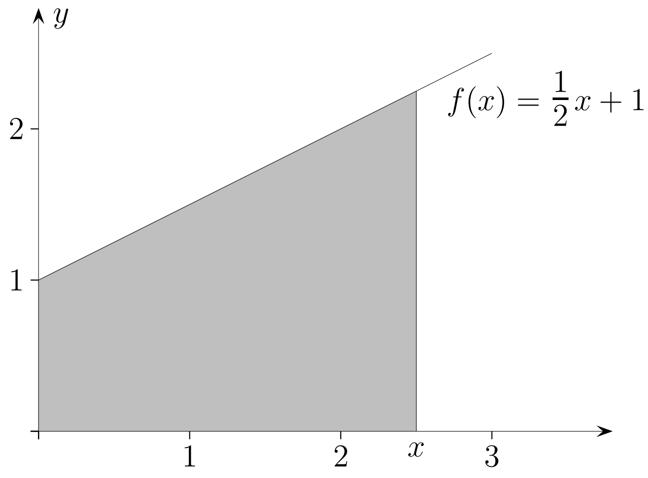


Integralrechnung

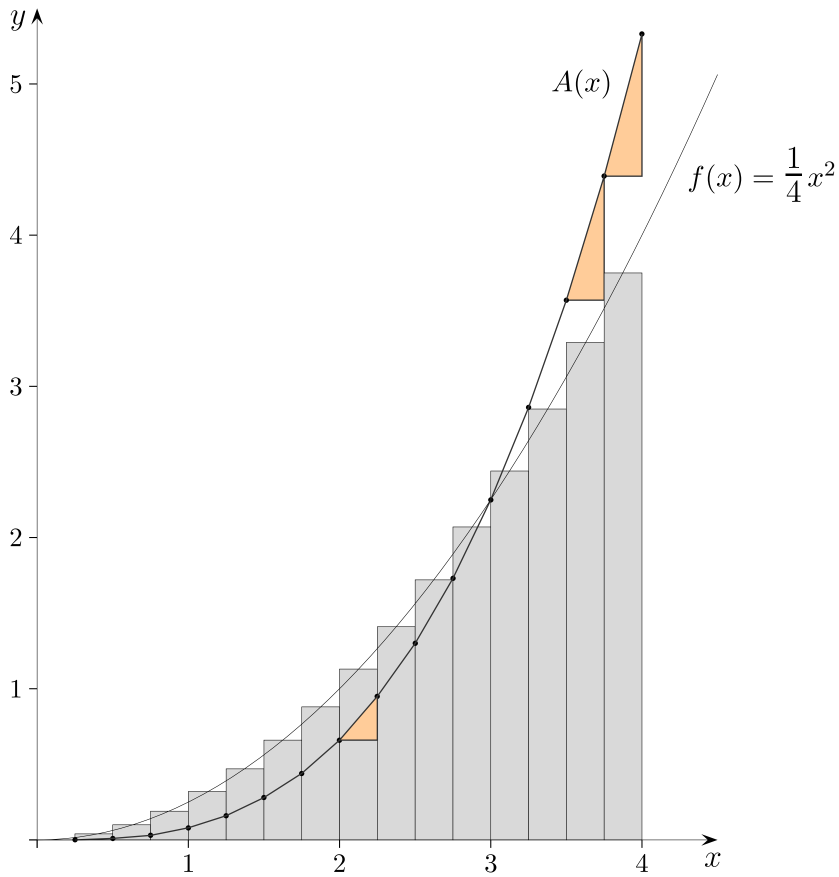
b)



c)



Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

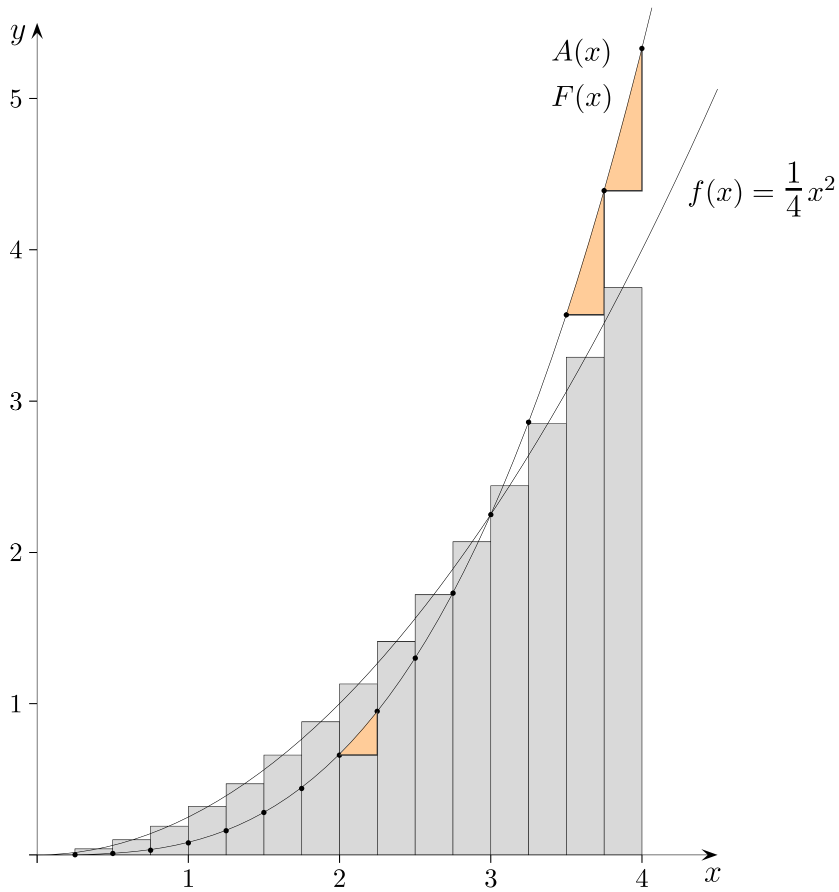


$A(x)$ ist die Summe der Rechtecksinhalte von Null bis x
(Flächenfunktion der Treppenfunktion).

Ermittle $A'(x)$.

Tipp: Betrachte an einer (beliebigen) Stelle den Differenzenquotienten $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ der Funktion $A(x)$.
Welche Fläche hat den Inhalt Δy (FE)?

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



Es ist zu erkennen, dass $A'(x) \approx f(x)$ ist.
Das zu einem Steigungsdreieck gehörenden Rechteck hat den Inhalt Δy (*FE*)?
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ist dann die Höhe des Rechtecks.

$F(x)$ ist die Stammfunktion von $f(x)$, die durch den Ursprung verläuft.
$A(x)$ stimmt mit $F(x)$ erstaunlich gut überein.

Integralrechnung

$f(x) = 2$	$A(x) = 2x$
$f(x) = x$	$A(x) = \frac{1}{2}x^2$
$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$	$A(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$

Die Vermutung, dass stets $A'(x) = f(x)$ gilt, liegt nahe.
Um Flächeninhalte zu bestimmen, müsste man f aufleiten (integrieren), um $A(x)$ zu erhalten.
Demnach ergäbe sich für den Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ in den Grenzen von 1 bis 2 (siehe Seite 1) $A = A(2) - A(1) = \frac{7}{3}$ [FE], $A(x) = \frac{1}{3}x^3$.

Die Vermutung wird sich als richtig erweisen. An dieser Stelle folgen einige Übungen.
Leibniz ersann folgende Schreibweise:

$$A = \int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Das Integralzeichen $\int$ erinnert an eine Summe von Rechtecken,

dx legt die Integrationsvariable fest, möglich wäre: $\int_1^2 xy\,dy$

Bestimme algebraisch den Inhalt der Fläche

a) unter dem Graphen von $f(x) = x^3 + 2$ in den Grenzen $a = 2$, $b = 4$,

b) die der Graph von $f(x) = 9 - x^2$ mit der x-Achse einschließt,

c) den die beiden Graphen von $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 6x + 1$ miteinander einschließen.

Die Ergebnisse sind ganzzahlig und ergeben zusammen 136,

sie können mit fnInt(f(X), X, a, b) überprüft werden.

