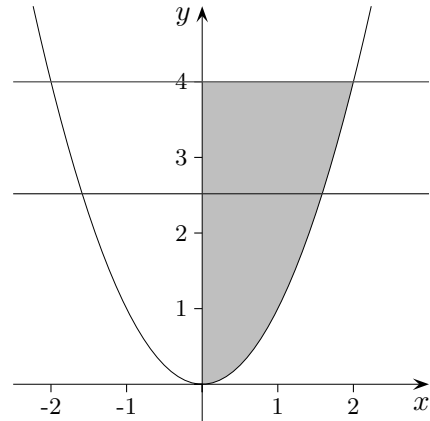
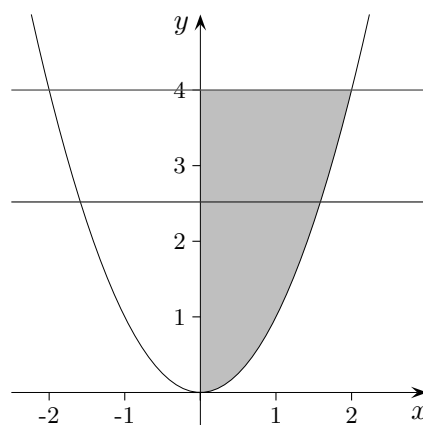


Aufgaben Integralrechnung



1. Die Parabel $f(x) = x^2$ ($x \geq 0$), die Gerade $y = 4$ und die y -Achse umschließen eine Fläche A . Welche Parallele zur x -Achse halbiert die Fläche A ?
Gib die Gleichung dieser Parallelen an.
2. Berechne den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ und der Tangente im Maximum umschlossen wird. Die Integrationsgrenzen sollen auch berechnet werden.
3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^2 - 4ax$, wobei $a < 0$ ist.
Bestimme a so, dass die vom Graphen der Funktion und der x -Achse eingeschlossene Fläche den Inhalt $\frac{16}{3}$ FE (Flächeneinheiten) hat.
4. Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ wird von einer Geraden mit positiver Steigung, die durch den Ursprung verläuft, geschnitten. Wie groß ist die Steigung, damit die umschlossene Fläche 9 FE (Flächeneinheiten) beträgt?
5. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = -\frac{2}{k}x^3 + 2x^2$, $k > 0$, und $g(x) = x^2$.
 - a) Berechne die x -Koordinaten des Minimums $Min(? | 0)$ und des Maximums $Max(? | \frac{8}{27}k^2)$ von f .
 - b) Fertige eine Skizze der Graphen für $k = 3$ an.
 - c) Berechne für allgemeines k die von den Graphen f und g eingeschlossene Fläche.
 - d) Gibt es ein k , so dass die eingeschlossene Fläche minimal wird? (Begründung erforderlich)
6. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 6x$. Berechne den Inhalt der Fläche, die die Tangenten in den Nullstellen mit dem Graphen von f einschließen.
Bei dieser Aufgabe gibt es wesentliche Vereinfachungen!
7. Dem Graphen der Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ ist ein Rechteck größten Inhalts so einzubeschreiben, dass eine Seite auf der x -Achse liegt. Zeige, dass Eckpunkte in den Wendepunkten liegen.



1. $x^2 = 4 \implies x_1 = 2, (x_2 = -2)$

$$\int_0^2 (4 - x^2) dx = \frac{16}{3}$$

$x^2 = c \implies x_1 = \sqrt{c}, (x_2 = -\sqrt{c})$

$$\int_0^{\sqrt{c}} (c - x^2) dx = \frac{2}{3} c \sqrt{c}$$

$$\frac{2}{3} c \sqrt{c} = \frac{8}{3} \implies c = \sqrt[3]{16}$$

2. $Max(0 | 4), Min(2 | 0)$

$x^3 - 3x^2 + 4 = 4 \implies x_1 = 0, x_2 = 3$

$$\int_0^3 (4 - x^3 + 3x^2 - 4) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 \right]_0^3 = \frac{27}{4}$$

3. $ax^2 - 4ax = 0 \implies x_1 = 0, x_2 = 4$

$$-\frac{32}{3}a = \frac{16}{3} \implies a = -\frac{1}{2}$$

$$\int_0^4 (ax^2 - 4ax) dx = -\frac{32}{3}a$$

4. $\int_0^{4m} (mx - \frac{1}{4}x^2) dx = 9 \implies m = \frac{3}{2}$

5. a) $Min(0 | 0), Max(\frac{2}{3}k | \frac{8}{27}k^2)$

c) $\int_0^{\frac{k}{2}} (f(x) - x^2) dx = \frac{k^3}{96}$

6. $A = 2 \cdot \int_0^3 (6x - f(x)) dx = 18$

7. $x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$

8. Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = 3x^2(1 - \frac{x}{k})$, $k > 0$.

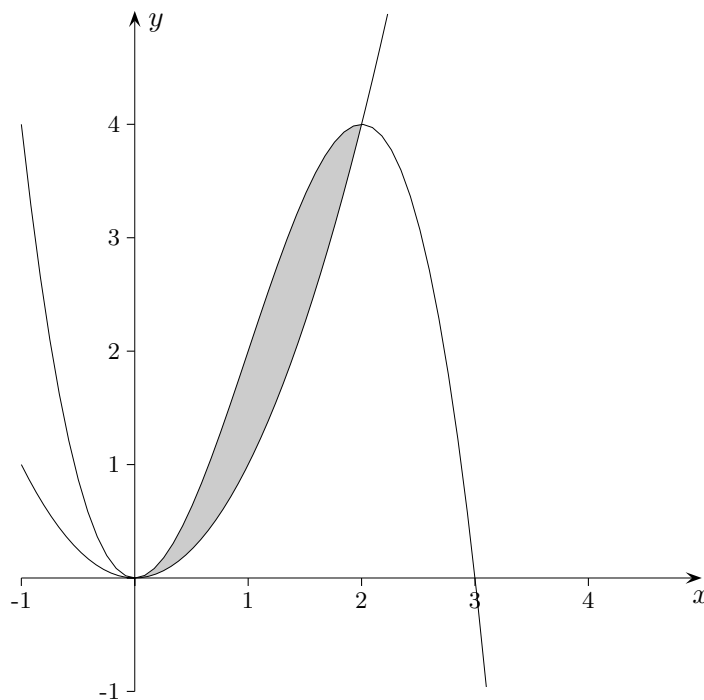
- a) Bestimmen Sie für die Graphen von f_k die Schnittpunkte mit der x -Achse, sowie Extrema und Wendepunkte. Zeichnen Sie den Graphen von f_3 .

(zur Kontrolle: $N_1(0 | 0)$, $N_2(k | 0)$, $Min(0 | 0)$, $Max(\frac{2}{3}k | \frac{4}{9}k^2)$, $W(\frac{1}{3}k | \frac{2}{9}k^2)$)

- b) Gegeben ist ferner die Funktion $g(x) = x^2$.

Berechnen Sie nun k so, dass das von den Graphen der Funktionen f_k und g eingeschlossene Flächenstück den Inhalt $\frac{4}{3} FE$ hat.

(zur Kontrolle: Schnittstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2}{3}k$, $A = \frac{4}{81} k^3$, $k = 3$)



Wasserbecken

9. Ein quaderförmiges Becken mit 8 m Länge, 5 m Breite und 3 m Höhe wird mit Wasser gefüllt. Zu Beginn beträgt die Wasserhöhe $0,1\text{ m}$. Der Zu- bzw. Abfluss des Wassers wird modellhaft durch die Zulaufratenfunktion

$$f(t) = t^3 - 13t^2 + 40t, \quad 0 \leq t \leq 9$$

beschrieben ($f(t)$ in m^3 pro Stunde, t in Stunden).

- a) Geben Sie die Zeitpunkte an, zu denen das Wasser weder zu- noch abläuft, und berechnen Sie die Zeitpunkte maximalen Zu- bzw. Abflusses.
- b) Skizzieren Sie den Graphen G_f der Zulaufratenfunktion f .
- c) Wie viel Wasser befindet sich nach 3 Stunden im Becken?
- d) Bestimmen Sie die Höhe des Wasserstands am Ende des gesamten Einfüllvorgangs.
- e) Berechnen Sie die maximale Wassermenge im Becken.
- f) Nach welcher Zeit würde das Becken überlaufen, falls die Zeitbeschränkung aufgehoben würde?

Wasserbecken Ergebnisse

9. Ein quaderförmiges Becken mit 8 m Länge, 5 m Breite und 3 m Höhe wird mit Wasser gefüllt. Zu Beginn beträgt die Wasserhöhe 0,1 m. Der Zu- bzw. Abfluss des Wassers wird modellhaft durch die Zulaufratenfunktion

$$f(t) = t^3 - 13t^2 + 40t, \quad 0 \leq t \leq 9$$

beschrieben ($f(t)$ in m^3 pro Stunde, t in Stunden).

- a) Geben Sie die Zeitpunkte an, zu denen das Wasser weder zu- noch abläuft,

$$t_1 = 0, t_2 = 5, t_3 = 8$$

und berechnen Sie die Zeitpunkte maximalen Zu- bzw. Abflusses.

$$t_{\text{Max}} = 2, t_{\text{Min}} = \frac{20}{3}, t_{\text{Rand}} = 9$$

- b) Skizzieren Sie den Graphen G_f der Zulaufratenfunktion f .

- c) Wie viel Wasser befindet sich nach 3 Stunden im Becken?

$$4 + 83,25 \text{ (m}^3\text{)}$$

- d) Bestimmen Sie die Höhe des Wasserstands am Ende des gesamten Einfüllvorgangs.

$$4 + 101,25 \text{ (m}^3\text{)}, h = 2,63 \text{ (m)}$$

- e) Berechnen Sie die maximale Wassermenge im Becken.

$$F(x) = \int_0^x f(t) dx + 4$$

$$F(5) = 118,58 \text{ (m}^3\text{)}$$

$$\text{beachte: } F(9) = 105,25 < 118,58 \text{ (m}^3\text{)}$$

- f) Nach welcher Zeit würde das Becken überlaufen, falls die Zeitbeschränkung aufgehoben würde?

$$F(x) = 8 \cdot 5 \cdot 3 \implies x = 9,33 \text{ (h)}$$