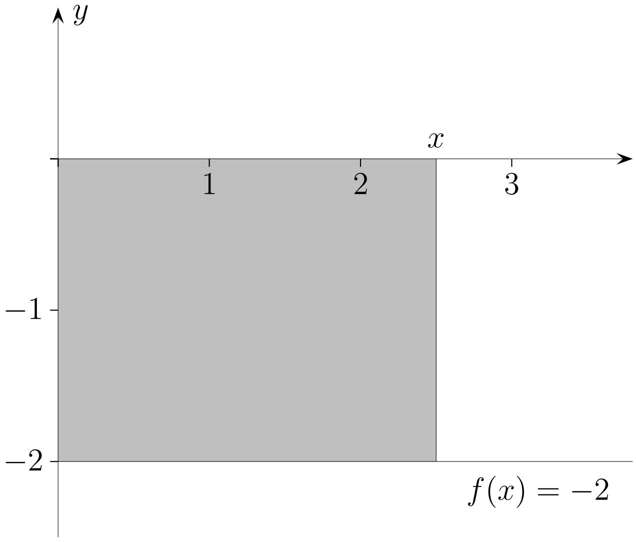
$A(x)$ heißt Integralfunktion. Der Beginn bei Null ist willkürlich, eine andere Wahl führte zu $A(x)+C$ mit einer additiven Konstante (warum?), die aber ohnehin bei der Differenzbildung $\big[A(x) + C\big]_a^b$ herausfallen würde. Für die Flächenberechnung muss daher nur eine Funktion $F(x)$ (Stammfunktion) ermittelt werden, für die $F'(x) = f(x)$ gilt.

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

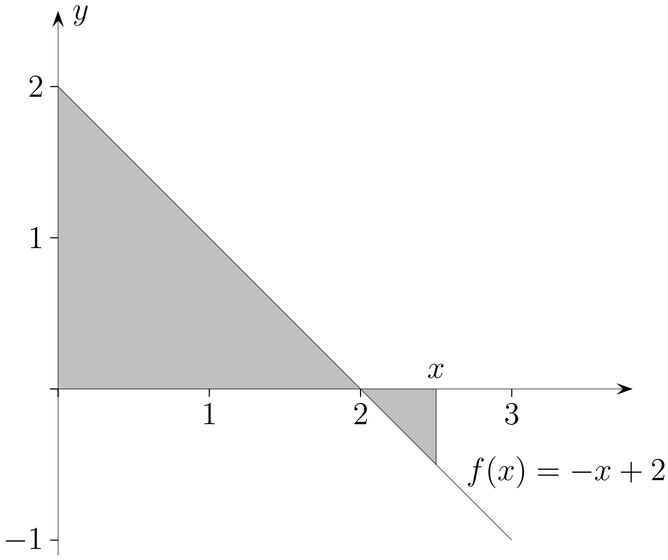
Integralrechnung

Welche Besonderheiten beinhalten die folgenden Fälle?

d)



e)



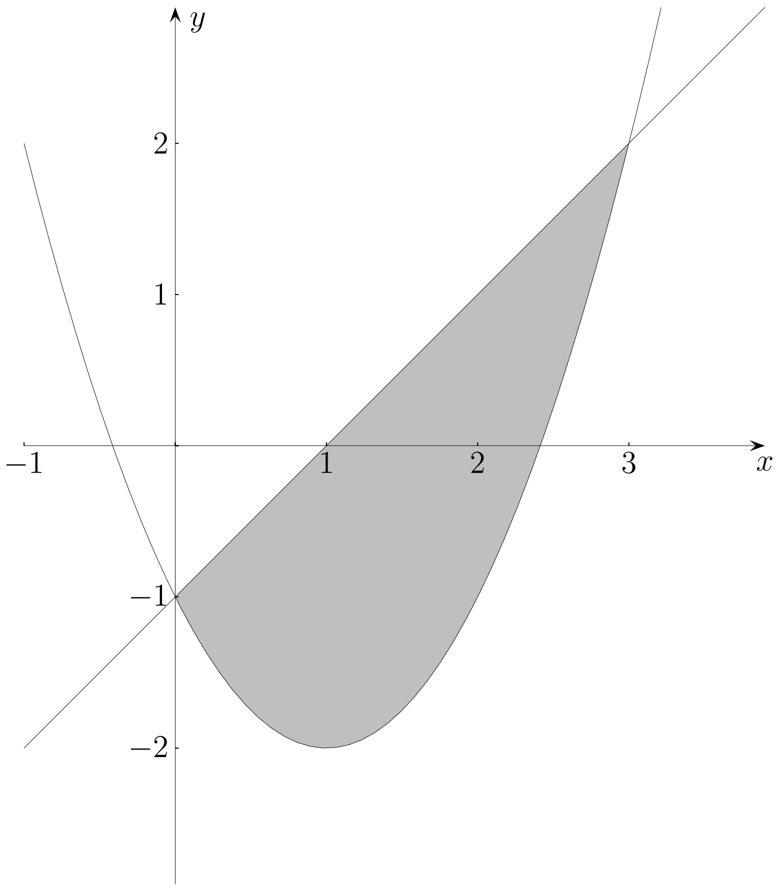
Integralrechnung

Gegeben sind die Funktionen

$f(x) = x - 1$

$g(x) = x^2 - 2x - 1$

Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Graphen eingeschlossen wird.



$\frac{9}{2}$ $[FE]$

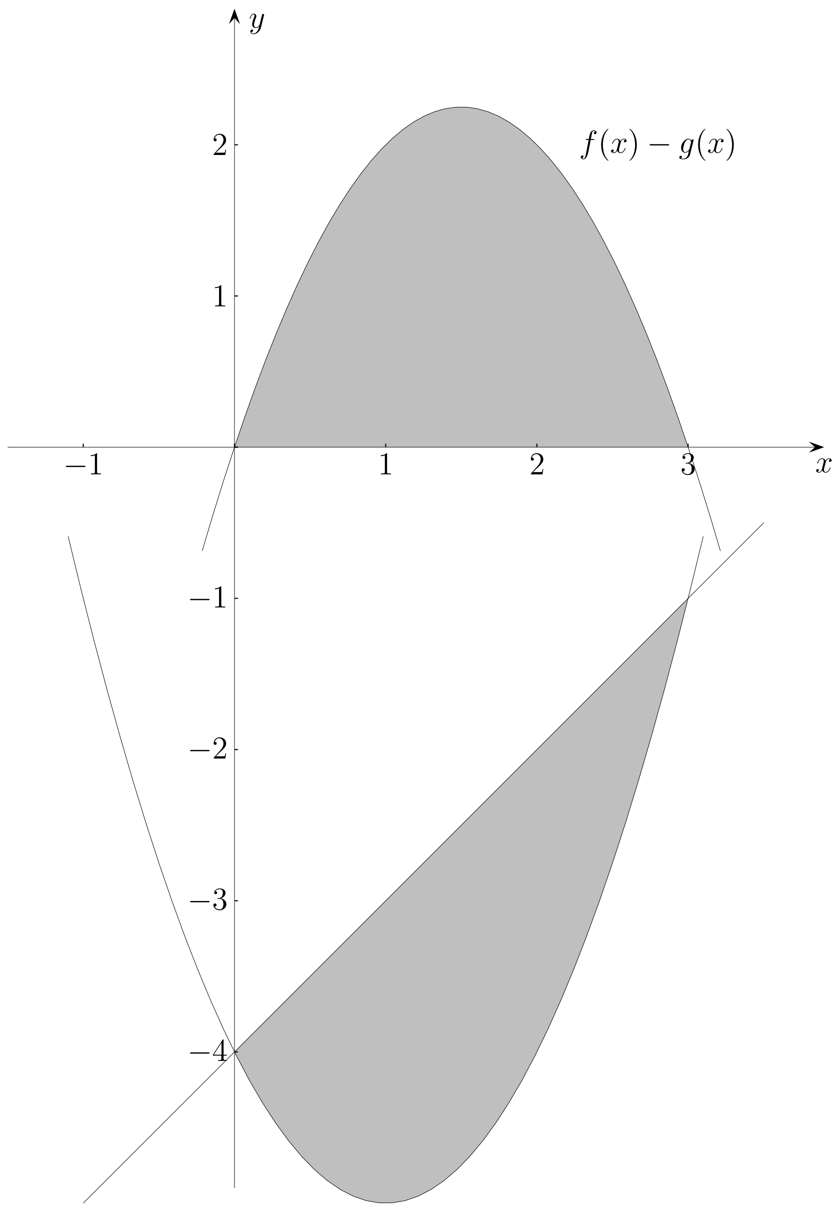
Integralrechnung

Gegeben sind die Funktionen

$f(x) = x - 4$

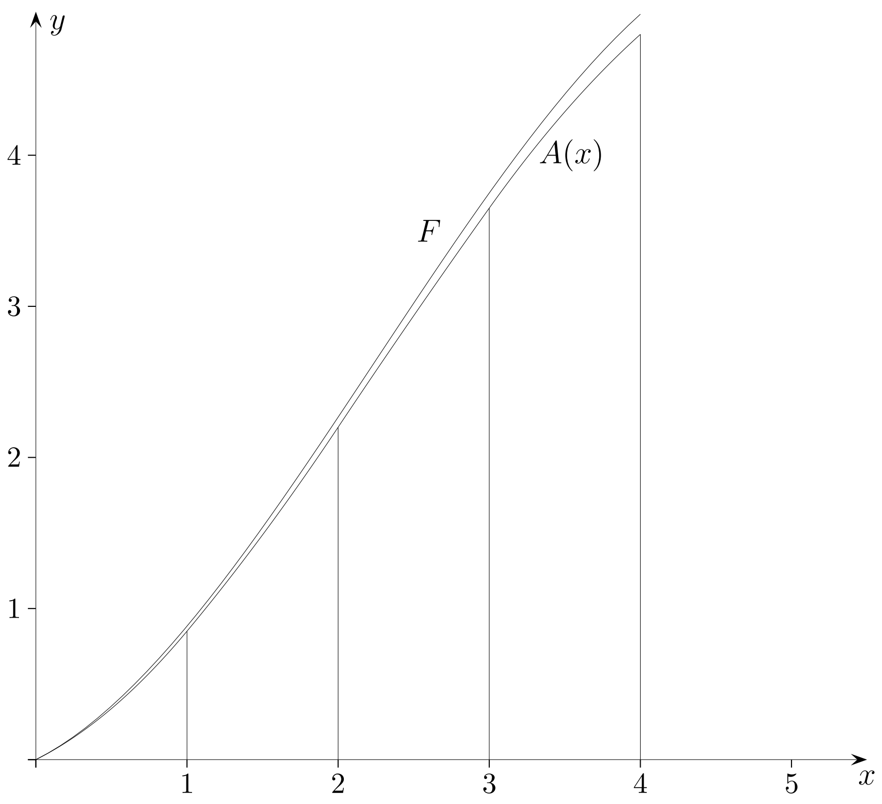
$g(x) = x^2 - 2x - 4$

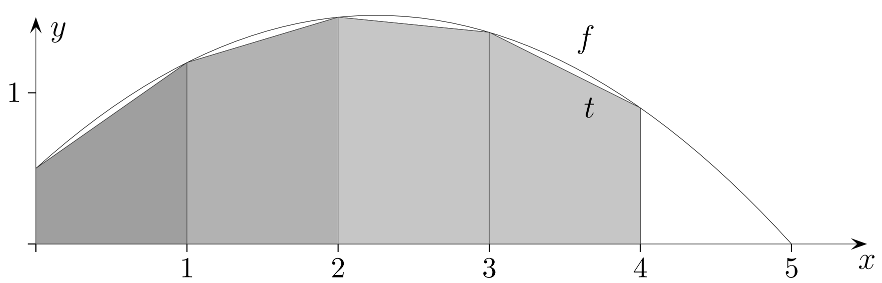
Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Graphen eingeschlossen wird.



$\frac{9}{2}$ [FE]

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Beweisidee





Für die Funktionen $f(x) = ax + b$ kann leicht nachgewiesen werden, dass gilt: $A'(x) = f(x)$

F ist eine Stammfunktion von f, d. h. $F' = f$.

Der Graph von F beginnt hier im Ursprung, $F(0) = 0$.

t ist eine stückweise lineare Funktion, die f approximiert.

Mit $A(x)$ kann der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von $t(x)$ exakt ermittelt werden.

Es gilt $A'(x) = t(x)$, von den Nahtstellen 1, 2, 3 abgesehen.

$A(x)$ ist also eine Aufleitung von $t(x)$.

Je besser $t(x)$ $f(x)$ approximiert, um so weniger weichen die Aufleitungen $F(x)$ und $A(x)$ voneinander ab.

Daher eignet sich $F(x)$ zur Flächenberechnung.